공부하다

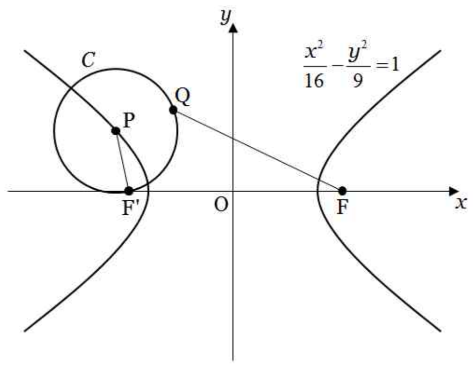
박수칠 수학

기본서

2017학년도 수능/모평 가형
기하와 벡터 주요 문제 해설

1 [2017학년도 6월 모평 가형 #18]

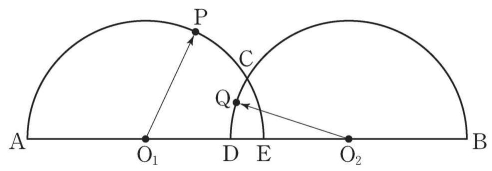
그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF$'$을 반지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 원 C의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{PF}}$) [4점]



2 [2017학년도 6월 모평 가형 #28]

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하자.

호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{\mathrm{O_1O_2}}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



3 [2017학년도 6월 모평 가형 #29]

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 1)$에서의 위치 (x, y)가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

4 [2017학년도 수능 9월 모평 가형 #16]

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

를 만족시킨다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

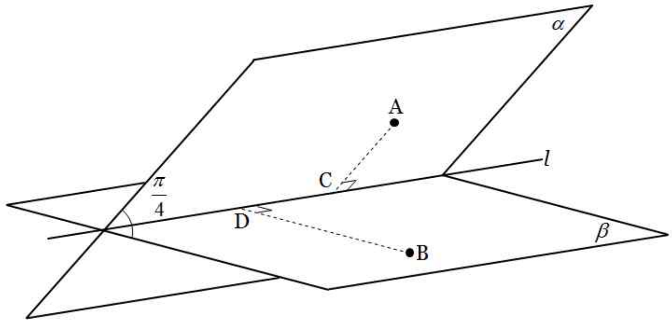
ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

5 [2017학년도 9월 모평 가형 #18]

좌표공간에 점 $\mathrm{P}(0, 0, 4)$가 있고, xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n}=(2, -2, 1)$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [4점]

6 [2017학년도 수능 9월 모평 가형 #29]

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



7 [2017학년도 수능 가형 #16]

좌표공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	2	1	$-\sqrt{2}$
$\vec{b}$	1	2	0
$\vec{c}$	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$
② $\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$
③ $\overline{AC}<\overline{AB}<\overline{BC}$
④ $\overline{BC}<\overline{AB}<\overline{AC}$
⑤ $\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{AB}$

8 [2017학년도 수능 가형 #19]

두 양수 k, p에 대하여 점 $A(-k, 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F$'$, 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle PAQ=\frac{\pi}{3}$이다.

두 점 F, F$'$을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값을 구하시오. [4점]

9 [2017학년도 수능 가형 #28]

점근선의 방정식이 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}=30$, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20$이다.
> (나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

10 [2017학년도 수능 가형 #29]

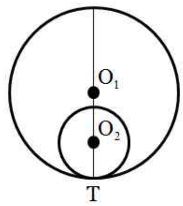
한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자.

정사면체 ABCD의 한 변 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

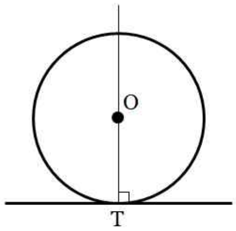
정답 및 해설

1 9π

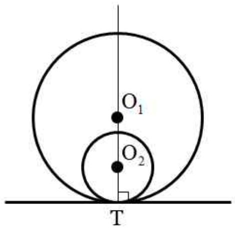
★오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{O_1}$을 중심으로 하는 원과 점 $\mathrm{O_2}$를 중심으로 하는 원이 점 T에서 내접하면 세 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, T는 한 직선 위에 있다.



