서문

새 교육과정에 맞춘 기출문제집의 기준이 되려고 합니다 !

2016년 11월 17일에 실시된 대학수학능력평가 수학 영역은 6년만의 불수능으로, 고득점을 노리는 수험생에게 만점과 1등급을 결정하는 최고 난문(30번)에 대한 대비가 그 어느 때보다 중요해졌습니다.

○ 올해 최고 난문의 특징은

가형 : 가형 30번은 최소한 6단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 물론 수학적 직관으로 몇 단계는 줄일 수 있겠습니다만, 그렇다고 해도 지난 5년간 출제된 이과 30번에 비하여 사고과정의 단계가 많았습니다. 그런데 어려워 보이는 이 문제는 사실 알고 보면 **지난 23년간 출제된 평가원 기출문제들의 재조합일 뿐이며, 풀이의 각 과정과 과거 평가원 기출문제 사이에 일대일대응이 가능**합니다. 이처럼 평가원이 수험생에게 우선적으로 요구하는 것은 교과서의 개념을 정확하게 숙지하고, 이를 바탕으로 교과서 문제, 평가원 기출문제를 반복 연습하는 것입니다. 이런 원칙을 지켜서 연습을 충분히 한 수험생의 경우 올해 가형 30번은 도전해 볼만 했을 것이지만, 빠르고 멋있는 풀이에 길들여진 수험생의 경우 당혹스러웠을 것입니다. 더 이상 피상적인 학습만으로는 가형에서 만점은 불가능 한 것입니다.

나형 : 나형 30번은 최소한 3단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 풀이의 중간 단계에서 역함수의 개념이 사용되는데, 역함수에 대한 정확한 이해를 바탕으로 다양한 상황의 문제를 푼 경험이 없었다면 당혹스러웠을 것입니다. 지난 5년간의 수능과 비교해 볼 때, 이젠 나형에서도 개념에 대한 정확한 이해와 이를 문제풀이에 실제로 적용할 수 있는 능력을 요구하고 있는 것입니다. 특히 난문의 경우 풀다 보면 어떻게든 풀리는 문제가 출제될 가능성은 적어지고 있는 것입니다.

○ 수능 수학을 대비하기 위해서는

(1) 교과서의 정의/정리/공식/성질/법칙을 정확하게 이해하고, 이를 교과서의 예제와 연습문제에 적용하는 연습을 해야 합니다.
(2) (1)의 연습을 바탕으로 평가원 기출문제를 최소 3회 이상 반복해서 풀어야 합니다. 특히 **정답률이 낮은 난문에 대해서는 자신의 손에서 정확한 풀이가 나올 때까지 서술형 풀이를 여러 번 작성**해야 합니다. 이 책의 모든 풀이는 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 가능하면 표현의 경제성보다는 수학적 엄밀함에 무게를 두었습니다. 자신의 풀이와 해설집의 풀이를 대조비교 하는 것도 좋은 공부가 될 것입니다.
(3) 평가원 기출문제에서 자주 등장하는 수학적 사고력, 수학적 사실들은 스스로 정리하는 것이 필요합니다. 평가원 기출문제는 확장된 교과서이기 때문입니다. 한 번 풀고 마는 문제들이 아닙니다.

○ 해설에 대하여

이 책에 실린 **해설은 지난 5년간 1만 시간 이상 작업한 결과물**입니다. 다양한 관점을 제시하기 위하여 시중에 출시된 대부분의 개념서와 기출문제집의 해설을 읽었으며, 이를 해설에 적극적으로 반영하였습니다. 아직은 부족한 점이 많겠지만 **시중의 어떤 기출 문제집 보다도 많은 다른 풀이와 참고 사항을 수록**하였다고 생각합니다.

수능 수학의 모든 것을 한 권에 담는 다는 각오로, 매년 개정판을 내면서 해설 보강 작업을 계속해나갈 것입니다.

이동훈

2018학년도 수능의 시작입니다 !

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007	대학수학능력	2006년 11월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2008	모의평가(6월)	2007년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2008	모의평가(9월)	2007년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2008	대학수학능력	2007년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2009	모의평가(6월)	2008년 6월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2007개정 교육과정		
6차 교육과정			2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	예비평가	2012년 5월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2003	대학수학능력	2002년 9월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2004	대학수학능력	2003년 6월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2004	대학수학능력	2003년 9월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
7차 교육과정			2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2005	예비평가	2003년 12월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2009개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2017	대학수학능력	2016년 11월

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3108 문항)

수학2	**미적분1**	미적분2	확률과 통계	기하와 벡터	수학1	교육과정 外
467	**528**	539	478	244	134	718
15 %	**17 %**	17.4 %	15.4 %	7.8 %	4.3 %	23.1 %

※ 수학1, 교육과정 外의 문항과 해설은 오르비북스(orbibooks.com)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ **‘이동훈 기출문제집 미적분1’** 에는 평가원이 세상에 선보인 3108개의 문항 중에서
2009개정 교육과정에 맞는 528개의 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
(일부 문항은 새 교육과정에 맞게 용어와 기호를 수정)

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

문제집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

G. 다항함수의 미분법

– 2009개정 교육과정

○ 주기함수는 미적분2에서 배우므로 주기함수의 미분가능성에 대한 문제는 미적분1에서는 제외하였습니다.

G. 함수의 그래프

G115

(2000-인문11)

삼차함수 $y=x^3-3ax^2+4a$의 그래프가 x축에 접할 때, a의 값은? (단, $a>0$) [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$

④ 1　⑤ $\frac{4}{3}$

G116

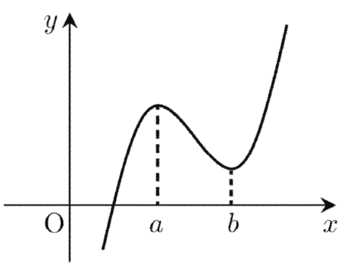
(2003(9)-인문20/자연20)

삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖고 두 실수 a와 b에 대하여 다음을 만족시킨다. (단, $0<a<b$)

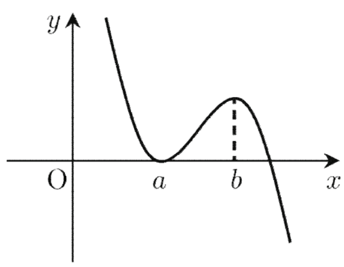
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=1,\ \lim_{x\to b}\frac{f(x)-1}{x-b}=2$$

이때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

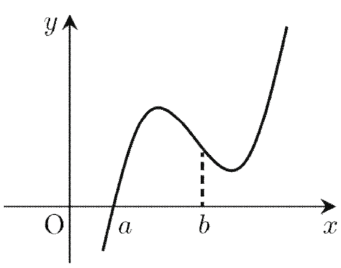
①



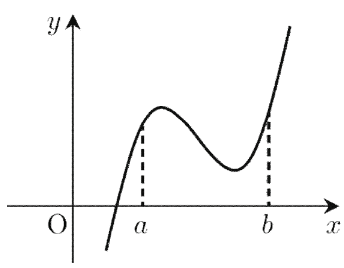
②



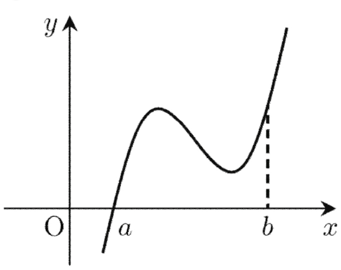
③



④



⑤



G117

(2004-인문10)

삼차함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 이 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 중에서 양수인 것은? [3점]

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2

④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

G118

(2005(예비)-가형6)

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대한 <보기>의 설명 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가진다.
ㄴ. $x\ge 2$이면 $f(x)\ge 2$이다.
ㄷ. $|x|\le 2$이면 $|f(x)|\le 2$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G119

(2010(6)-가형24)

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

G120

(2011-가형24)

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a|$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

G121

(2013(6)-가형21)

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점]

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

G122

(2014(6)-A형21)

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

G123

(2014(6)-B형16)

실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다. ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G124

(2014-A형21)

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$ (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

G125

(2015-A형21)

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

G126

(2016(6)-A형21)

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G127

(2016(9)-A형21)

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$y=x^4-4x^3+10x-30$, $y=2x+2$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\leq 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

G128

(2016-A형21)

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $\vert f(x)\vert$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$

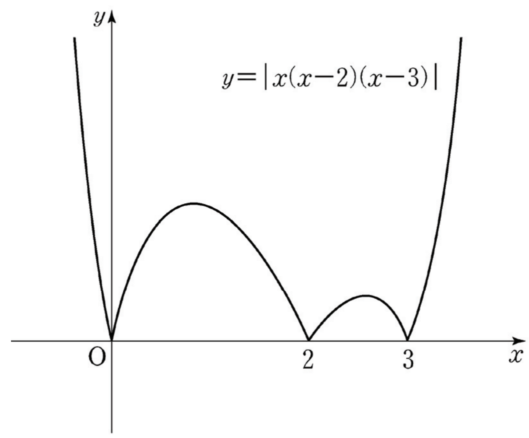
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

G129

(2017(9)-나형21)

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\vert x(x-2)(x-3)\vert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

G. 함수의 최대와 최소

G130

(1993(실험평가7차)-공통15)

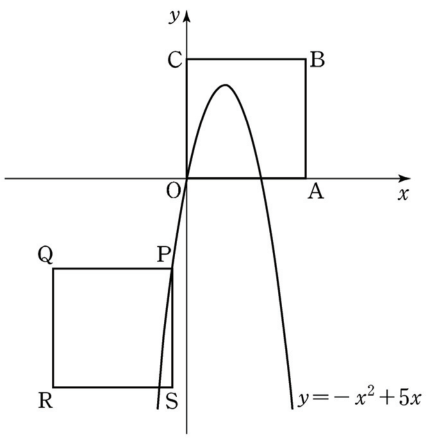
밑면의 반지름이 각각 R_1, $R_2(R_1 < R_2)$인 직원뿔 A, B가 있다. 직원뿔 A에 내접하는 원기둥 중에서 체적이 최대인 것의 밑면의 반지름을 r_1, 직원뿔 B에 내접하는 원기둥 중에서 체적이 최대인 것의 밑면의 반지름을 r_2라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $r_1R_2 = r_2R_1$ ② $r_1R_2 > r_2R_1$ ③ $r_1r_2R_1 = R_2$
④ $r_1R_1 = r_2R_2$ ⑤ $r_1R_1 > r_2R_2$

G131

(2008(6)-가형22)

그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 O$(0,\ 0)$, A$(8,\ 0)$, B$(8,\ 8)$, C$(0,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 $(-1,\ -6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



G132

(2009(9)-가형18)

구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$의 최댓값을 구하시오. [3점]

G133

(2010(6)-가형20)

좌표평면 위의 점 A$(0,\ 2)$가 있다. $0<t<2$일 때, 원점 O와 직선 $y=2$ 위의 점 P$(t,\ 2)$을 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [3점]

G134

(2011(9)-가형16)

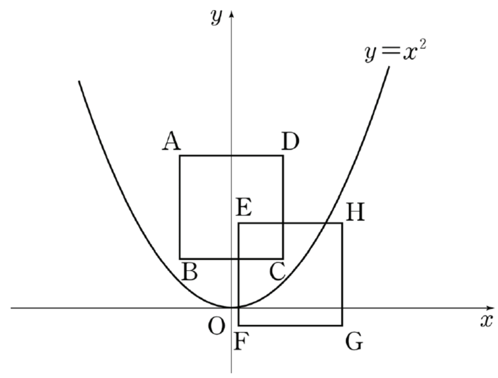
함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x\le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

G135

(2012(6)-나형21)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1)이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.) [4점]



① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

G136
(2013(6)-나형13)

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

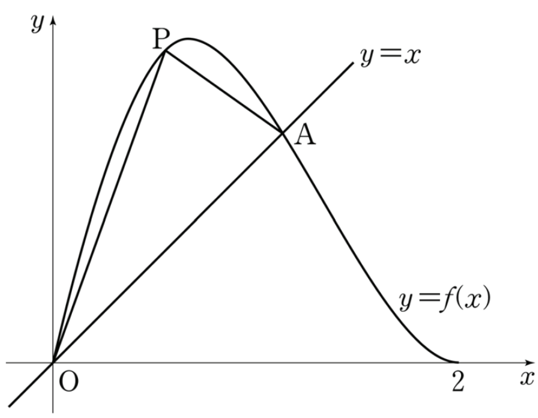
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G137
(2013(9)-나형19)

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2\left(a>\frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? [4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{17}{12}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{19}{12}$

G138
(2015(9)-A형27)

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

G139
(2017(6)-나형28)

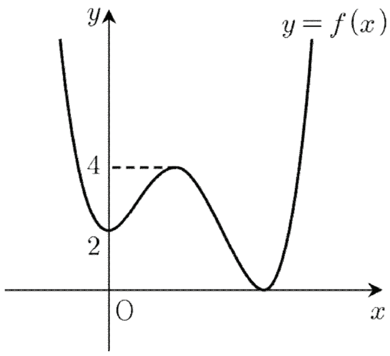
양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

G. 방정식에의 활용

G140
(2003(9)-인문21)

사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 방정식의 실근의 개수는? [3점]

$$\{f(x)\}^2=4f(x)-3$$



① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

G141
(2003-인문29)

x에 대한 삼차방정식 $x^3-6x^2-n=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 n의 개수를 구하시오. [3점]

G142
(2005(6)-가형15)

세 실수 a, b, c에 대하여 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=b=c$이면, 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖는다.
ㄴ. $a=b\neq c$이고 $f(a)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $a<b<c$이고 $f(b)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

G143
(2005(6)-가형21)

함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

G144

(2005-가형13)

$a>1$일 때, 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 b라 하자. 다음은 두 수 a, b의 크기를 비교하는 과정이다.

> $f'(x)=$ (가) 이고 $a>1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 (나) 을 가진다.
> 그런데 $f(1)<0$이고 $f(b)=0$이므로 a (다) b이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$6(x+a)(x+1)$	극솟값	$>$
②	$6(x+a)(x+1)$	극솟값	$<$
③	$6(x-a)(x-1)$	극솟값	$>$
④	$6(x-a)(x-1)$	극댓값	$<$
⑤	$6(x-a)(x-1)$	극댓값	$>$

G145

(2005-가형24)

x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

G146

(2006(6)-가형10)

두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=-x(x^2-a^2)$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖는 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

G147

(2007(6)-가형4)

두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$, $g(x)=-x^2+2x-a$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

G148

(2008-가형6)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G149

(2011(6)-가형12)

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

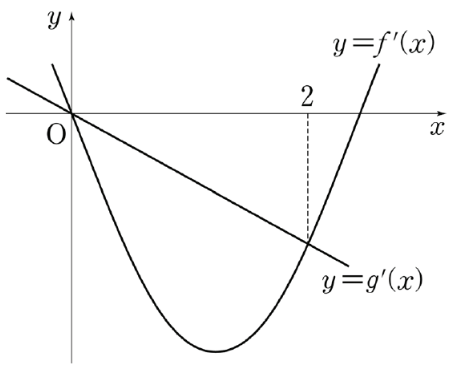
ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G150

(2012(6)-나형19)

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G151

(2012-나형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

G152

(2013(9)-나형21)

좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\ g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

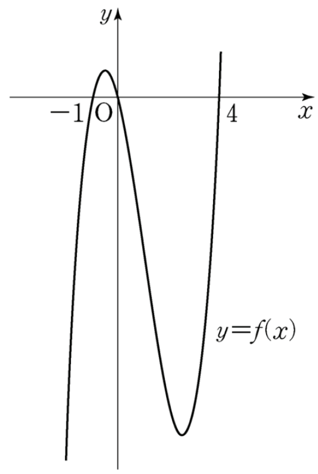
① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

G153

(2015-A형14)

함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$가 있다.



직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? [4점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

G154

(2016(6)-A형17)

두 함수

$f(x)=3x^3-x^2-3x,\ g(x)=x^3-4x^2+9x+a$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4점]

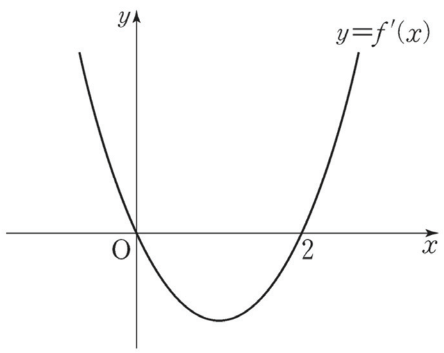
① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

G155

(2017(6)-나형21)

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G156

(2017(9)-나형20)

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G157

(2017－나형30)

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

G. 부등식에의 활용

G158

(2004(9)－인문21/자연21)

함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le 1)\\ x^3 & (x>1)\end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge k(x-1)+1$이 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

G159

(2006(6)－가형24)

두 함수 $f(x)=5x^3-10x^2+k$, $g(x)=5x^2+2$가 있다. $\{x\,|\,0<x<3\}$에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오. [4점]

해설집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

G. 다항함수의 미분법

1 ⑤	**2** ①	**3** ③	**4** ③	**5** ①
6 14	**7** 28	**8** ①	**9** ④	**10** 13
11 ②	**12** ③	**13** ⑤	**14** 21	**15** ③
16 ③	**17** 186	**18** 2	**19** ③	**20** ②
21 11	**22** ①	**23** ④	**24** ④	**25** ②
26 12	**27** -6	**28** 12	**29** ⑤	**30** ④
31 67	**32** ⑤	**33** ③	**34** 24	**35** ⑤
36 28	**37** 50	**38** 17	**39** 24	**40** ⑤
41 28	**42** 41	**43** 25	**44** 19	**45** 17
46 12	**47** ①	**48** 13	**49** 14	**50** 21
51 12	**52** ③	**53** 13	**54** 28	**55** 19
56 ④	**57** ③	**58** 21	**59** 10	**60** ①
61 ⑤	**62** 10	**63** 8	**64** ④	**65** 25
66 24	**67** 2	**68** ③	**69** ①	**70** 20
71 20	**72** ③	**73** ②	**74** 28	**75** 13
76 13	**77** ②	**78** 12	**79** 32	**80** ④
81 ①	**82** ②	**83** 21	**84** 12	**85** ⑤
86 97	**87** ②	**88** ④	**89** ⑤	**90** ①
91 13	**92** ④	**93** ①	**94** ③	**95** 3
96 ③	**97** ③	**98** ⑤	**99** 16	**100** 24
101 42	**102** 15	**103** 14	**104** 16	**105** 32
106 ⑤	**107** 14	**108** 25	**109** 22	**110** ②
111 ①	**112** 16	**113** ⑤	**114** ②	**115** ④
116 ⑤	**117** ②	**118** ⑤	**119** 12	**120** 147
121 ②	**122** ⑤	**123** ③	**124** ④	**125** ⑤
126 ③	**127** ④	**128** ⑤	**129** ②	**130** ①
131 527	**132** 13	**133** 11	**134** ①	**135** ①
136 ④	**137** ②	**138** 5	**139** 12	**140** ④
141 31	**142** ⑤	**143** 33	**144** ④	**145** 12
146 ②	**147** ②	**148** ③	**149** ⑤	**150** ③
151 ④	**152** ④	**153** ①	**154** ①	**155** ⑤
156 ⑤	**157** 65	**158** ⑤	**159** 22	**160** ③
161 ②	**162** ①	**163** 12	**164** ①	**165** ②

G001 | 답 ⑤

[풀이]

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f(a)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)+f(a)}{\frac{b}{n}}\times b$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f(a)}{\frac{b}{n}}\times b+\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a-\frac{b}{n}\right)-f(a)}{-\frac{b}{n}}\times b$$

$=bf'(a)+bf'(a)$

(∵ 미분계수의 정의)

$=2bf'(a)$

답 ⑤

G002 | 답 ①

[풀이]

미분계수의 정의에서

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2$$

$$-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\frac{g(h)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$$

$=2f'(a)-0=4$

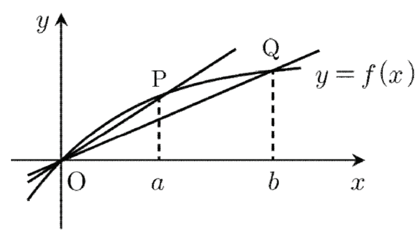
답 ①

G003 | 답 ③

[풀이]

두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 각각 P, Q라고 하자.

ㄱ. (거짓)



$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=(\text{직선 OP의 기울기})$$

$$\frac{f(b)}{b}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=(\text{직선 OQ의 기울기})$$

직선 OP의 기울기가 직선 OQ의 기울기보다 크므로

$\therefore\ \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

ㄴ. (거짓)

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=k_1k_2(x-a)(x-c)^2(x-e)$(단, $k_1k_2>0$)

$h(a)=h(c)=h(e)=0$ …㉠

문제에서 주어진 조건에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=p$, $x=q$에서 극솟값을 가지므로

$h'(p)=h'(q)=0$ …㉡

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로

$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)$

$=0\times g(b)+f(b)\times k_2>0$

$h'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$

$=f'(c)\times 0+0\times k_2=0$

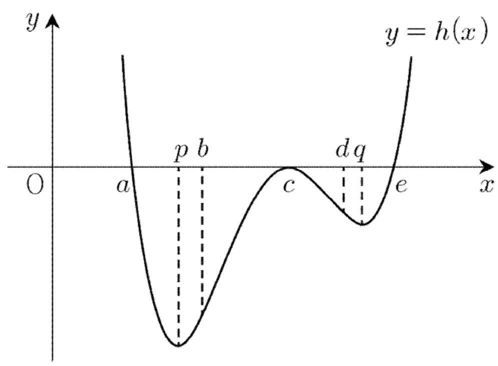
$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)$

$=0\times g(d)+f(d)\times k_2<0$

다시 쓰면

$h'(b)>0$, $h'(c)=0$, $h'(d)<0$ …㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프는



$\therefore$ $a<p<b$, $d<q<e$

답 ②

G115 | 답 ④

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$y'=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$y'=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

$x=0$의 좌우에서 y'의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 주어진 함수는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$x=2a$의 좌우에서 y'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 주어진 함수는 $x=2a$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0)=4a>0$이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(0,\ 4a)$에서 x축에 접할 수 없다.

$f(2a)=4a(1-a^2)=0$

a는 양수이므로

$\therefore$ $a=1$

답 ④

G116 | 답 ⑤

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}\times(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)$

$=1\times 0=0$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$ 즉, $f(a)=0$ …㉠

미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$이므로

$f'(a)=1$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ 0)$을 지나고, 이 점에서의 접선의 기울기는 1이다.

마찬가지의 방법으로

$f(b)=1$, $f'(b)=2$ …㉢

㉢에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(b,\ 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선의 기울기는 2이다.

이상에서 $f(x)$의 그래프는 ⑤와 같다.

답 ⑤

G117 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

좌변과 우변을 각각 구하면

$f(-x)=-ax^3+bx^2-cx+d$

$-f(x)=-ax^3-bx^2-cx-d$

이제 다음과 같은 항등식을 얻는다.

$bx^2+d=0$ 계수비교법에 의하여 $b=d=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^3+cx(a\neq 0)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3ax^2+c$

a와 c의 부호가 같으면 방정식 $f'(x)=0$은 실근을 갖지 않으므로 $ac<0$이다.

$f'(x)=0$에서

$x=\sqrt{-\frac{c}{3a}}$ 또는 $x=-\sqrt{-\frac{c}{3a}}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$\sqrt{-\frac{c}{3a}}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$c=-3a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^3-3ax\,(a\neq 0)$

$f(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 그래프와 x축과의 교점은

$(-\sqrt{3},\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(\sqrt{3},\ 0)$

따라서 구하는 값은 $\sqrt{3}$ 이다.

답 ②

G118 | 답 ⑤

[풀이]

$f(x)$의 도함수는

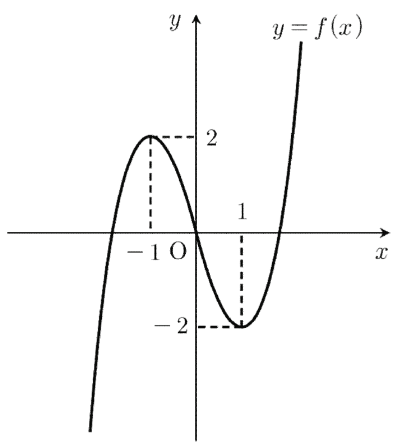
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

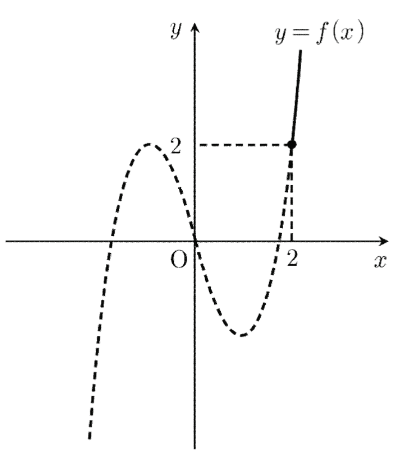
함수 $f(x)$의 그래프는



ㄱ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. (참)

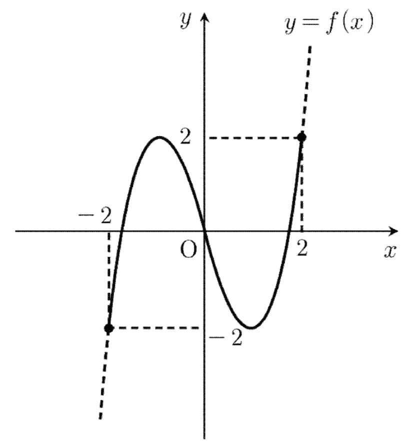


구간 $[2,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore\ f(x)\geq f(2)=2$

ㄷ. (참)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 최대최소의 정리에 의하여 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.



구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $2,\ -2$이다. $\therefore\ |f(x)|\leq 2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

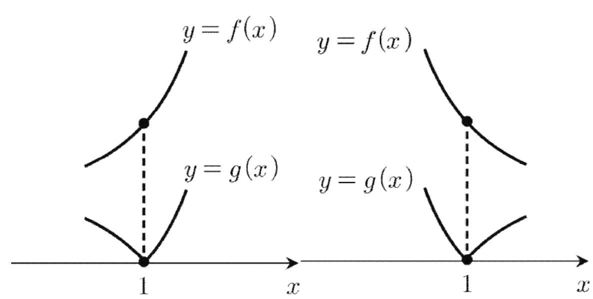
G119 | 답 12

[풀이]

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수라고 하자.

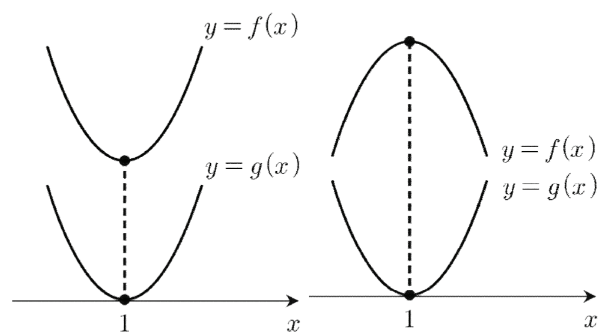
$g(x)=|f(x)-f(1)|$으로 두자.

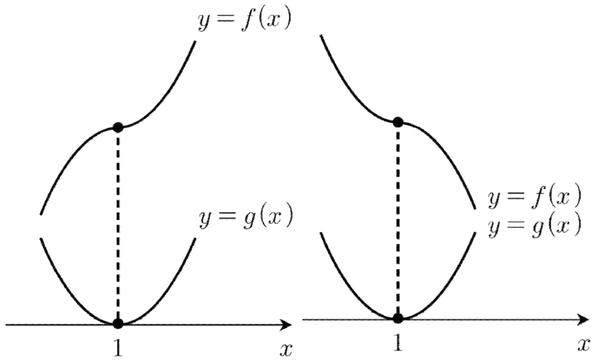
(1) $f'(1)>0$ 또는 $f'(1)<0$인 경우



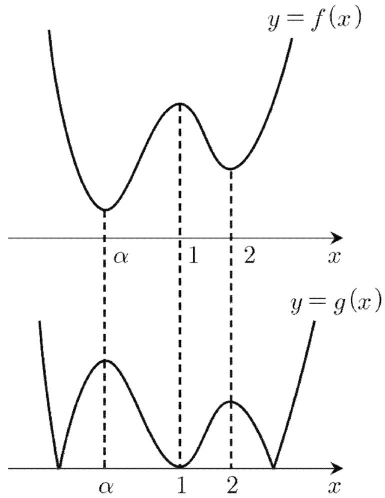
위의 그림에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2) $f'(1)=0$인 경우

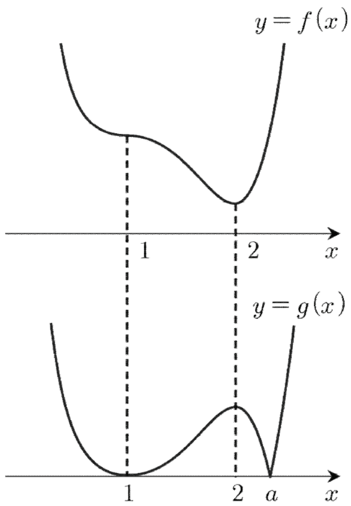




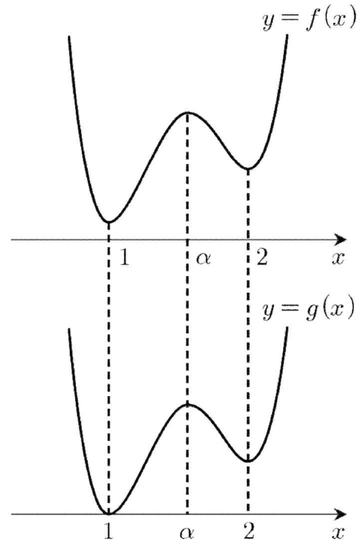
위의 그림에서 $f'(1)=0$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
(1), (2)에서 $f'(1)=0$이면 조건 (나)가 성립한다.
조건 (가)에서 $f'(2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=k(x-1)(x-2)(x-\alpha)$(단, $k>0$)
○ $\alpha<1$인 경우



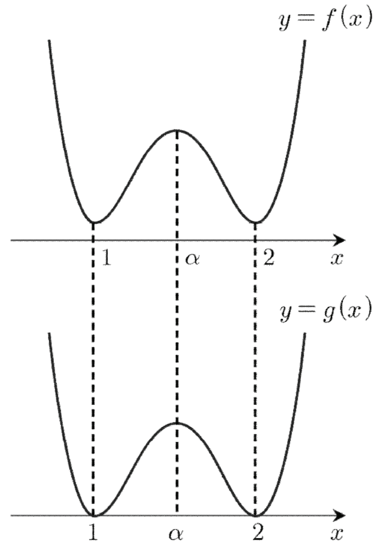
위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이다.
○ $\alpha=1$인 경우



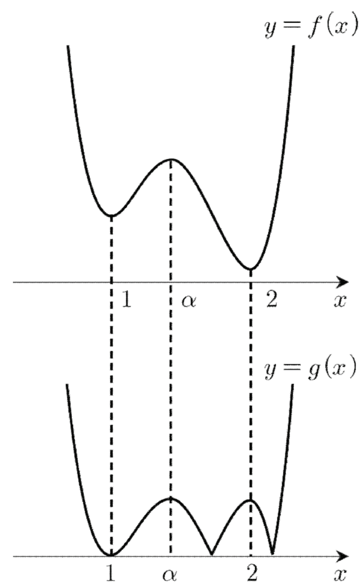
위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 1이고, 조건 (나)를 만족시킨다.
○ $1<\alpha<2$인 경우



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

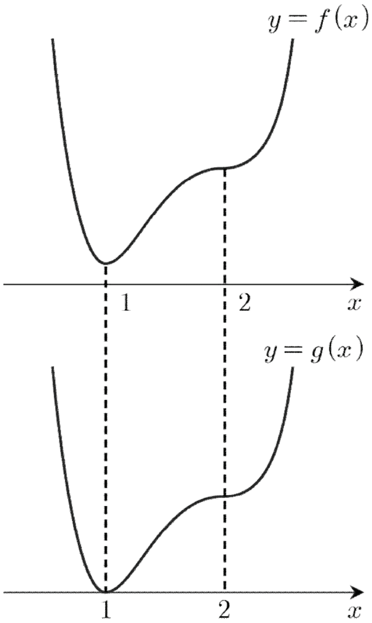


위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

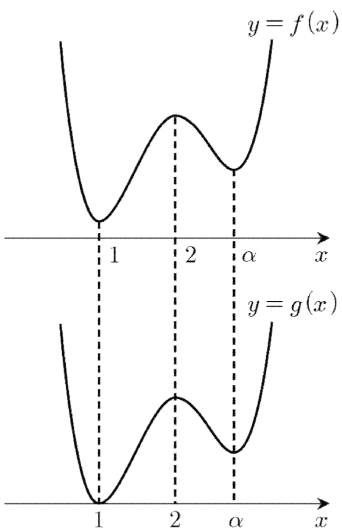


위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이

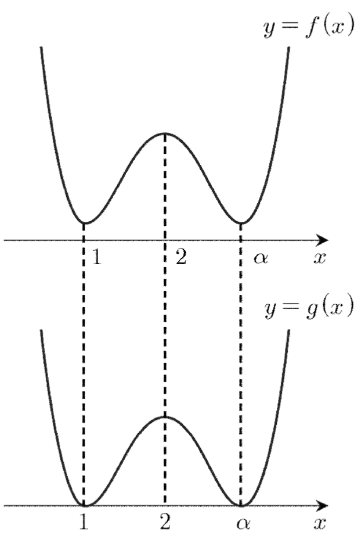
다. ○ $\alpha=2$인 경우



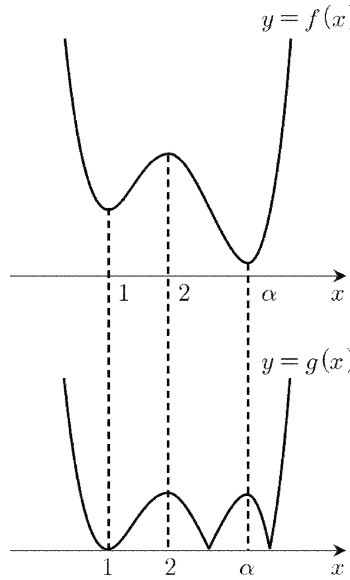
위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다. ○ $\alpha>2$인 경우



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다.



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다.



위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이 다.

이상에서 $\alpha=1$이다.

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=k(x-1)^2(x-2)$

$f'(5)=48k$, $f'(3)=4k$이므로

$\therefore \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=12$

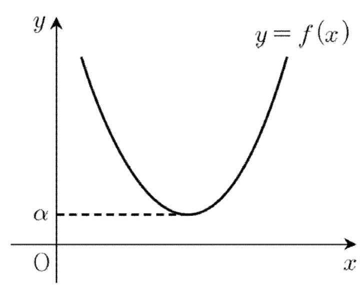
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 같은 결과를 얻는다.

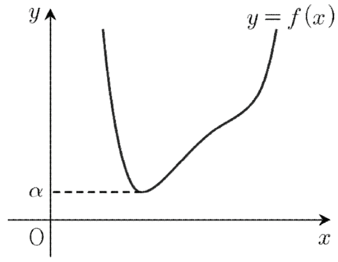
답 12

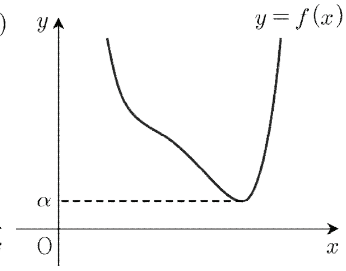
G120 | 답 147

[풀이]

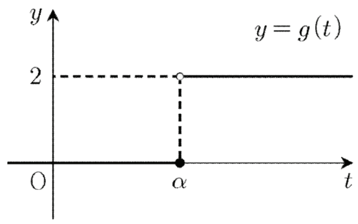
○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은







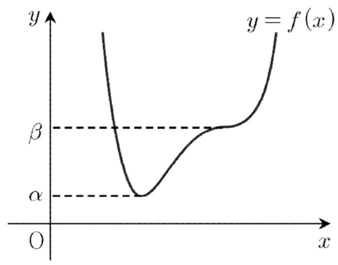
함수 $g(t)$의 그래프는

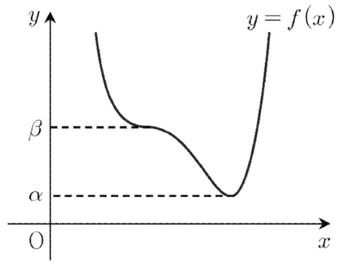


함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 1이다.