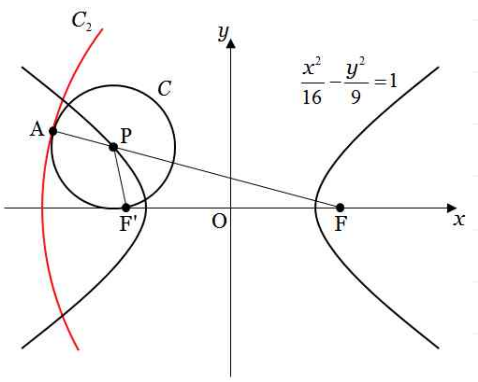
∵오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 원 위에 점 T가 있을 때, 점 T를 지나면서 점 T에서의 접선에 수직인 직선은 원의 중심 O를 지난다. (중등수학 3-2)



그러므로 첫 번째 그림에 두 원의 공통접선을 추가하면, 점 T를 지나면서 공통접선에 수직인 직선은 각 원의 중심 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$를 모두 지나야 한다.



아래 그림과 같이 점 F를 중심으로 하고 원 C와 내접하는 원을 C_2, 원 C와 C_2의 접점을 A라 하자.



이때, 원 C 위의 점 가운데 점 F로부터 가장 멀리 떨어져 있는 것은 점 A이며, 선분 FQ의 길이의 최댓값은 선분 FA의 길이와 같다. 따라서 원 C의 반지름을 r로 두면 다음이 성립한다.

(선분 FQ의 길이의 최댓값)

$$=\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{FP}}+r=14 \quad \cdots\cdots①$$

또한 쌍곡선의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FP}}-r=8 \quad \cdots\cdots②$$

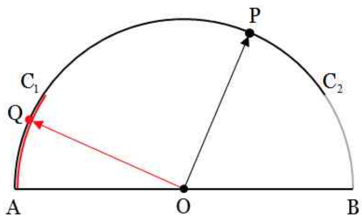
이 성립하고, ①과 ②를 연립해서 풀면

$$\overline{\mathrm{FP}}=11,\ r=3$$

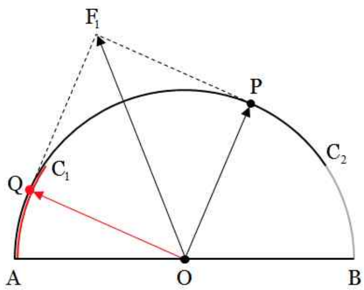
이므로 원 C의 넓이는 9π가 된다.

2 19

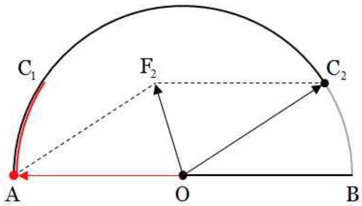
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 합을 쉽게 표현할 수 있도록 두 반원을 평행이동시켜서 중심 $\mathrm{O_1}$과 $\mathrm{O_2}$가 일치하도록 하자. 이때, 중심 $\mathrm{O_1}$과 $\mathrm{O_2}$를 점 O로, 점 A와 D를 점 A로, 점 B와 E를 점 B로 통일하고, 점 C는 두 점 $\mathrm{C_1}$과 $\mathrm{C_2}$로 분리하자.



그러면 점 P는 호 $\mathrm{AC_2}$ 위를, 점 Q는 호 $\mathrm{AC_1}$ 위를 움직이고, $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 성립한다. 또한 두 선분 OP와 OQ를 이웃한 변으로 하는 평행사변형을 그리고 새로 생긴 꼭짓점을 $\mathrm{F_1}$이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OF_1}}$이 된다.



두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 크기가 일정하므로 벡터의 합 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 크기가 최소이려면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각이 가능한 π에 가까워져야 한다. 이를 위해서는 아래 그림과 같이 점 Q가 점 A에, 점 P가 점 $\mathrm{C_2}$에 위치하면 된다.



여기서 두 선분 OA와 $\mathrm{OC_2}$를 이웃한 변으로 하는 평행사변형을 그리고 새로 생긴 꼭짓점을 $\mathrm{F_2}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OF_2}}$가 성립한다.