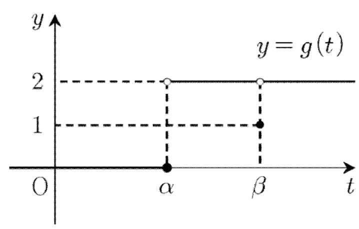
○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은





함수 $g(t)$의 그래프는

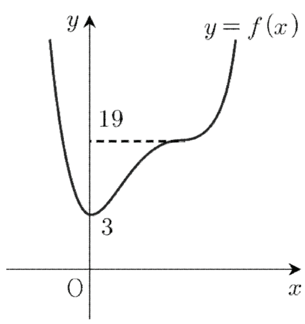


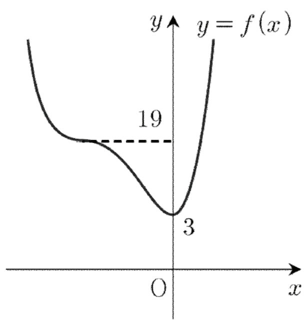
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

주어진 조건에 의하여

$\alpha=3$, $\beta=19$

$f(0)=3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는





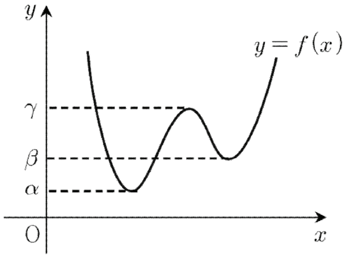
위의 그림에서

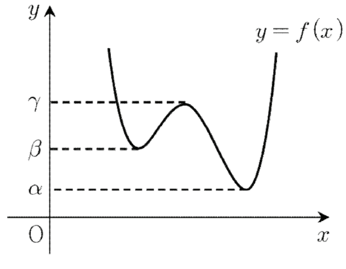
$f'(3) \ge 0$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

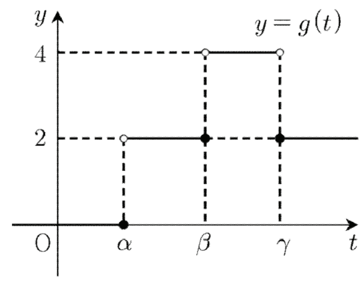
○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



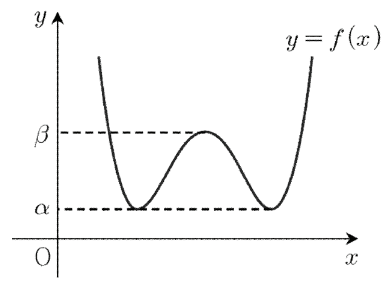


함수 $g(t)$의 그래프는

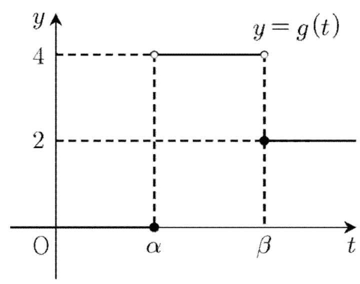


함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

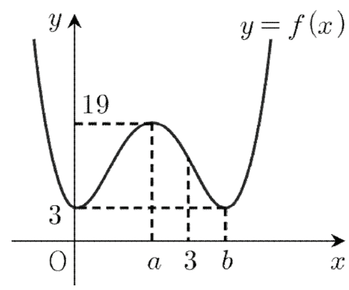


함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

$f(0)=3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는



(단, $a<3<b$)

함수 $f(x)$의 도함수를

$f'(x)=4x(x-a)(x-b)$

함수 $f(x)-3$의 방정식을

$f(x)-3=x^2(x-b)^2$ 즉, $f(x)=x^2(x-b)^2+3$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x(x-b)^2+2x^2(x-b)$

이므로

$f'(a)=2a(a-b)^2+2a^2(a-b)=0$ 즉, $b=2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2(x-2a)^2+3$

$f(a)=a^4+3=19$ 즉, $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$

$\therefore$ $f(-2)=147$

답 147

[참고] +미적분1(부정적분)

부정적분을 이용하여 함수 $f(x)$의 방정식을 유도할 수도 있다.

함수 $f(x)$의 도함수를

$f'(x)=4x(x-a)(x-b)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(a+b)x^3+2abx^2+3$

$f(b)=3$에서 $b=2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-4ax^3+4a^2x^2+3$

$f(a)=19$에서 $a=2(a>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$

$\therefore$ $f(-2)=147$

답 147

G121 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 α라고 하자.

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하면

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수의 연속의 정의에 의하여

$f(\alpha)=m\alpha$에서

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ …㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x-9$

함수의 미분가능성의 정의에 의하여

$f'(\alpha)=m$에서

$3\alpha^2-6\alpha-9=m$ …㉡

㉠$-\alpha\times$㉡을 하면

$2\alpha^3-3\alpha^2+1=0$

인수분해하면

$(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

풀면

$\alpha=-\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=1$

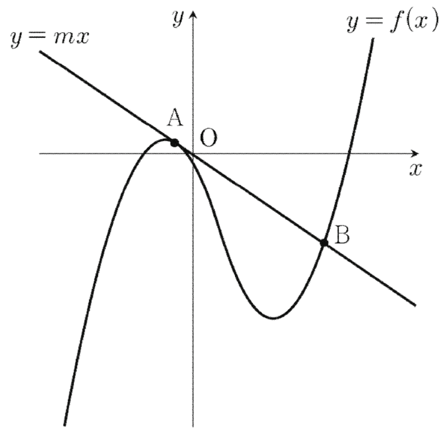
(1) $\alpha=-\frac{1}{2}$인 경우

$\alpha=-\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $m=-\frac{21}{4}$

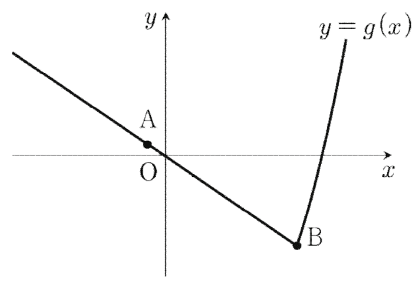
이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2(\alpha-4)=0$ 풀면 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=4$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 개수는 2이다. 두 교점을 각각 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{21}{8}\right)$, $\mathrm{B}(4,\ -21)$라고 하자.



함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 점 B에서 미분가능하지 않다.

(2) $\alpha=1$인 경우

$\alpha=1$을 ㉡에 대입하면 $m=-12$

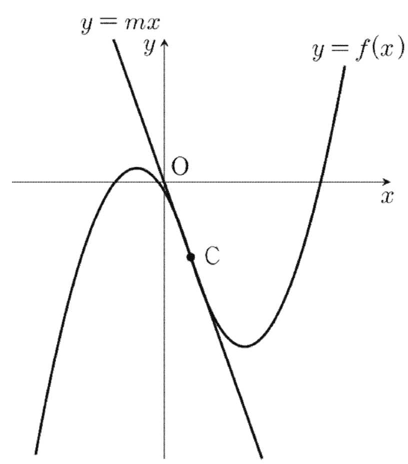
이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$(\alpha-1)^3=0$

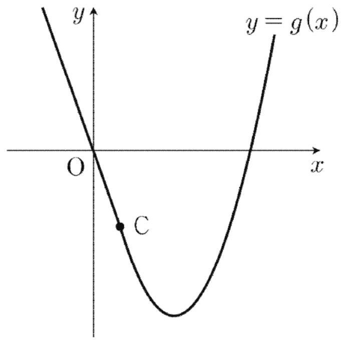
풀면

$\alpha=1$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 개수는 1이다. 교점을 $\mathrm{C}(1,\ -12)$라고 하자.



함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (1), (2)에서 구하는 m의 값은 -12이다.
답 ②

G122 | 답 ⑤

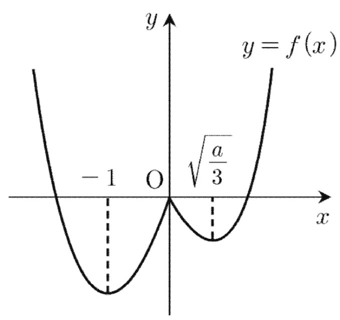
[풀이]
두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\begin{cases}3a-3ax^2 & (x<0)\\ 3x^2-a & (x>0)\end{cases}$

(1) $a>0$인 경우

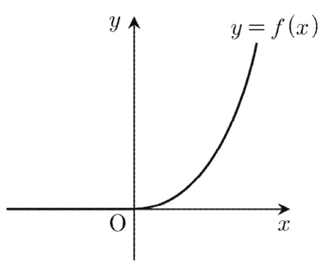
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	╳	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	0	↘	극소	↗



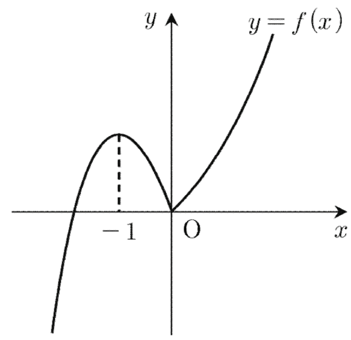
함수 $f(x)$는 0을 극댓값으로 갖는다.
(2) $a=0$인 경우

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	0	$+$
$f(x)$	0	0	↗



함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.
(3) $a<0$인 경우

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	╳	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	0	↗



함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
주어진 조건에서
$f(-1)=-2a=5$
풀면
$a=-\dfrac{5}{2}$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{15}{2}x+\dfrac{5}{2}x^3 & (x<0)\\ x^3+\dfrac{5}{2}x & (x\ge 0)\end{cases}$

$\therefore\ f(2)=13$
답 ⑤

G123 | 답 ③

[풀이]
점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$g(t)=\dfrac{|t-t^3+6|}{\sqrt{2}}$

$t^3-t-6=(t-2)(t^2+2t+3)$에서
$t^2+2t+3=(t+1)^2+2\ge 2$이므로
$t\ge 2$이면 $t^3-t-6\ge 0$
$t<2$이면 $t^3-t-6<0$
함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}} & (t\ge 2)\\ \dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}} & (t<2)\end{cases}$$

구간 $[2,\ \infty)$에서 함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$y'=\dfrac{3t^2-1}{\sqrt{2}}$

구간 $[2,\ \infty)$에서 $y' > 0$이므로

함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$은 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가한다.

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$$y'=\frac{-3t^2+1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$y'=0$에서

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

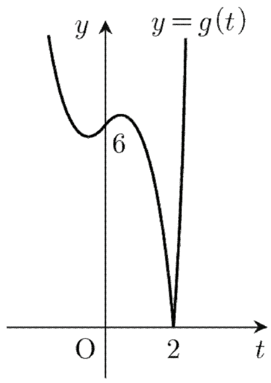
$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는



ㄱ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

ㄷ. (거짓)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G124 | 답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

$f(1)=1+a+b=2$ 즉, $a+b=1$ …㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

$x=0$을 대입하면

$y=-2t^3-at^2$

함수 $g(t)$의 방정식은 $g(t)=\left|-2t^3-at^2\right|$

(1) $a>0$인 경우

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

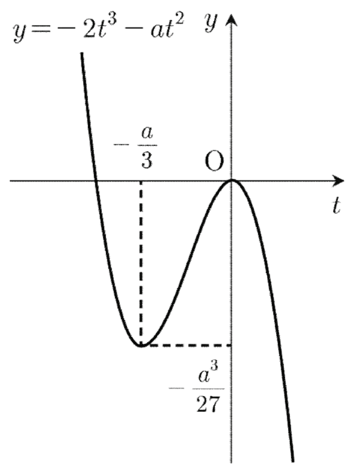
도함수는

$y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

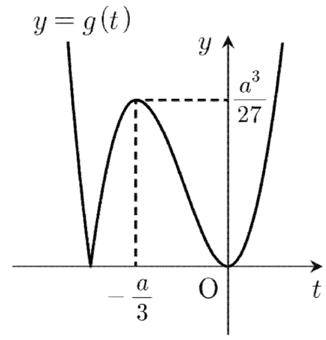
$y'=0$에서 $t=-\dfrac{a}{3}$ 또는 $t=0$

t	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\dfrac{a^3}{27}$	↗	0	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

(2) $a=0$인 경우

함수 $y=-2t^3$의 그래프를 그리자.

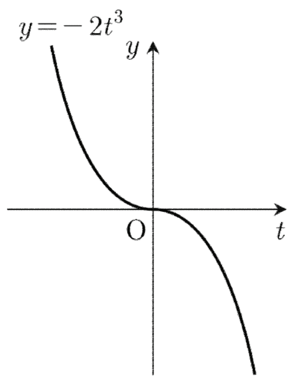
도함수는

$y'=-6t^2$

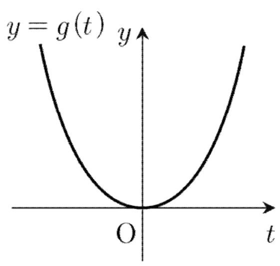
$y'=0$에서 $t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	0	↘

함수 $y=-2t^3$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(3) $a<0$인 경우

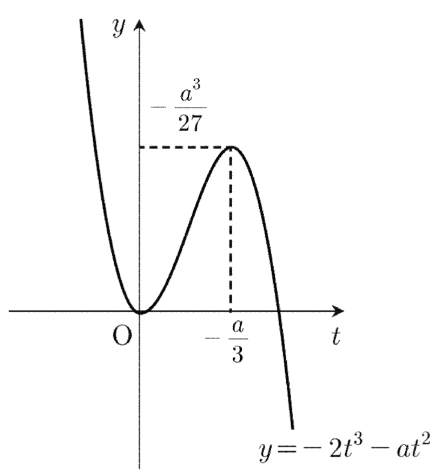
함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

도함수는 $y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

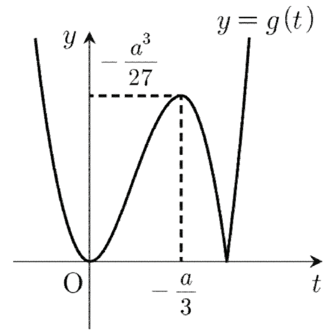
$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\dfrac{a}{3}$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$-\dfrac{a^3}{27}$	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

조건 (나)를 만족시키는 경우는 (2)이다.

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3+x$

$\therefore$ $f(3)=30$

답 ④

G125 | 답 ⑤

[풀이1]

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(0)=c=b=f'(0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$으로 두면

$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

조건 (다)에 의하여

$x\ge-1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$ $\cdots(*)$

만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 증가하면

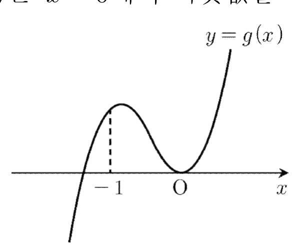
$x=0$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로 $(*)$가 성립하지 않는다.

만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 감소하면

$x=0$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로 $(*)$가 성립하지 않는다.

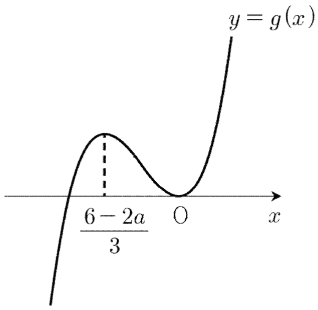
만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 $(*)$가 성립하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.



함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$
$g'(0)=b-2a=0$에서 $b=2a$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=x^3+(a-3)x^2$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=3x^2+2(a-3)x$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{6-2a}{3}$

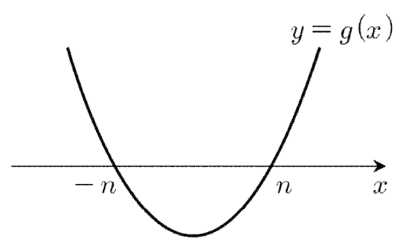


함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로
$\dfrac{6-2a}{3}<0$ 즉, $a>3$
조건 (다)에서
$g(-1)=a-4\geq 0$ 즉, $a\geq 4$
a의 범위는
$a\geq 4$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$
$\therefore\ f(2)=10a+8\geq 48$
답 ⑤

[풀이2]
조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (나)에서
$f(0)=c=b=f'(0)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$g(x)=f(x)-f'(x)$으로 두면
$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$
$=x\{x^2+(a-3)x+b-2a\}$
조건 (다)에서
$x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.
$h(x)=x^2+(a-3)x+b-2a$로 두면
$g(x)=xh(x)$
$-1\leq x<0$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq 0$이기 위해서는
$-1\leq x<0$인 모든 실수 x에 대하여
$h(x)\leq 0$이어야 한다.
$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이기 위해서는
$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이어야 한다.
그런데 다항함수 $h(x)$는 연속함수이므로
사이값 정리에 의하여
$h(0)=0$
$h(0)=b-2a=0$에서 $b=2a$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$
$x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq 0$이기 위해서는
$x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여
$x+a-3\geq 0$이어야 한다.
a의 범위는 $a\geq 4$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$
$\therefore\ f(2)=10a+8\geq 48$
답 ⑤

G126 ㅣ답 ③

[풀이]
조건 (가)에서 인수정리에 의하여
다항식 $f(x)$는 $x-n$을 인수로 갖는다.
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=(x-n)(x^2+ax+b)$
$g(x)=x^2+ax+b$로 두면
조건 (나)에 의하여
$(x+n)(x-n)g(x)\geq 0$
$x<-n$ 또는 $x>n$일 때,
$(x+n)(x-n)>0$이므로 $g(x)\geq 0$
$-n<x<n$일 때,
$(x+n)(x-n)<0$이므로 $g(x)\leq 0$
$x=-n$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
사이값 정리에 의하여
$g(-n)=0$
$x=n$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로
사이값 정리에 의하여
$g(n)=0$
함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+n)(x-n)$

함수 $f(x)$의 방정식은

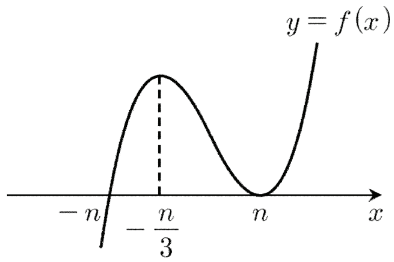
$f(x)=(x+n)(x-n)^2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-n)(3x+n)$

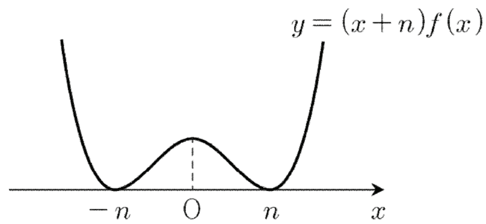
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{n}{3}$ 또는 $x=n$

$x=-\dfrac{n}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{n}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



$a_n=f\left(-\dfrac{n}{3}\right)=\dfrac{32}{27}n^3$

a_n이 자연수가 되는 n의 최솟값은 3이다.



답 ③

G127 | 답 ④

[풀이]

점 A의 좌표는

A$(t,\ t^4-4t^3+10t-30)$

점 B의 좌표는

B$(t,\ 2t+2)$

함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=|$(점 A의 y좌표)$-$(점 B의 y좌표)$|$

$=|t^4-4t^3+8t-32|$

$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$로 두자.

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=4t^3-12t^2+8=4(t-1)(t^2-2t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

$t=1$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 -27이다.

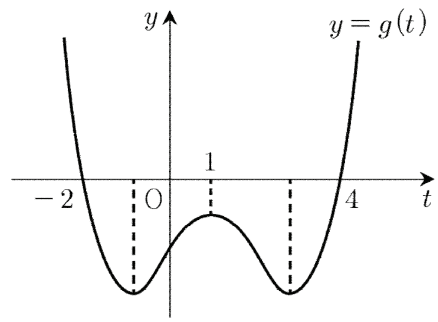
$t=1-\sqrt{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1-\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 -36이다.

$t=1+\sqrt{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=1+\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 -36이다.

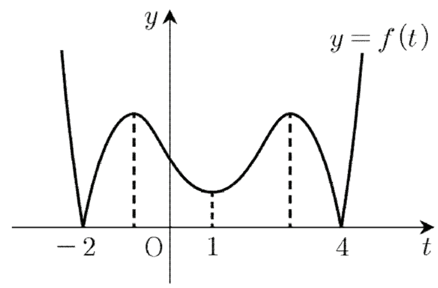
$g(t)=(t-4)(t+2)(t^2-2t+4)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=4$

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $f(t)$의 그래프는



함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=4$에서 미분가능하지 않다.

함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=1$, $t=4$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(t)$는 $t=1-\sqrt{3}$, $t=1+\sqrt{3}$에서 극댓값을 갖는다.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}<0$인 경우

$x=t$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로

$x=t$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우이다.

부등식의 해집합을 A라고 하면

$A=\{-2,\ 1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4\}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=0$인 경우

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=0$이면

$t=1-\sqrt{3}$ 또는 $t=1$ 또는 $t=1+\sqrt{3}$

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=0$이면

$t=1-\sqrt{3}$ 또는 $t=1$ 또는 $t=1+\sqrt{3}$

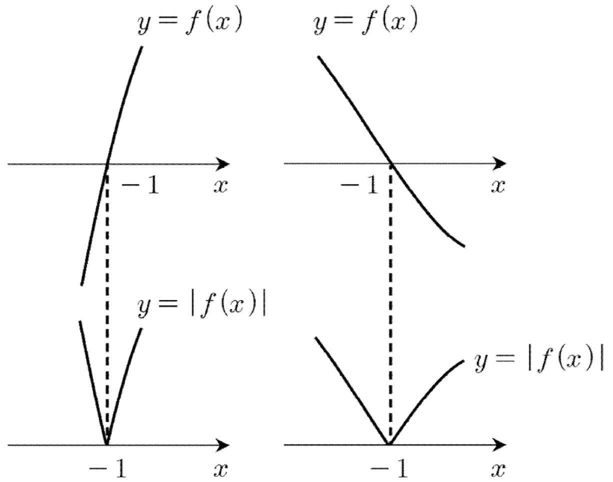
방정식의 해집합을 B라고 하면

$B=\{1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3}\}$
(1), (2)에서 문제에서 주어진 부등식의 해집합은
$A\cup B=\{-2,\ 1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4\}$
따라서 구하는 값은 5이다.
답 ④

G128 ㅣ답 ⑤

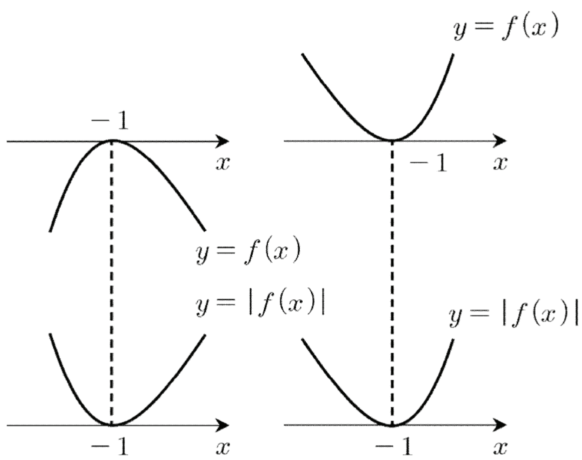
[풀이]
$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

○ $f(x)$가 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



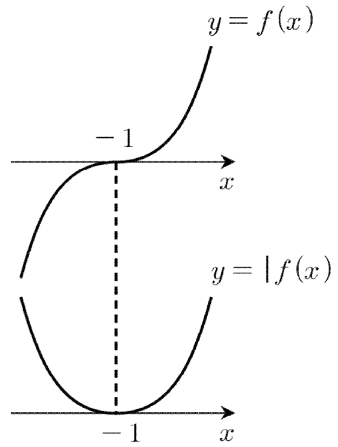
위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

○ $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 갖고 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



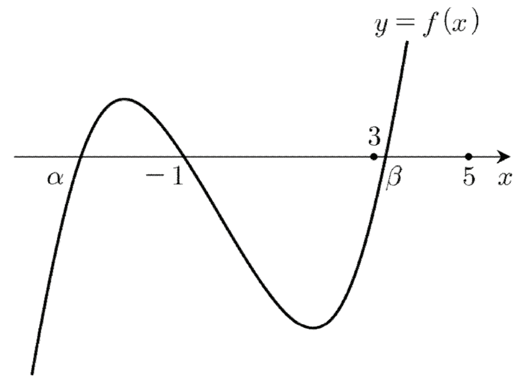
위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

○ $f(x)$가 $(x+1)^3$을 인수로 갖는 경우

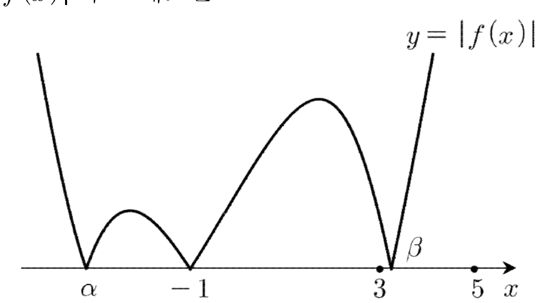


위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.
따라서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 가질 수 없다.
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)\,(a>0)$
조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖거나, 중근을 가져야 한다.

○ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
이 두 실근을 각각 α, β라고 하자.
(단, $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq-1$, $3\leq\beta\leq5$)
$\alpha<-1<\beta$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는

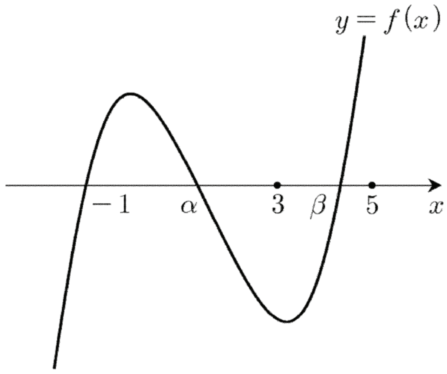


함수 $|f(x)|$의 그래프는

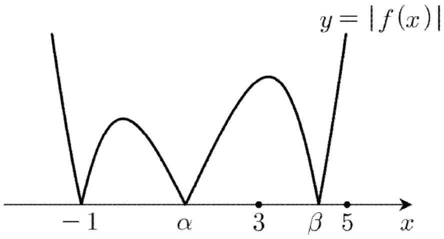


위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
$-1<\alpha<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



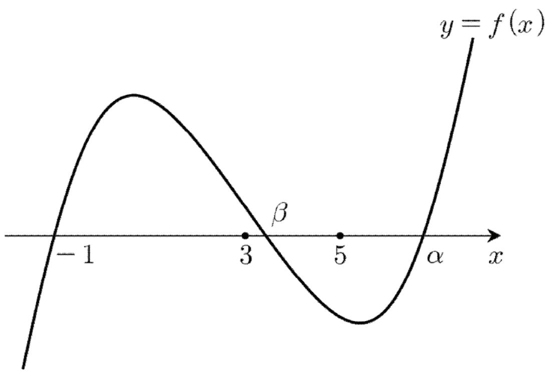
함수 $|f(x)|$의 그래프는



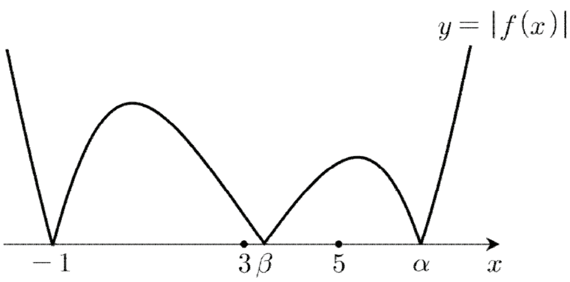
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\beta<\alpha$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는

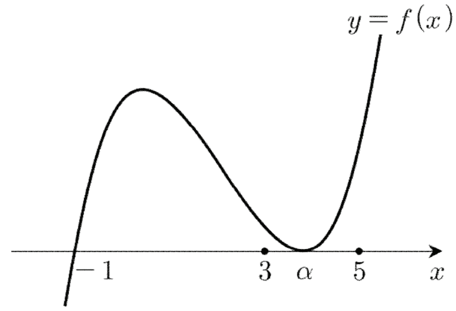


위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$, $x=\beta$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

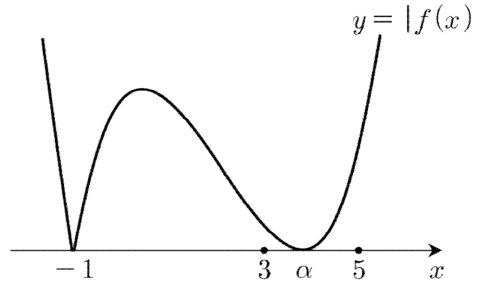
○ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는 경우

중근을 α라고 하자. (단, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

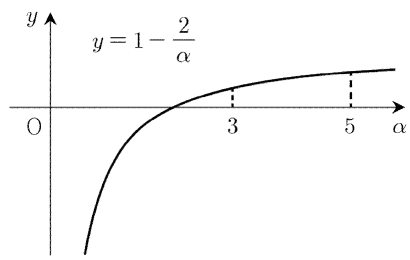
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3, 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

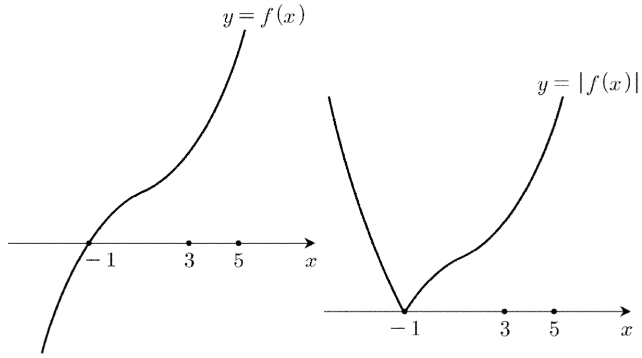
답 ⑤

[풀이2]

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

○ 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

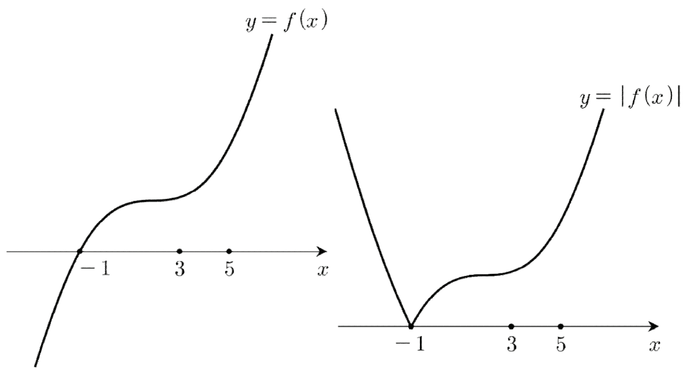
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

○ 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우

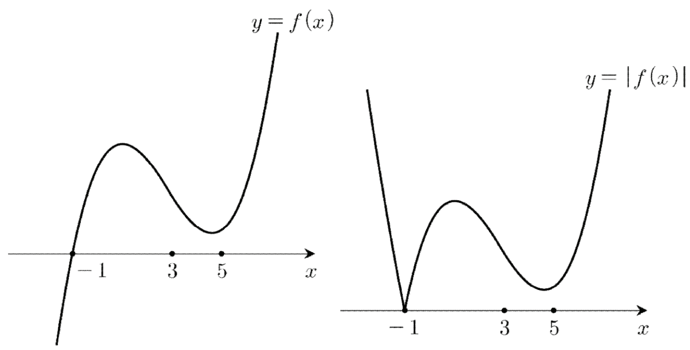
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

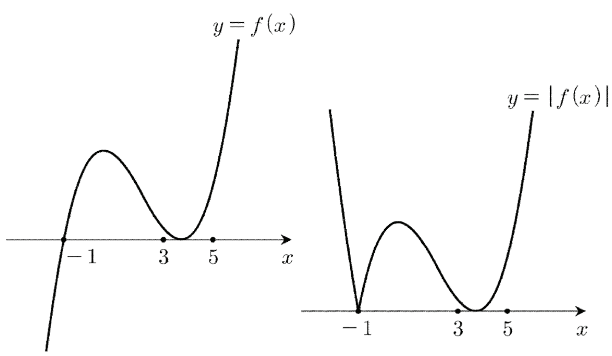
○ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



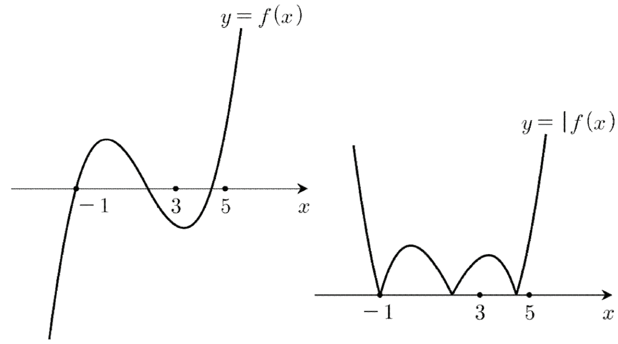
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



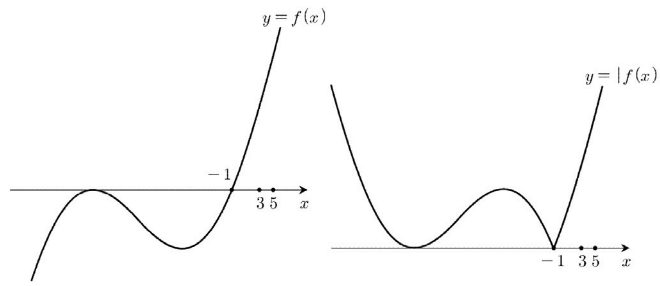
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



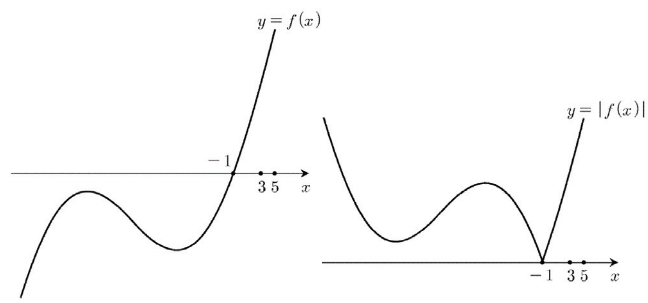
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



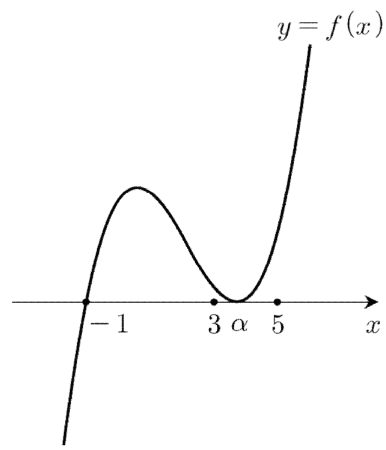
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이상에서 가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 -1, α라고 하자.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$

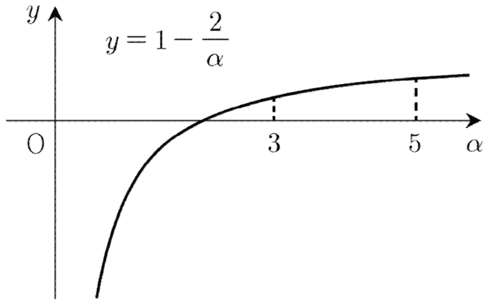
(단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = a(x-\alpha)^2 + 2a(x+1)(x-\alpha)$

이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{a\alpha^2 - 2a\alpha}{a\alpha^2} = 1 - \frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha = 3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m = \frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha = 5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M = \frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm = \frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

답 ⑤

G129 | 답 ②

[풀이]

$h(x) = |x(x-2)(x-3)|$으로 두자.

$$h(x) = \begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0 \le x \le 2,\ x \ge 3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x < 0,\ 2 < x < 3) \end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=0$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ \infty)$에서의

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x) = \begin{cases} (x-2)(x-3) + x(x-3) + x(x-2) \\ \qquad (0 < x < 2,\ x > 3) \\ -(x-2)(x-3) - x(x-3) - x(x-2) \\ \qquad (x < 0,\ 2 < x < 3) \end{cases}$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은 다음의 3가지가 가능하다.

$f(x) = ax^2(x-2)(x-3)$ … (경우1)

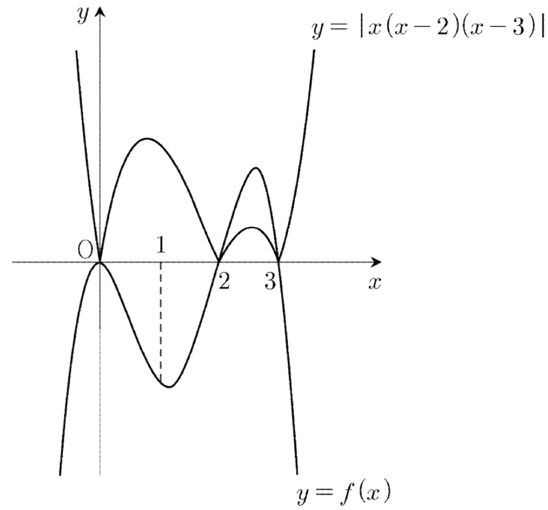
$f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ … (경우2)

$f(x) = ax(x-2)(x-3)^2$ … (경우3)

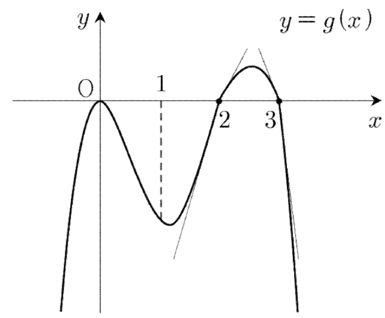
(단, $a < 0$)

○ 경우1

함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자.