따라서

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| \geq \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OF_2}}\right|=\frac{1}{2}$$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}$가 이루는 각을 θ로 두고

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}|=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱해서 정리하면

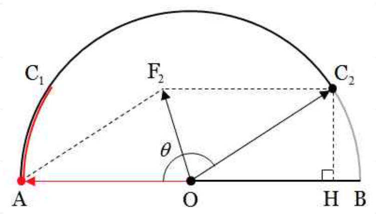
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}=\frac{1}{4}$$

$$1^2+1^2+2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}$$

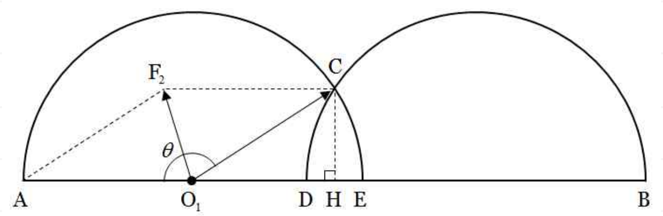
$$\cos\theta=-\frac{7}{8}$$

이 되고, 점 $\mathrm{C_2}$에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 OH의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OC_2}}\cos(\pi-\theta)=1\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$



그러므로 문제에 주어진 그림에 점 H를 표시하고 선분 AB의 길이를 구하면 다음과 같다.



$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\left(1+\frac{7}{8}\right)=\frac{15}{4}$$

$$\therefore p+q=19$$

3 15

점 P의 시각 t에서의 위치, 속도, 속력, 가속도는 각각 다음과 같다.

$$\vec{x}=(2\ln t, f(t))$$

$$\vec{v}=\left(\frac{2}{t}, f'(t)\right) \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}$$

$$\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2}, f''(t)\right)$$

그리고 점 P가 $t=1$일 때 점 $(0, f(1))$에 있으므로 시각 t에서 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s인 것은 다음의 정적분으로 표현할 수 있다.

$$s=\int_1^t\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}\,dt \qquad \cdots\cdots①$$

여기서 정적분의 피적분함수 $\sqrt{\dfrac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}$이 구간 $[1,\infty)$에서 연속이므로 정적분 $\displaystyle\int_1^t\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}\,dt$는 구간 $(1,\infty)$에서 미분가능하다.

또한 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$를 s에 대해 풀어서 미분하면

$$2t=s+\sqrt{s^2+4} \Rightarrow 2t-s=\sqrt{s^2+4}$$

$$\Rightarrow 4t^2-4ts+s^2=s^2+4 \Rightarrow 4ts=4t^2-4$$

$$\Rightarrow s=t-\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$$

이므로 ①의 양변을 t에 대해 미분해서 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2} \Rightarrow 1+\frac{1}{t^2}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2=\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2$$

$$\Rightarrow \{f'(t)\}^2=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2-\frac{4}{t^2}=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow f'(t)=\pm\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

여기에 $t=2$일 때의 점 P의 속도

$$[\vec{v}]_{t=2}=(1, f'(2))=\left(1, \frac{3}{4}\right)$$

으로부터 $f'(2)=\dfrac{3}{4}$임을 적용하면 $f'(t)$는 다음과 같다.

$$f'(t)=1-\frac{1}{t^2} \Rightarrow f''(t)=\frac{2}{t^3}$$

그러므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2}, \frac{2}{t^3}\right)$$

가 되고, $t=2$일 때의 가속도는

$$[\vec{a}]_{t=2}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

이므로

$$a=\frac{1}{4} \Rightarrow 60a=15$$

4 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 주어진 등식 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$에 포함된 벡터의 시점을 점 P로 통일하면 다음과 같다.

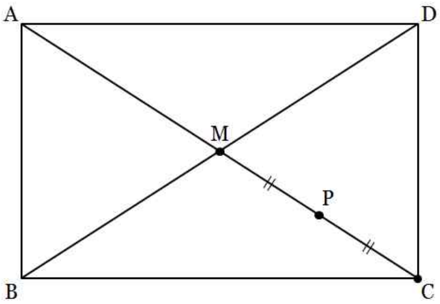
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}} \text{ (참)}$$

ㄴ. ㄱ에서 얻은 식 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}$로부터

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}})=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

가 성립하고, 점 P를 위치벡터의 시점으로 삼으면 좌변은 선분 BD의 중점의 위치벡터를 의미한다. 따라서 선분 BD의 중점을 M으로 두면 $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = -\overrightarrow{\mathrm{PC}}$가 성립하고, 다음 그림과 같이 점 P는 선분 CM의 중점이 된다.