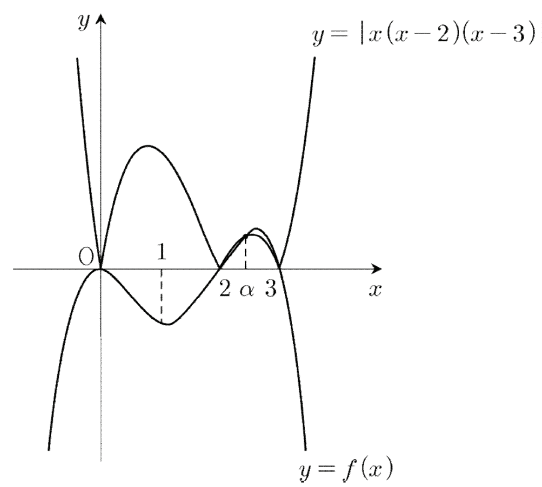


함수 $g(x)$의 그래프는

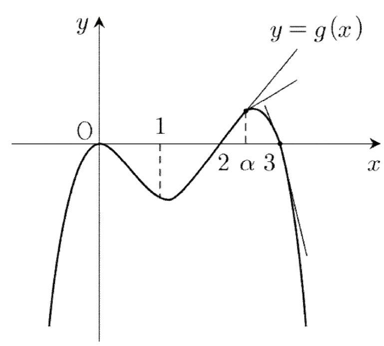


함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자.



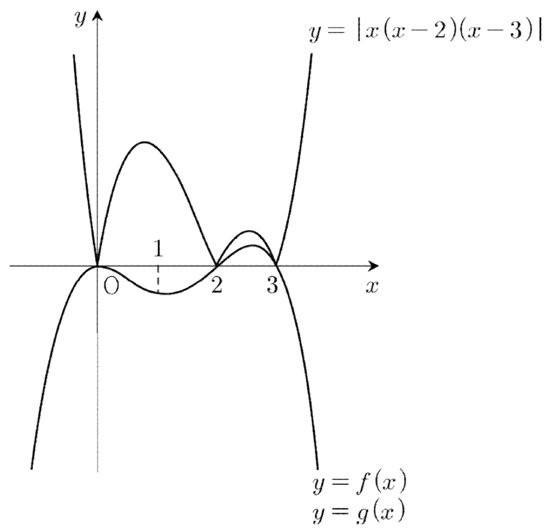
함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구간 $[2,\ 3]$에서

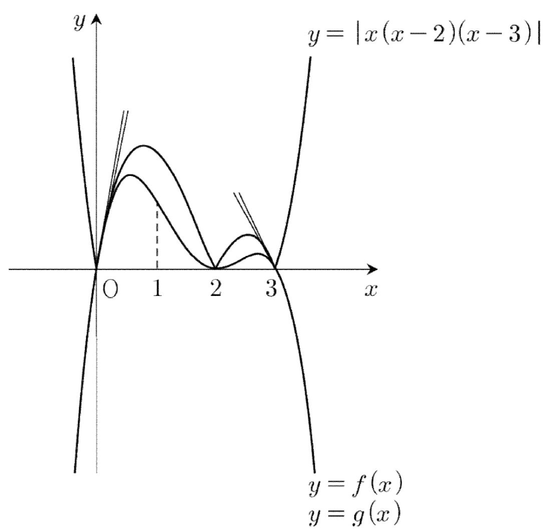
$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$
이어야 한다.



조건 (나)를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 위와 같다. 이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같고 $f(1)<0$이다.

○ 경우2

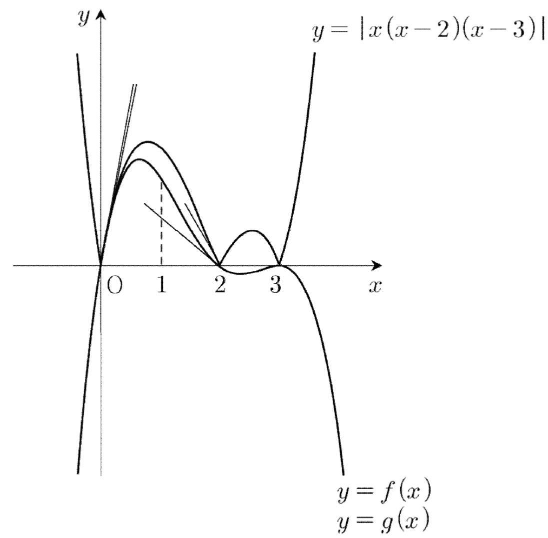
경우1과 마찬가지로 구간 $[0,\ 3]$에서
$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$
이어야 한다.



조건 (나)를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 위와 같다. 이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-2)^2(x-3)+2ax(x-2)(x-3)$
$+ax(x-2)^2$
(함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 우미분계수)
$=6 \ge -12a = f'(0)$에서 $a \ge -\dfrac{1}{2}$
(함수 $h(x)$의 $x=3$에서의 좌미분계수)
$=-3 \le 3a = f'(3)$에서 $a \ge -1$
a의 범위는 $a \ge -\dfrac{1}{2}$이므로
$f(1)=-2a \le 1$

○ 경우3

경우1과 마찬가지로 구간 $[0,\ 2]$에서
$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$
이어야 한다.



조건 (나)를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 위와 같다. 이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-2)(x-3)^2+ax(x-3)^2$
$+2ax(x-2)(x-3)$
(함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 우미분계수)
$=6 \ge -18a = f'(0)$에서 $a \ge -\dfrac{1}{3}$
(함수 $h(x)$의 $x=2$에서의 좌미분계수)
$=-2 \le 2a = f'(2)$에서 $a \ge -1$
a의 범위는 $a \ge -\dfrac{1}{3}$이므로
$f(1)=-4a \le \dfrac{4}{3}$
이상에서 경우 3일 때, $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.
답 ②

G130 | 답 ①

[풀이]
직원뿔 A의 높이를 h_1이라고 하자.
직원뿔 A에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라고 하자.
두 닮은 삼각형의 비례관계에 의하여
$h_1 : R_1 = (h_1-h) : r$ 정리하면 $h=\left(1-\dfrac{r}{R_1}\right)h_1$
원기둥의 부피를 V라고 하면
$V=\pi h_1 r^2 - \pi \dfrac{h_1}{R_1} r^3$ (단, $0<r<R_1$)

함수 V의 도함수는

$V' = 2\pi h_1 r - 3\pi \dfrac{h_1}{R_1} r^2$

$V' = 0$에서 $r = \dfrac{2}{3} R_1$

$r = \dfrac{2}{3} R_1$의 좌우에서 V'의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 V는 $r = \dfrac{2}{3} R_1$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

$r_1 = \dfrac{2}{3} R_1$ …㉠

마찬가지의 방법으로

$r_2 = \dfrac{2}{3} R_2$ …㉡

㉠과 ㉡에서

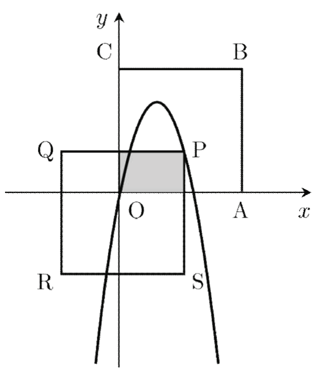
$\dfrac{r_1}{R_1} = \dfrac{r_2}{R_2} = \dfrac{2}{3}$ 정리하면

$\therefore\ r_1 R_2 = r_2 R_1$

답 ①

G131 | 답 527

[풀이]



점 P의 x좌표를 t라고 하자.

$0 < t < 5$일 때, 주어진 두 정사각형은 서로 겹친다.

이 겹치는 부분의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

$S(t) = (\text{점 P의 } x\text{좌표}) \times (\text{점 P의 } y\text{좌표}) = -t^3 + 5t^2$

$S(t)$의 도함수는

$S'(t) = -3t^2 + 10t = -3t\left(t - \dfrac{10}{3}\right)$

$S'(t) = 0$에서 $t = \dfrac{10}{3}\ (\because t > 0)$

$t = \dfrac{10}{3}$의 좌우에서 $S'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $S(t)$는 $t = \dfrac{10}{3}$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

$S(t) \geq S\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{500}{27}$ $\therefore\ p + q = 527$

답 527

G132 | 답 13

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

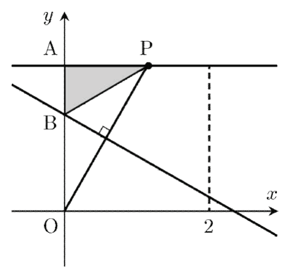
$x = -1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 극댓값 13을 갖는다.

$f(-2) = 6$, $f(0) = 8$이므로 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 13이다.

답 13

G133 | 답 11

[풀이]



직선 OP의 기울기는 $\dfrac{2}{t}$

선분 OP의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2},\ 1\right)$

선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$y = -\dfrac{t}{2}\left(x - \dfrac{t}{2}\right) + 1$

점 B의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{t^2}{4} + 1\right)$

$\overline{AB} = 1 - \dfrac{t^2}{4}$, $\overline{AP} = t$이므로

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$f(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^3}{8}\ (0 < t < 2)$

$f(t)$의 도함수는

$f'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} t^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} t\right)\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

$f'(t) = 0$에서 $t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호는 양에서 음으로 변하므로 $t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$에서 함수 $f(t)$는 극댓값(최댓값)을 갖는다.

$f(t) \geq f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2}{9}\sqrt{3}$

$\therefore\ a + b = 11$

답 11

G134 | 답 ①

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-12x(x-a)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a(>0)$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

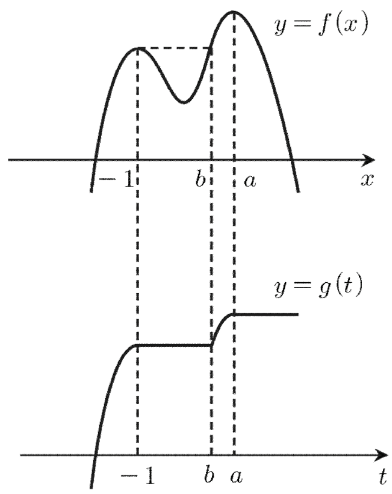
(1) $f(-1)<f(a)$인 경우

구간 $[0,\ a]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고

$f(0)<f(-1)<f(a)$이므로 사이값 정리에 의하여

$f(b)=f(-1)$을 만족시키는 실수 b가 구간 $(0,\ a)$에 존재한다.

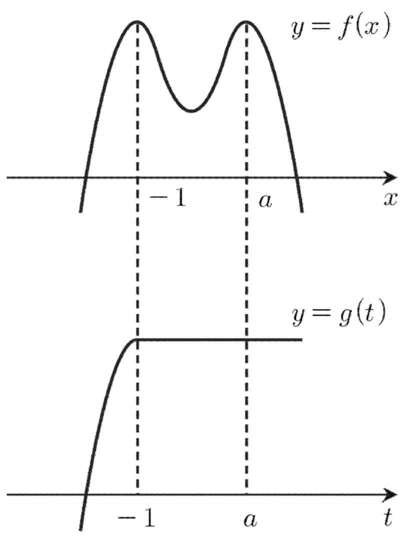
두 함수 $f(x)$, $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 $t=b$에서 미분가능하지 않다.

(2) $f(-1)=f(a)$인 경우

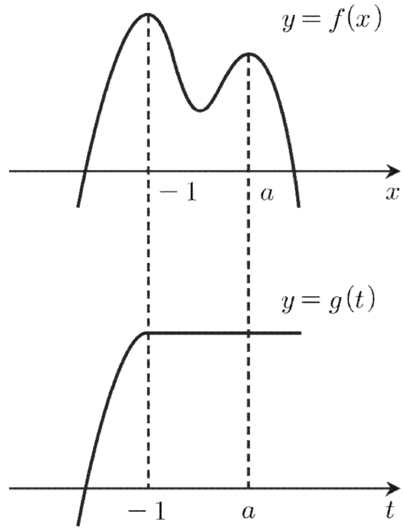
두 함수 $f(x)$, $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 모든 실수 t에 대하여 미분가능하다.

(3) $f(-1)>f(a)$인 경우

두 함수 $f(x)$, $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 모든 실수 t에 대하여 미분가능하다.

(1), (2), (3)에서 $f(-1)\ge f(a)$이면

함수 $g(t)$는 모든 실수 t에 대하여 미분가능하다.

$f(-1)=2a+1\ge a^4+2a^3=f(a)$

정리하면

$a^4+2a^3-2a-1\le 0$ 인수분해하면

$(a-1)(a+1)^3\le 0$ 풀면 $0<a\le 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

답 ①

G135 | 답 ①

[풀이]

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라고 하자.

꼭짓점 $\mathrm{E}\left(t-\frac{1}{2},\ t^2+\frac{1}{2}\right)$가 정사각형 ABCD의 내부에 있으면 주어진 두 정사각형의 공통부분은 직사각형이 된다.

점 E의 x좌표에 대하여

$-\frac{1}{2}<t-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$에서 $0<t<1$

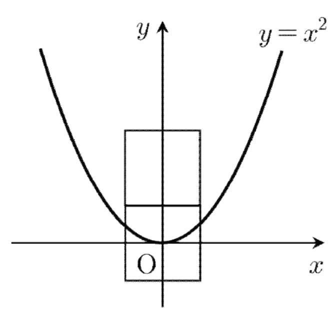
점 E의 y좌표에 대하여

$\frac{1}{2}<t^2+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$에서 $-1<t<1$

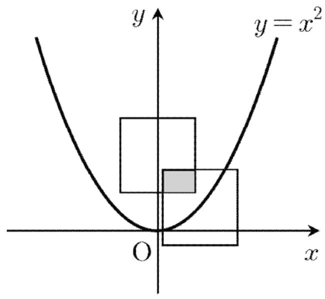
연립부등식을 풀면

$0<t<1$ $\cdots$㉠

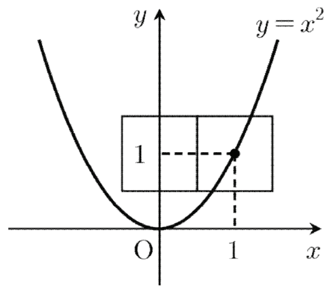
$t=0$인 경우



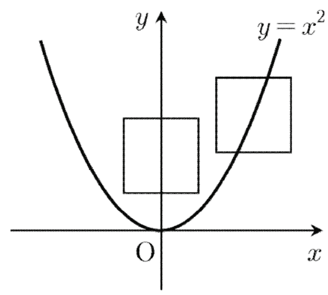
위의 그림처럼 두 정사각형은 한 변에서 만난다.
$0 < t < 1$인 경우



위의 그림처럼 두 정사각형의 공통부분은 직사각형이 된다.
$t=1$인 경우



위의 그림처럼 두 정사각형은 한 변에서 만난다.
$t > 1$인 경우



위의 그림처럼 두 정사각형은 만나지 않는다.

한편 꼭짓점 $\mathrm{H}\left(t+\frac{1}{2},\ t^2+\frac{1}{2}\right)$가 정사각형 ABCD의 내부에 있으면 주어진 두 정사각형의 공통부분은 직사각형이 된다.

마찬가지의 방법으로 t의 범위를 구하면

$-1 < t < 0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$|t| < 1$이고 $t \neq 0$이면 주어진 두 정사각형의 공통부분은 직사각형이 된다.

$|t| \geq 1$ 또는 $t=0$이면 주어진 두 정사각형의 내부는 서로 만나지 않는다.

이제 주어진 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\begin{cases} 0 & (t \geq 1) \\ t^2-t^3 & (0 < t < 1) \\ 0 & (t=0) \\ t^2+t^3 & (-1 < t < 0) \\ 0 & (t \leq -1) \end{cases}$$

$0 < t < 1$일 때, 함수 $S(t)$의 도함수는

$$S'(t)=2t-3t^2=2t\left(1-\frac{3}{2}t\right)$$

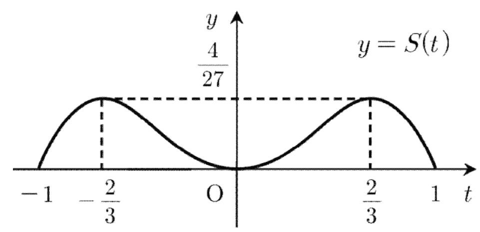
$S'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

$t=\frac{2}{3}$의 좌우에서 $S'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 $\frac{4}{27}$이다.

모든 실수 t에 대하여 $S(t)=S(-t)$이므로

함수 $S(t)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $S(t)$의 그래프는



따라서 구하는 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다.

답 ①

G136 | 답 ④

[풀이]

$f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $a-4(=f(2))$이다.

$f(1)=a-2,\ f(4)=16+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로

최대최소의 정리에 의하여

$M=f(4),\ m=f(2)$

주어진 조건에서

$M+m=2a+12=20$

$\therefore\ a=4$

답 ④

G137 | 답 ②

[풀이1]

주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$ax(x-2)^2=x$

정리하면

$x\{a(x-2)^2-1\}=0$

$x=0$

또는

$a(x-2)^2=1$에서 $x=2\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

그런데 점 A의 x좌표는 0보다 크고 2보다 작다.

점 A의 x좌표는 $2-\sqrt{\frac{1}{a}}$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$로 두자.

(단, $0<t<2-\sqrt{\frac{1}{a}}$)

점 P에서 직선 OA까지의 거리를 h라고 하자.
점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$h=\frac{|t-f(t)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{f(t)-t}{\sqrt{2}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
(삼각형 OAP의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times h=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)(f(t)-t)$$

$g(t)=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)(f(t)-t)$로 두자.

함수 $g(t)$의 도함수는

$$g'(t)=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)(f'(t)-1)$$

$g'(t)=0$에서 $f'(t)=1$
함수 $f(t)$의 도함수는

$f'(t)=3at^2-8at+4a$

$f'(t)=1$에서 $3at^2-8at+4a-1=0$
이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$t=\frac{4a\pm\sqrt{4a^2+3a}}{3a}$$

$t=\frac{4a-\sqrt{4a^2+3a}}{3a}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\frac{4a-\sqrt{4a^2+3a}}{3a}$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.
주어진 조건에서

$\frac{4a-\sqrt{4a^2+3a}}{3a}=\frac{1}{2}$ 정리하면 $5a=2\sqrt{4a^2+3a}$
양변을 제곱하여 정리하면

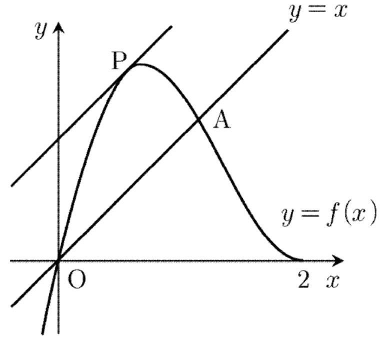
$9a^2-12a=0$ 즉, $a(3a-4)=0$

그런데 $a>\frac{1}{2}$이므로

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

답 ②

[풀이2]



위의 그림처럼 점 P에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행할 때, 삼각형 OAP의 넓이는 최대가 된다.
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(t)=3at^2-8at+4a$

주어진 조건에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a=1$ $\therefore$ $a=\frac{4}{3}$

답 ②

G138 | 답 5

[풀이1]

점 $\mathrm{P}\left(x,\ \frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\right)(x>0)$에서 주어진 직선까지의 거리를 $f(x)$라고 하자.
점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$f(x)=\frac{\left|\frac{1}{3}x^3-x+\frac{41}{3}\right|}{\sqrt{2}}\ (x>0)$$

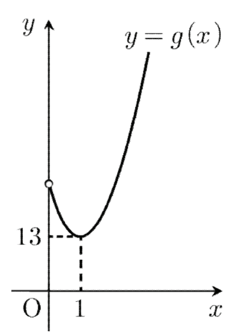
$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{41}{3}\ (x>0)$로 두자.

$g(x)$의 도함수는

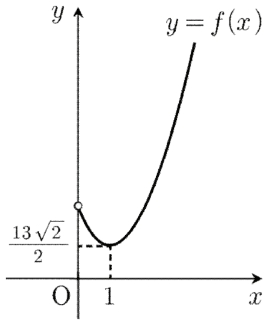
$g'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=1\,(\because x>0)$

$x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $g(1)=13$이다.
함수 $g(x)$의 그래프는

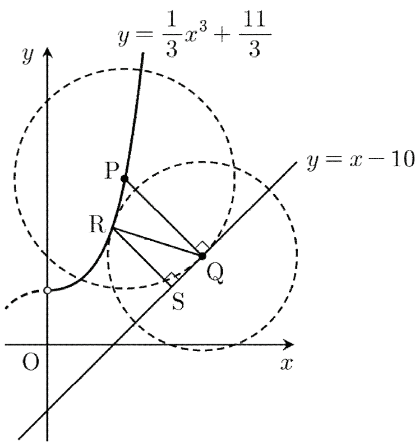


함수 $f(x)$의 그래프는

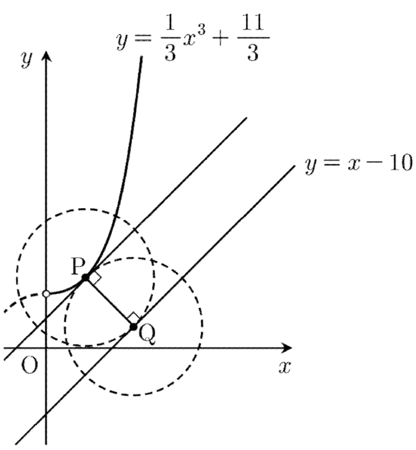


함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.
이때, 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.
$\therefore\ a+b=5$
답 5

[풀이2]
점 P에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q를 중심으로 하고 주어진 곡선에 접하는 원 위의 접점을 R, 점 R에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



위의 그림에서
$\overline{\mathrm{RS}} \le \overline{\mathrm{QR}} \le \overline{\mathrm{PQ}}$
단, 등호는 두 점 P, R이 일치할 때 성립한다.



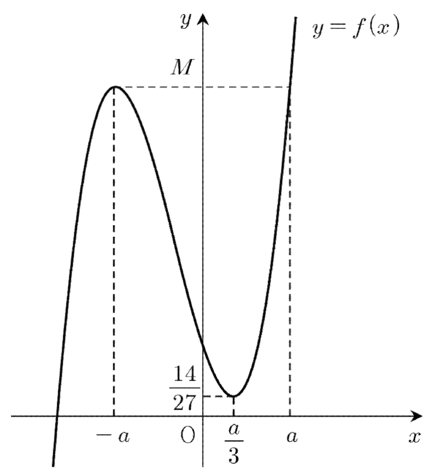
위의 그림처럼 점 P에서의 접선의 기울기가 주어진 직선의 기울기와 같으면 두 점 P, R이 일치한다.
주어진 곡선의 방정식을 미분하면 $y'=x^2$
$y'=1$에서 $x=1\,(\because x>0)$ 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.
$\therefore\ a+b=5$
답 5

G139 | 답 12

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=-a\,(<0)$ 또는 $x=\frac{a}{3}\,(>0)$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값: $f(-a)=a^3+2$, 극솟값: $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{5}{27}a^3+2$
함수 $f(x)$의 그래프는

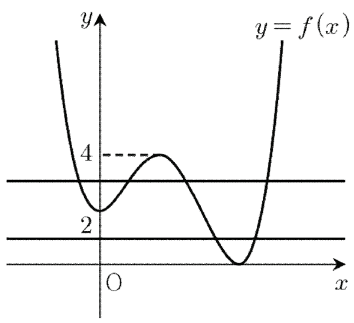


구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(-a)$, $f\left(\frac{a}{3}\right)$(극솟값), $f(a)$
중에서 가장 작은 값이므로
$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$
정리하면
$a^3-8=0$
좌변을 인수분해하면
$(a-2)(a^2+2a+4)=0$
a는 실수이므로
$a=2$ $\cdots$ ㉠
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$
구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(-2)$, $f(2)$

중에서 가장 큰 값이다.
$f(-2)=10$, $f(2)=10$
이므로
$M=10$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$a+M=12$
답 12

G140 ㅣ답 ④

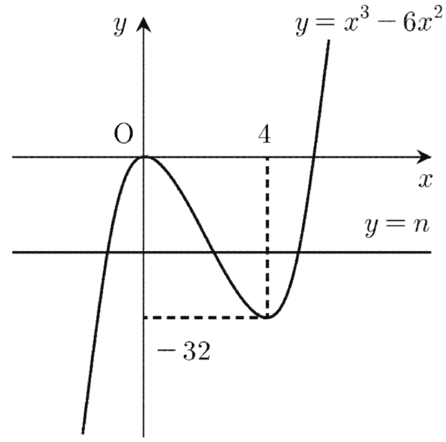
[풀이]
주어진 방정식을 정리하면
$\{f(x)-1\}\{f(x)-3\}=0$
$f(x)=1$ 또는 $f(x)=3$



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $x=1$은 두 점에서 만난다.
이때, 두 교점의 x좌표를 각각 $\alpha_i(i=1,\ 2)$라고 하자.
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$은 네 점에서 만난다.
이때, 네 교점의 x좌표를 각각 $\beta_j(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$라고 하자.
그런데 $\alpha_i \neq \beta_j$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.
답 ④

G141 ㅣ답 31

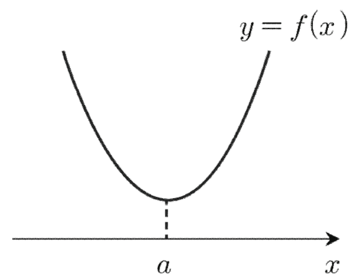
[풀이]
곡선 $y=x^3-6x^2$과 직선 $y=n$이 세 점에서 만나면 주어진 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
함수 $y=x^3-6x^2$의 도함수는
$y'=3x^2-12x$
$y'=3x(x-4)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
$x=0$의 좌우에서 y'의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 y는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
$x=4$의 좌우에서 y'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 y는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.



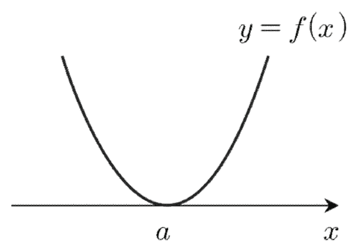
위의 그림에서 $-32<n<0$이면
곡선 $y=x^3-6x^2$과 직선 $y=n$은 세 점에서 만난다.
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 n의 개수는 31이다.
답 31

G142 ㅣ답 ⑤

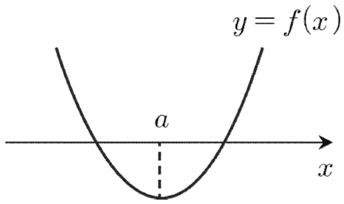
[풀이]
ㄱ. (거짓)
$f'(x)=(x-a)^3$
$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.
(1) $f(a)>0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는



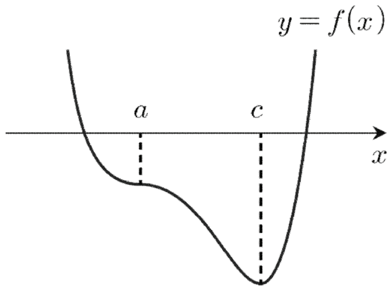
함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 만나지 않으므로 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.
(2) $f(a)=0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.
(3) $f(a)<0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는



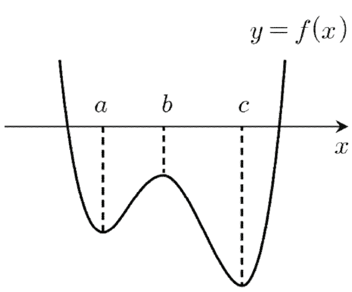
함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 두 점에서 만나므로
방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.
따라서 주어진 방정식이 항상 실근을 갖는 것은 아니다.
ㄴ. (참)
(1) $a<c$인 경우
$f'(x)=(x-a)^2(x-c)$
$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 각각 음이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 감소한다.
$x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.
$f(c)<f(a)<0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 두 점에서 만나므로
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(2) $a>c$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 주어진 방정식의 실근의 개수는 2이다.
(1), (2)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. (참)
$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(a)<f(b)<0$, $f(c)<f(b)<0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는



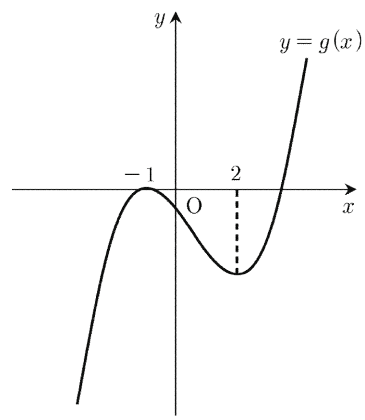
함수 $f(x)$의 그래프와 x축이 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

G143 ㅣ답 33

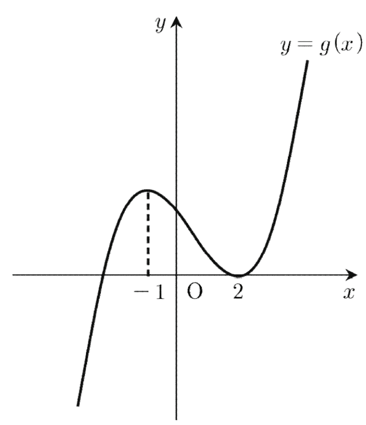
[풀이]
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=2x^3-3x^2-12x-10+a$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a-3$,
$x=2$에서 극솟값 $a-30$을 갖는다.
함수 $g(x)$의 극대점이 x축 위에 있으면 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근만을 해로 갖는다.



$a-3=0$에서 $a=3$
함수 $g(x)$의 극소점이 x축 위에 있으면 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근만을 해로 갖는다.



$a-30=0$에서 $a=30$
따라서 구하는 값은 33이다.
답 33

G144 ㅣ답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

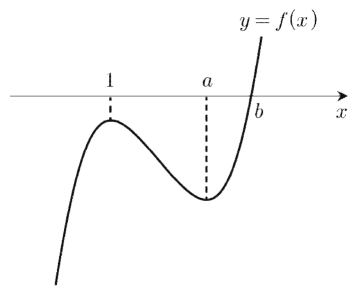
$f'(x)=\boxed{6(x-a)(x-1)}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\boxed{\text{극댓값}}$을 가진다.

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.

그런데 $f(1)=-a+1<0$이고 $f(b)=0$이므로 아래의 그림에서 $a\boxed{<}b$이다.



(가): $6(x-a)(x-1)$ (나): 극댓값 (다): $<$

답 ④

G145 ㅣ답 12

[풀이]

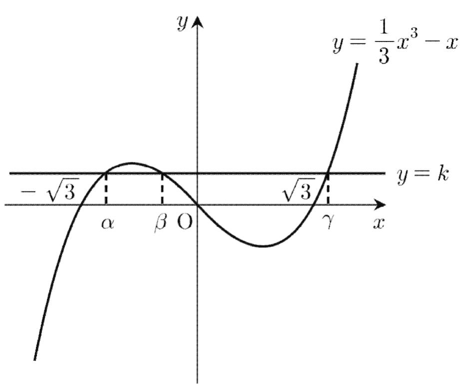
※ $\alpha<\beta<\gamma$로 두고 문제를 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$ $\cdots(*)$

곡선 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$와 직선 $y=k$의 서로 다른 세 교점의 x좌표는 각각 α, β, γ이다.

(1) $k\geq 0$인 경우



위의 그림에서

$-\sqrt{3}\leq\alpha<\beta\leq 0<\sqrt{3}\leq r$

$(*)$에 의하여

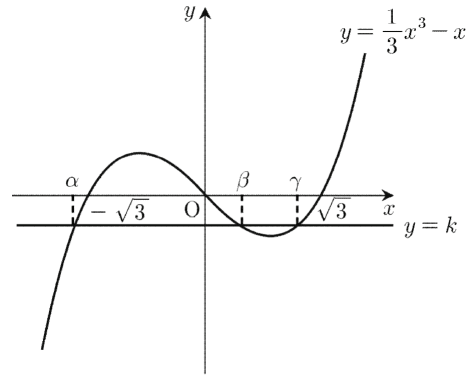
$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma$

그런데 γ의 최솟값은 $\sqrt{3}$이므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\geq 2\sqrt{3}$

(단, 등호는 $k=0$일 때 성립한다.)

(2) $k<0$인 경우



위의 그림에서

$\alpha<-\sqrt{3}<0<\beta<r<\sqrt{3}$

$(*)$에 의하여

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha+\beta+\gamma=-2\alpha$

그런데 α는 $-\sqrt{3}$보다 작으므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>2\sqrt{3}$

(1), (2)에서

$m=2\sqrt{3}$

$\therefore\ m^2=12$

답 12

G146 ㅣ답 ②

[풀이]

우선 함수 $f(x)$의 방정식을 구하자.

$|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{x}{0+1}=x$$

$|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$x=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$x=-1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

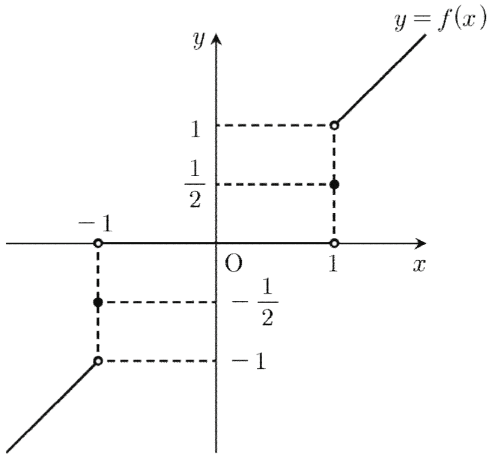
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ 0 & (|x|<1) \\ \dfrac{1}{2} & (x=1) \\ -\dfrac{1}{2} & (x=-1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-3x^2+a^2$

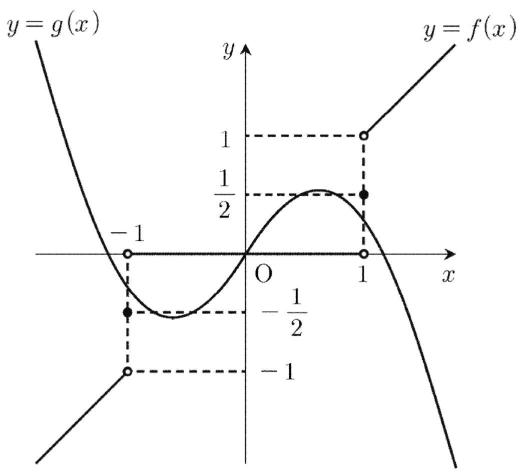
(1) $a>0$인 경우

$g'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$에서 극댓값을 갖는다.



주어진 방정식이 단 하나의 실근을 갖기 위해서는 위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 오직 하나의 점에서만 만나야 한다.

$0\le g(1)<\dfrac{1}{2}$ 또는 $\dfrac{1}{2}<g(1)\le 1$

a의 범위를 구하면

$1\le a<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}<a\le\sqrt{2}$

(2) $a=0$인 경우

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=-x^3$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 단 하나의 실근을 갖는다.

(3) $a<0$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

a의 범위를 구하면

$-\sqrt{2}\le a<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<a\le -1$

(1), (2), (3)에서 a의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

답 ②

G147 ㅣ답 ②

[풀이]

주어진 두 함수의 그래프가 오직 한 점에서 만나기 위해서는 방정식

$f(x)=g(x)$

의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.

방정식을 정리하면

$x^4+x^2-6x=-2a$

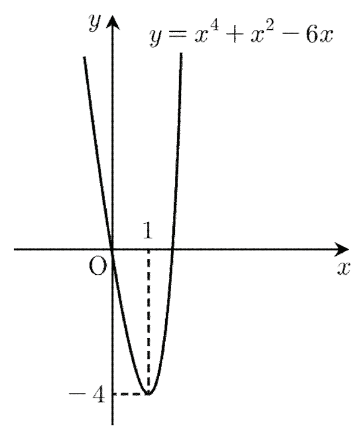
이제 곡선 $y=x^4+x^2-6x$와 직선 $y=-2a$가 오직 한 점에서 만날 때의 a의 값을 구하면 된다.

함수 $y=x^4+x^2-6x$의 도함수는

$y'=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$y'=0$에서 $x=1$

$x=1$의 좌우에서 y'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $y=x^4+x^2-6x$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.



곡선 $y=x^4+x^2-6x$의 극소점을 직선 $y=-2a$가 지나면 된다.

$-2a=-4$

$\therefore\ a=2$

답 ②

G148 | 답 ③

[풀이]

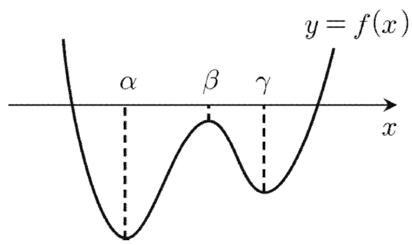
도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,(a>0)$

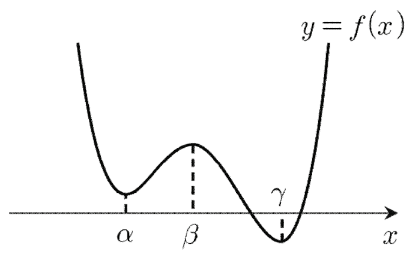
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에서 아래와 같은 세 경우가 가능하다.

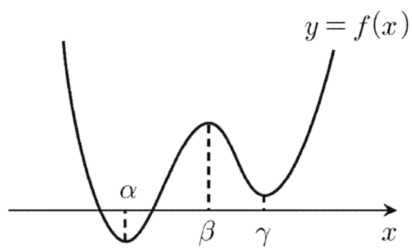
(1) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)<0$



(2) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$



(3) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)>0$



ㄱ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. (참)

(1), (2), (3)의 경우 모두

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. (거짓)

$f(\alpha)>0$이면 (2)의 경우이다.

이때, 방정식 $f(x)=0$은 β보다 큰 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G149 | 답 ⑤

[풀이]

※ 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수 a로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$

(단, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\beta)g(x)+a(x-\alpha)g(x)$

$+a(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$

주어진 조건에서

$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)=0$

그런데 $a>0$, $\alpha\neq\beta$이므로

$g(\alpha)=0$

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.

ㄴ. (참)

$f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면

$f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$

(1) $f'(\alpha)=0$인 경우

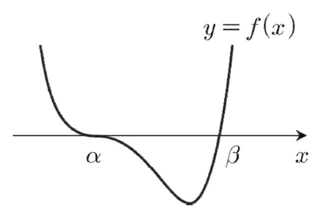
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

$\alpha=\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta\}$

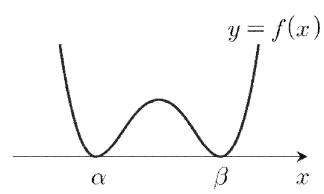
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\beta=\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta\}$

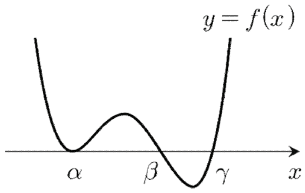
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

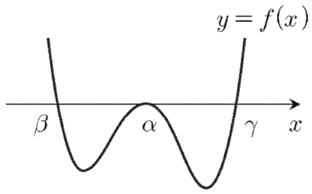


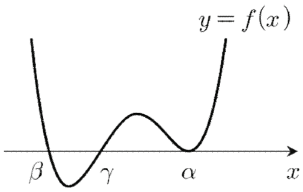
$\alpha\neq\gamma$이고 $\beta\neq\gamma$일 때, $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.







방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

(2) $f'(\beta)=0$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

ㄷ. (참)

$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)$

$f'(\beta)=a(\beta-\alpha)g(\beta)$

이므로

$f'(\alpha)f'(\beta)=-a^2(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$

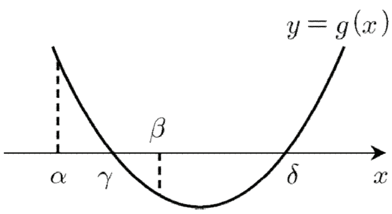
$-a^2(\alpha-\beta)^2<0$이므로 $g(\alpha)g(\beta)<0$

이차함수 $g(x)$는 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

$g(\alpha)<0,\ g(\beta)>0$ 또는 $g(\alpha)>0,\ g(\beta)<0$

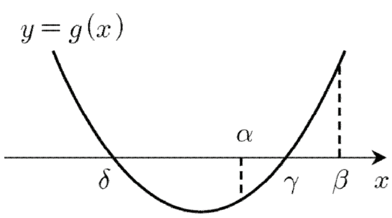
이므로 사이값 정리에 의하여

$g(\gamma)=0$인 γ가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 적어도 하나 존재한다.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

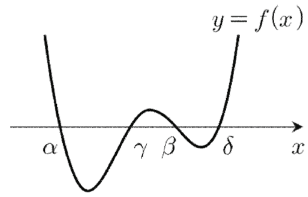
이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.

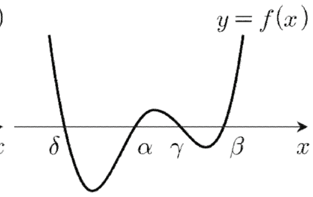
방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.





이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G150 | 답 ③

[풀이]

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ㄱ. (참)

$0<x<2$일 때, $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

따라서 $0<x<2$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. (참)

$h'(2)=f'(2)-g'(2)=0$

$x=2$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. (거짓)

$h'(0)=f'(0)-g'(0)=0$

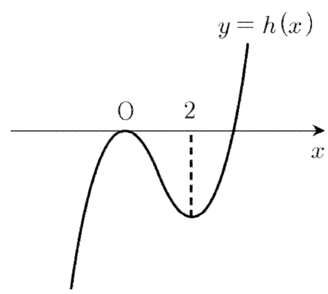
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로

함수 $h(x)$의 그래프는 원점에서 x축에 접한다.

함수 $h(x)$의 그래프는



방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G151 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

주어진 조건에서

$f(-x)=(-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c$

$=-x^3-ax^2-bx-c=-f(x)$

정리하면

$ax^2+c=0$

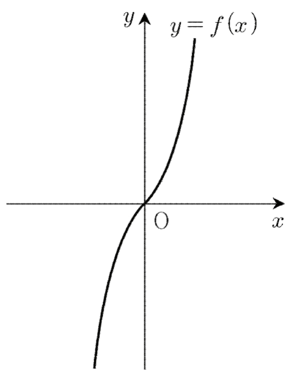
항등식의 필요충분조건에 의하여 $a=c=0$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3+bx$

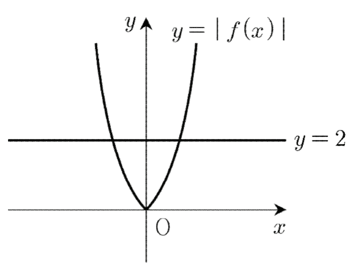
함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+b$

(1) $b>0$인 경우

$f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는

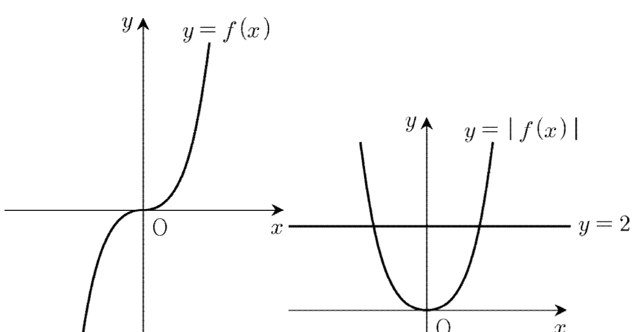


함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 두 개의 점에서 만나므로 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $b=0$인 경우

$f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 두 개의 점에서 만나므로 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $b<0$인 경우

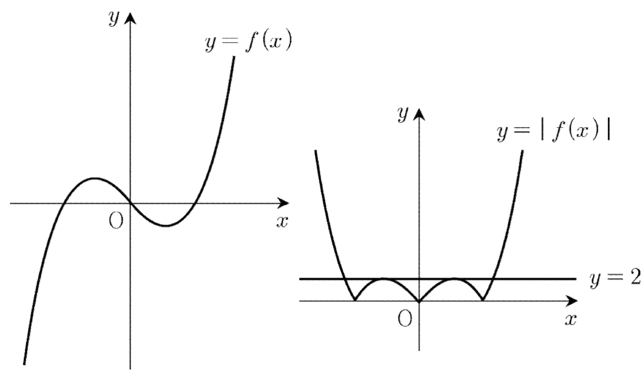
$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$ 또는 $x=\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$

$x=-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$에서 극댓값을 갖는다.

$x=\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$에서 극솟값을 갖는다.

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$는 네 점에서 만나야 한다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 2이어야 하므로

$f\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}\right)=2$ 대입하면 $\dfrac{b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3}}-b\sqrt{-\dfrac{b}{3}}=2$

정리하면 $-\dfrac{2b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3}}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^3=-27$ 풀면 $b=-3$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3-3x$

$\therefore\ f(3)=18$

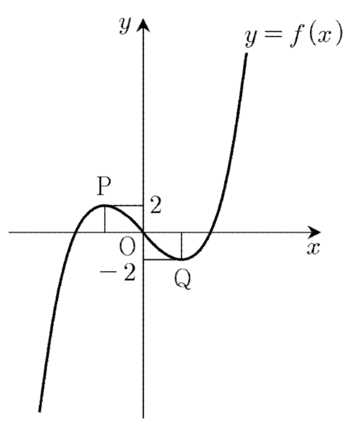
답 ④

[참고1]

다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 방정식을 유도해도 좋다.

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3+bx$(단, $b<0$)

함수 $f(x)$가 원점 대칭이므로 함수 $f(x)$의 극대점과 극소점은 서로 원점에 대하여 대칭이다.



함수 $f(x)$의 극대점과 극소점을 각각

$\mathrm{P}(\alpha,\ 2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ -2)$

라고 하자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+b$

방정식 $f'(x)=0$에 대하여

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=-\dfrac{4}{3}b$

$\alpha-\beta<0$이므로 $\alpha-\beta=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}b}$

함수 $f(x)$에 대하여 극대점의 y좌표와 극소점의 y좌표의 차는 4이므로

$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3+b(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+b)=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}b}\times\dfrac{2}{3}b=4$

풀면 $b=-3$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3-3x$

[참고2] +미적분1(부정적분)

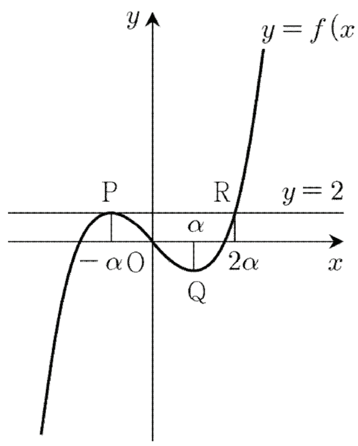
다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 방정식을 유도해도 좋다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 극대점과 극소점을 각각 P, Q, 점 P에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 R이라고 하자.



점 Q의 x좌표를 α라고 하면 두 점 P, R의 x좌표는 각각 $-\alpha$, 2α이다.

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=3(x+\alpha)(x-\alpha)=3(x^2-\alpha^2)$

부정적분의 정의에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3-3\alpha^2x+C$(단, C는 적분상수)

그런데 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$C=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3-3\alpha^2x$

점 R은 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(2\alpha)=(2\alpha)^3-3\alpha^2(2\alpha)=2$

정리하면 $\alpha^3=1$ 풀면 $\alpha=1$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3-3x$

G152 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=18x^2-1$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{9}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}}{9}$	↗

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 1이면

$f'(t)=18t^2-1=1$에서 $t=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=\dfrac{1}{3}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=x+\dfrac{4}{9}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{9}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=x-\dfrac{4}{9}$

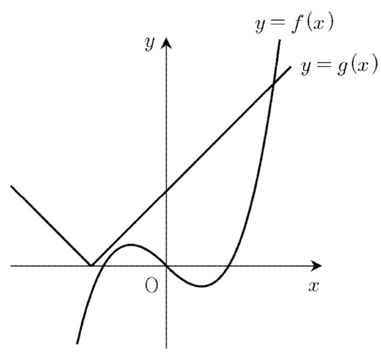
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 -1이면 $f'(t)=18t^2-1=-1$에서 $t=0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-x$

○ $a<-\dfrac{4}{9}$인 경우

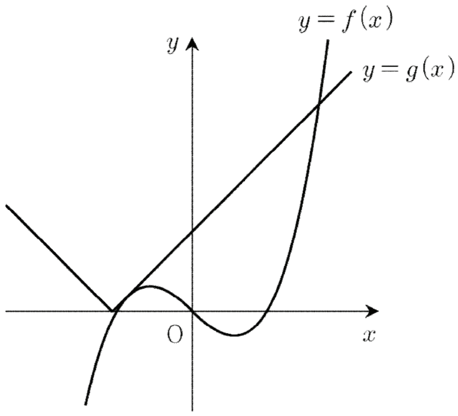
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

○ $a=-\dfrac{4}{9}$인 경우

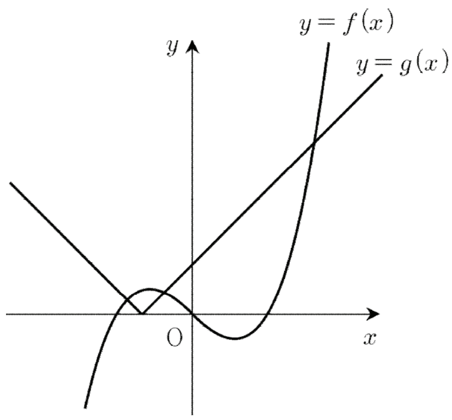
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

○ $-\dfrac{4}{9}<a<0$인 경우

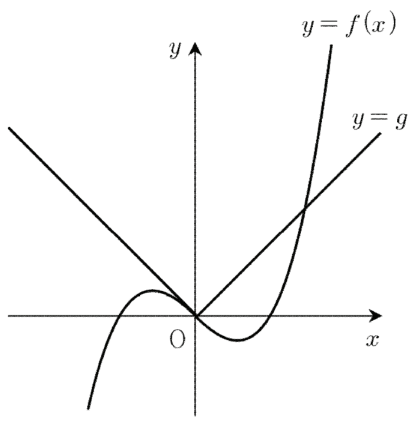
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3이다.

○ $a=0$인 경우

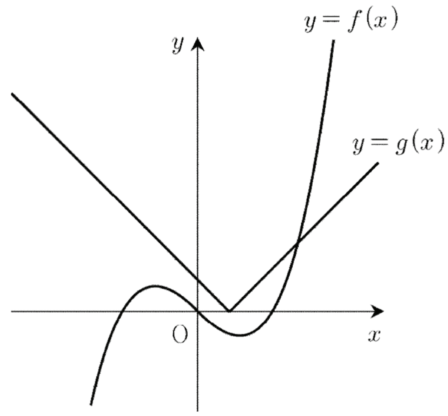
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는

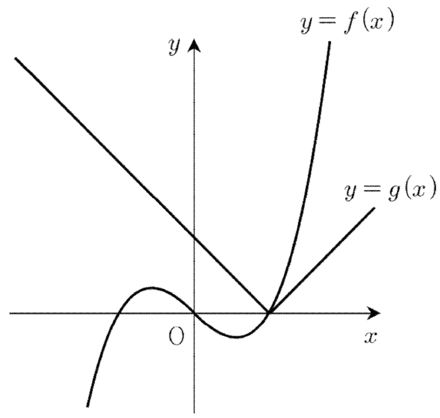


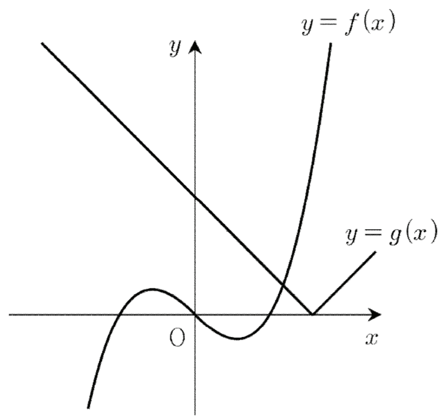
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

○ $a>0$인 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는







두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

이상에서 a의 값은 $-\dfrac{4}{9}$ 또는 0이다.

답 ④

G153 | 답 ①

[풀이]

$f(x)=5x+k$로 두고 정리하면

$x^3-3x^2-9x=k$

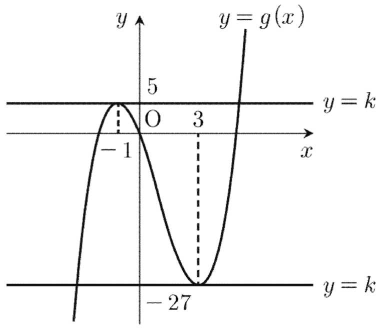
$g(x)=x^3-3x^2-9x$로 두자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, $k=5$ 또는 $k=-27$이다. 방정식 $f(x)=5x+k$가 서로 다른 두 실근을 가질 필요충분조건은 $k=5$ 또는 $k=-27$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=5x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, $k=5$ 또는 $k=-27$이다. 그런데 k는 양수이므로

$\therefore\ k=5$

답 ①

G154 | 답 ①

[풀이]

주어진 방정식을 정리하면

$2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$로 두자.

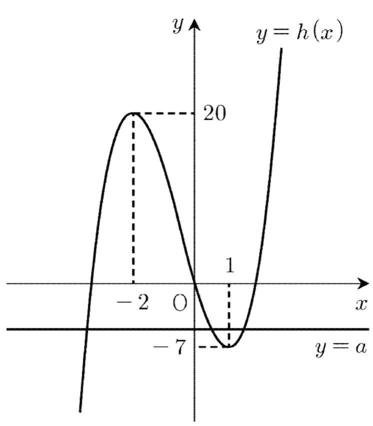
함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

함수 $h(x)$의 그래프는



곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$가 제3사분면과 제4사분면에서 각각 한 개와 두 개의 점에서 만나면 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖는다.

a의 범위는 $-7<a<0$

이 범위의 모든 정수 a의 개수는 6이다.

답 ①

G155 | 답 ⑤

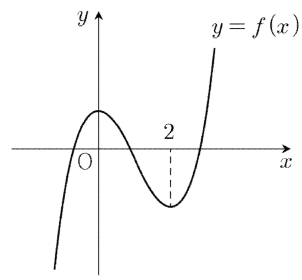
[풀이]

이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

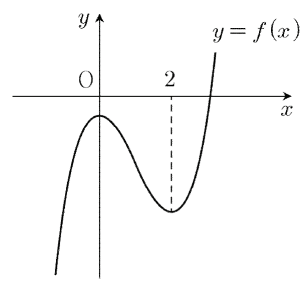
$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프는



ㄱ. (참)

$f(0)<0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



$f(2)<f(0)<0$이므로 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. (참)

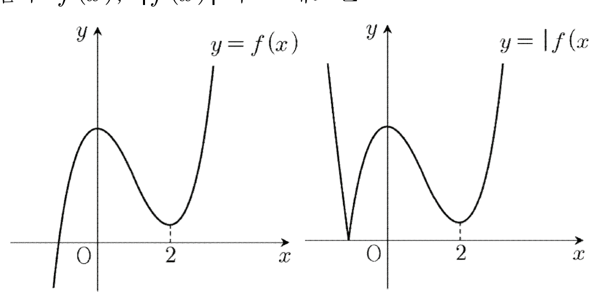
$f(0)f(2)\geq 0 \Leftrightarrow f(0)f(2)>0$ 또는 $f(0)f(2)=0$

$\Leftrightarrow f(0)>0,\ f(2)>0$ 또는 $f(0)<0,\ f(2)<0$

또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$

○ $f(0)>0,\ f(2)>0$인 경우

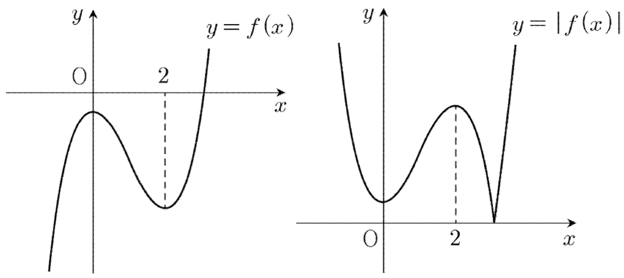
두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 극소점의 개수는 2이다.

○ $f(0)<0,\ f(2)<0$인 경우

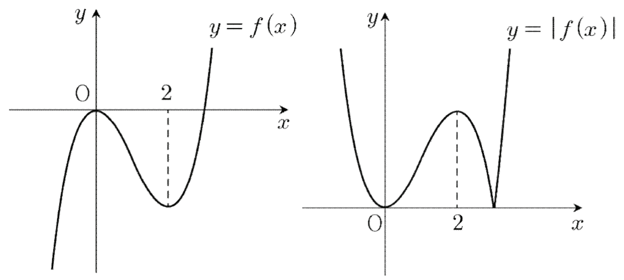
두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 극소점의 개수는 2이다.

○ $f(0)=0$인 경우

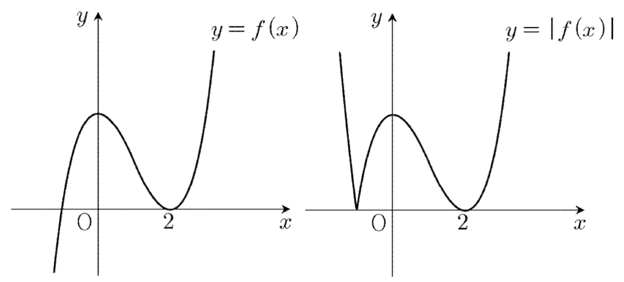
두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 극소점의 개수는 2이다.

○ $f(2)=0$인 경우

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



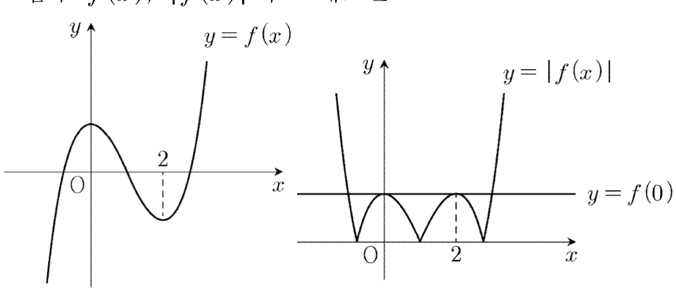
함수 $|f(x)|$의 극소점의 개수는 2이다.

이상에서 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. (참)

$f(0)+f(2)=0$일 때,

두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 교점의 개수가 4이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고] +미적분1(부정적분)

산술적인 방법으로 보기 ㄱ, ㄷ이 참임을 보일 수도 있다.

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=kx(x-2)$(단, $k>0$)

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{k}{3}x^3-kx^2+C$$

(단, C는 적분상수)

ㄱ. (참)

$f(0)=C<0$이면

$f(2)=-\frac{4}{3}k+C<f(0)$이므로

$|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄷ. (참)

$$f(0)+f(2)=-\frac{4}{3}k+2C=0$$

에서 $C=\frac{2}{3}k$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{k}{3}x^3-kx^2+\frac{2}{3}k$$

방정식 $|f(x)|=f(0)$과 필요충분조건은

$f(x)=f(0)$ 또는 $f(x)=-f(0)$

(1) $f(x)=f(0)$인 경우

$$\frac{k}{3}x^3-kx^2+\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}k$$

정리하면

$$x^3-3x^2=0$$

좌변을 인수분해하면

$$x^2(x-3)=0$$

풀면

$x=0$ 또는 $x=3$

(2) $f(x)=-f(0)$인 경우

$$\frac{k}{3}x^3-kx^2+\frac{2}{3}k=-\frac{2}{3}k$$

정리하면

$$x^3-3x^2+4=0$$

좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2)^2=0$$

풀면

$x=-1$ 또는 $x=2$

(1), (2)에서 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 해집합은

$\{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$

이므로 보기 ㄷ에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

G156 | 답 ⑤

[풀이]

삼차함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에 의하여

$f'(-2)=12a-4b+c=0$ $\cdots$㉠

조건 (나)에 의하여

$f'(-3)=27a-6b+c$

$=27a+6b+c=f'(3)$

정리하면

$b=0$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$c=-12a,\ b=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^3-12ax+d\,(a\neq 0)$

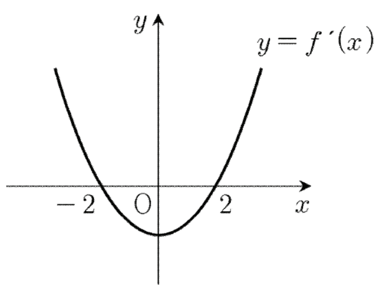
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

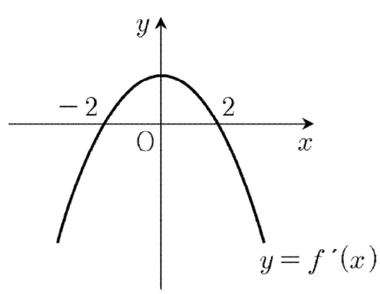
$x=-2$ 또는 $x=2$

○ $a>0$인 경우



$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. 이는 조건 (가)를 만족시킨다.

○ $a<0$인 경우



$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

이상에서 a의 부호는 $a>0$이다.

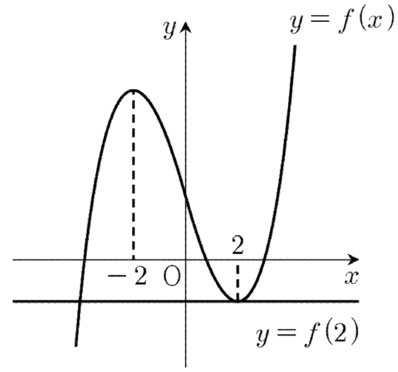
ㄱ. (참)

a가 양수이므로 이차함수 $f'(x)=3ax^2-12a$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

ㄴ. (참)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$의 교점의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. (참)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ $\cdots(*)$

$f'(-1)=-9a,\ f(-1)=11a+d$

이므로 $(*)$는

$y=-9a(x+1)+11a+d$

정리하면

$y=-9ax+2a+d$ $\cdots$㉢

$x=2,\ y=f(2)=-16a+d$를 ㉢에 대입하면

$f(2)=-9a\times 2+2a+d$

정리하면

$-16a+d=-16a+d$

이므로 점 $(2,\ f(2))$는 접선 $(*)$ 위의 점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1] +미적분1(부정적분)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

조건 (나)에서 이차함수 $f'(x)$는 $x=\dfrac{-3+3}{2}=0$에 대하여 대칭이므로

$f'(2)=f'(-2)=0$

이차함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=3a(x+2)(x-2)=3ax^2-12a$

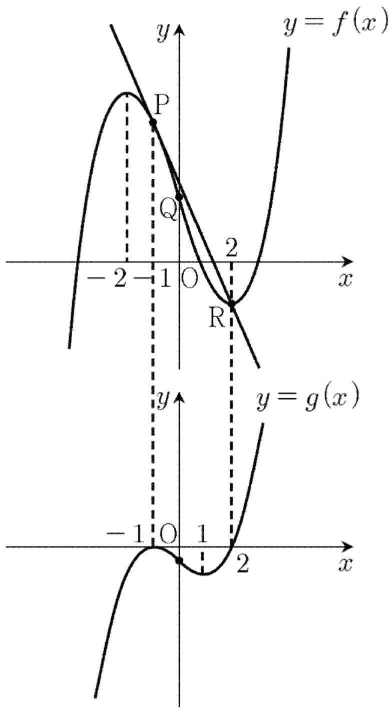
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\int f'(x)dx=ax^3-12ax+C$

(단, C는 적분상수)

[참고2]
보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.
(두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(2,\ f(2))$를 잇는 직선의 기울기)
$=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{(-16a+d)-(11a+d)}{3}=-9a$
(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 기울기)
$=f'(-1)=-9a$
이므로 보기 ㄷ은 참이다.

[참고3]
세 점 $(-1,\ f(-1))$, $(0,\ f(0))$, $(2,\ f(2))$를 각각 P, Q, R이라고 하자.
함수 $g(x)$를 다음과 같이 두자.
$g(x)=f(x)-f'(-1)(x+1)-f(-1)$



위의 그림에서
(점 R의 x좌표)$-$(점 Q의 x좌표)
:(점 Q의 x좌표)$-$(점 P의 x좌표)
$=2:1$
이 성립함을 알 수 있다.

G157 | 답 65

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-6x+6$
이므로
$4f'(x)+12x-18=12x^2-12x+6$
$(f'\circ g)(x)=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$
문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$4x^2-4x=\{g(x)\}^2-2g(x)$
좌변을 우변으로 이항하여 정리하면
$g(x)^2-(2x)^2-2\{g(x)-2x\}=0$
곱셈공식에 의하여
$\{g(x)+2x\}\{g(x)-2x\}-2\{g(x)-2x\}=0$
좌변을 인수분해하면
$\{g(x)+2x-2\}\{g(x)-2x\}=0$
풀면
$g(x)=-2x+2$ 또는 $g(x)=2x$
(1) 방정식 $g(x)=-2x+2$의 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고
두 직선 $y=-2x+2$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$은
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$(x,\ y)=(\alpha,\ \beta)$가
방정식 $g(x)=-2x+2$의 해이면
$(x,\ y)=(\beta,\ \alpha)$는
방정식 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$의 해이다.
이때, $0\le\alpha\le1$이면 $0\le\beta\le2$이므로
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 방정식
$f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$
이 실근을 가질 k의 범위를 구하자.
방정식을 정리하면
$-x^3+3x^2-\dfrac{13}{2}x+1=k$
$h_1(x)=-x^3+3x^2-\dfrac{13}{2}x+1$으로 두자.
함수 $h_1(x)$의 도함수는
$h_1{}'(x)=-3x^2+6x-\dfrac{13}{2}=-3(x-1)^2-\dfrac{7}{2}$
$h_1{}'(x)<0$이므로 함수 $h_1(x)$는 감소함수이다.
곡선 $y=h_1(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는
$h_1(2)\le k\le h_1(0)$ 즉, $-8\le k\le1$
(2) 방정식 $g(x)=2x$의 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고
두 직선 $y=2x$, $y=\dfrac{1}{2}x$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$(x,\ y)=(\gamma,\ \delta)$가
방정식 $g(x)=2x$의 해이면

$(x,\ y)=(\delta,\ \gamma)$는

방정식 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 해이다.

이때, $0 \le \alpha \le 1$이면 $0 \le \beta \le 2$이므로

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 방정식

$f(x)=\frac{1}{2}x$

이 실근을 가질 k의 범위를 구하자.

방정식을 정리하면

$-x^3+3x^2-\frac{11}{2}x=k$

$h_2(x)=-x^3+3x^2-\frac{11}{2}x$로 두자.

함수 $h_2(x)$의 도함수는

$h_2{}'(x)=-3x^2+6x-\frac{11}{2}=-3(x-1)^2-\frac{5}{2}$

$h_2{}'(x)<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 감소함수이다.

곡선 $y=h_2(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는

$h_2(2) \le k \le h_2(0)$ 즉, $-7 \le k \le 0$

(1), (2)에서 k의 범위는

$-8 \le k \le 1$ 또는 $-7 \le k \le 0$

이므로

$-8 \le k \le 1$, $m=-8$, $M=1$

$m^2+M^2=65$

답 65

[참고]

다음과 같이 k의 범위를 구해도 좋다.

역함수의 성질에 의하여

$g(x)=-2x+2$이면

$f(-2x+2)=x$(단, $0 \le x \le 1$) …㉠

$g(x)=2x$이면

$f(2x)=x$(단, $0 \le x \le 1$) …㉡

㉠을 정리하면

$8x^3-12x^2+13x-8=k$(단, $0 \le x \le 1$)

$h_3(x)=8x^3-12x^2+13x-8$로 두자.

함수 $h_3(x)$의 도함수는

$h_3{}'(x)=24x^2-24x+13=24\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+7$

$h_3{}'(x)>0$이므로 함수 $h_3(x)$는 증가함수이다.

곡선 $y=h_3(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는

$h_3(0) \le k \le h_3(1)$ 즉, $-8 \le k \le 1$

㉡을 정리하면

$-8x^3+12x^2-11x=k$(단, $0 \le x \le 1$)

$h_4(x)=-8x^3+12x^2-11x$로 두자.

함수 $h_4(x)$의 도함수는

$h_4{}'(x)=-24x^2+24x-11=-24\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-5$

$h_4{}'(x)<0$이므로 함수 $h_3(x)$는 감소함수이다.

곡선 $y=h_4(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는

$h_4(1) \le k \le h_4(0)$ 즉, $-7 \le k \le 0$

이상에서 k의 범위는 $-8 \le k \le 1$이다.

G158 | 답 ⑤

[풀이1]

$g(x)=f(x)-k(x-1)-1$로 두자.

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}-(k+1)x+k+1 & (x \le 1)\\ x^3-kx+k-1 & (x>1)\end{cases}$$

이제 모든 실수 x에 대하여 부등식

$g(x) \ge 0$ …(*)

이 성립하도록 하는 실수 k의 범위를 구하면 된다.

$g(1)=0$이므로 구간 $(-\infty,\ 1]$에서

부등식 (*)이 성립하기 위해서는

직선 $y=-(k+1)x+k+1$의 기울기가 양수가 아니어야 한다.

(기울기)$=-(k+1) \le 0$

풀면 $k \ge -1$ …㉠

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)=0$이므로 구간 $(1,\ \infty)$에서

부등식 (*)이 성립하기 위해서는

함수 $y=x^3-kx+k-1$은 증가해야 한다.

이 함수의 도함수는 $y'=3x^2-k$

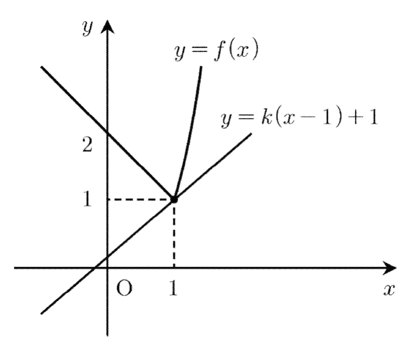
$y'|_{x=1}=3-k \ge 0$에서 $k \le 3$ …㉡

㉠, ㉡에서

$\therefore\ -1 \le k \le 3$

답 ⑤

[풀이2]



함수 $f(x)$의 그래프가 직선

$y=k(x-1)+1$ …(*)

의 위쪽에 있으면 주어진 부등식이 성립한다.

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의

접선의 기울기가 3이므로

직선 (*)의 기울기는 3 이하여야 한다.
직선 $y=-x+2$의 기울기가 -1이므로
직선 (*)의 기울기는 -1 이상이어야 한다.
$\therefore\ -1 \le k \le 3$
답 ⑤

G159 ㅣ답 22

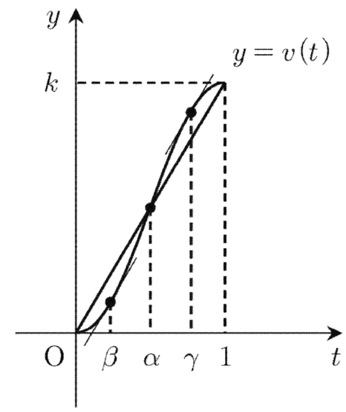
[풀이]
주어진 부등식을 정리하면
$5x^3-15x^2+k-2 \ge 0$
$h(x)=5x^3-15x^2+k-2$로 두자.
구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같을 k의 범위를 구하자.
함수 $h(x)$의 도함수는 $h'(x)=15x^2-30x$
$h'(x)=15x(x-2)=0$에서 $x=2$
$x=2$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.
$\lim_{x\to 0+} h(x)=k-2$, $\lim_{x\to 3-} h(x)=k-2$, $h(2)=k-22$
이므로 구간 $(0,\ 3)$에서 $h(x)$의 최댓값은 $k-22$이다.
$h(2)=k-22\ge 0$에서 $\therefore\ k \ge 22$
답 22

G160 ㅣ답 ③

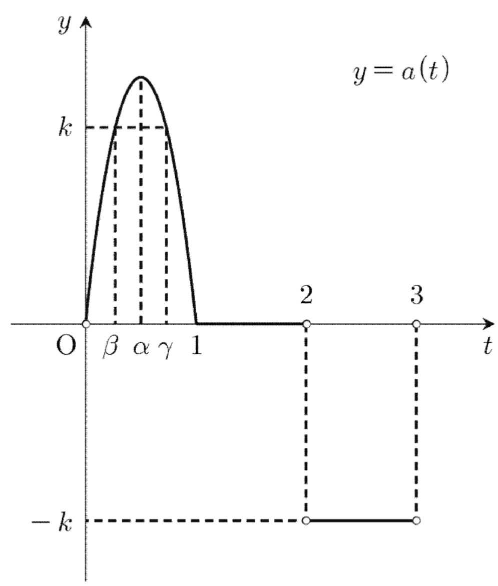
[풀이]
$h(x)=f(x)-g(x)$로 두자.
함수 $h(x)$의 도함수는 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
조건 (나)에서
구간 $[10,\ 30]$에서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 이 구간에서 감소한다.
조건 (가)에서 $h(20)=f(20)-g(20)=0$이므로
구간 $[10,\ 20)$에서 $h(x)>0$ 즉, $f(x)>g(x)$
구간 $[20,\ 30]$에서 $h(x)\le 0$ 즉, $f(x)\le g(x)$
따라서 $t=20$일 때, 자동차 B는 자동차 A를 추월한다.
답 ③

G161 ㅣ답 ②

[풀이]
○ 구간 $(0,\ 1)$에서의 함수 $a(t)$의 그래프의 개형
원점과 점 $(1,\ k)$를 잇는 직선과 함수 $v(t)$의 그래프의 교점의 x좌표를 α라고 하자.



함수 $v(t)$는 구간 $[0,\ \alpha]$에서 연속이고,
함수 $v(t)$는 구간 $(0,\ \alpha)$에서 미분가능하므로
평균값의 정리에 의하여
$\dfrac{v(\alpha)-v(0)}{\alpha-0}=k=a(\beta)=v'(\beta)$
를 만족시키는 β가 구간 $(0,\ \alpha)$에 적어도 하나 존재한다.
마찬가지의 이유로 $a(\gamma)=k$를 만족시키는 γ가
구간 $(\alpha,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
위의 그림에서 곡선 $y=v(t)$ 위의 점 $(t,\ v(t))$에서의 접선의 기울기는 $t=\alpha$일 때 최대가 되므로
$0<t<1$일 때, $a(t)\le a(\alpha)$
○ 구간 $[1,\ 2)$에서의 함수 $a(t)$의 그래프의 개형
구간 $(1,\ 2)$에서 $v(t)=k$이므로
$a(t)=0$
함수 $v(t)$는 $t=1$에서 미분가능하므로
$a(1)=0$
○ 구간 $(2,\ 3)$에서의 함수 $a(t)$의 그래프의 개형
$v(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않으므로
함수 $a(t)$는 $t=2$에서 정의되지 않는다.
구간 $(2,\ 3)$에서 $v(t)=-k(x-3)$이므로 $a(t)=-k$
이상에서 함수 $a(t)$의 그래프의 개형은



답 ②