여기서 $\overline{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4}\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이다. (참)

ㄷ. ㄴ의 그림에서

$$\overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{MP}} = 2:1 \Rightarrow \triangle\mathrm{ADM} : \triangle\mathrm{MDP} = 2:1$$

이 성립하고 $\triangle\mathrm{ADM} + \triangle\mathrm{MDP} = 3$이므로 $\triangle\mathrm{ADM} = 2$, $\triangle\mathrm{MDP} = 1$이 된다.

또한 $\triangle\mathrm{ADM} = \triangle\mathrm{MDC} = \triangle\mathrm{MCB} = \triangle\mathrm{MBA}$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $\triangle\mathrm{ADM} \times 4 = 8$이다. (참)

5 $2\sqrt{2}$

점 $\mathrm{P}(0, 0, 4)$를 지나고 $\vec{n} = (2, -2, 1)$을 법선벡터로 하는 평면 ABP의 방정식은 다음과 같다.

$$2\times(x-0) - 2\times(y-0) + 1\times(z-4) = 0$$

$$2x - 2y + z - 4 = 0$$

평면 ABP와 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$의 교점이 A, B이므로 다음 연립방정식을 풀면 두 점 A, B의 좌표가 나타난다.

$$\begin{cases} 2x-2y+z-4=0 \\ x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

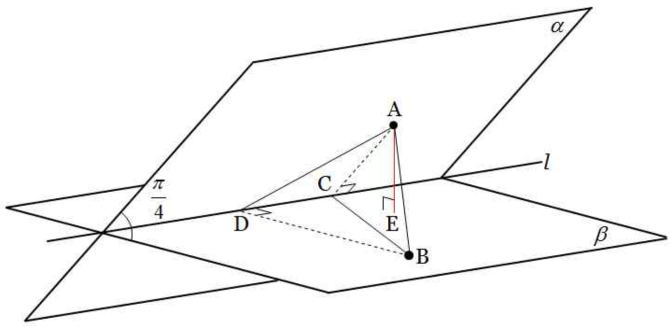
$$(x, y, z) = (2, 0, 0),\ (0, -2, 0)$$

따라서 선분 AB의 길이는

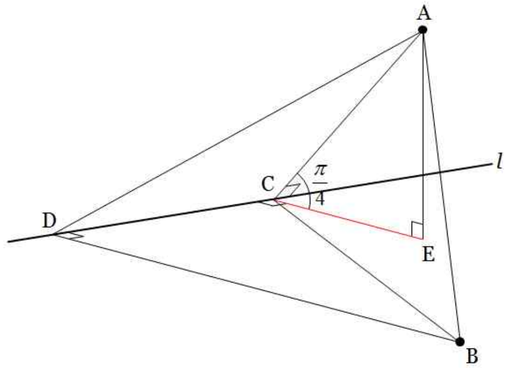
$$\sqrt{(2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

6 12

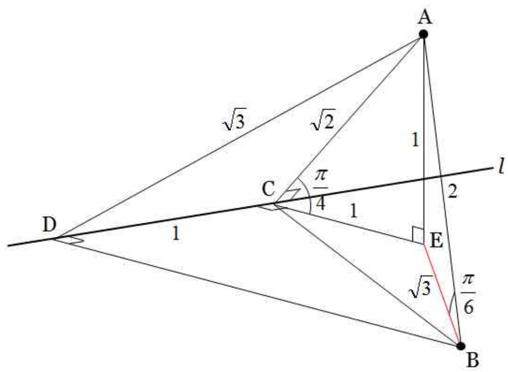
사면체 ABCD의 밑면을 삼각형 BCD로 보면, 사면체의 높이는 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 E라 할 때 선분 AE의 길이와 같다.



여기에 선분 CE를 추가하면 삼수선의 정리에 의해 $l \perp \overline{\mathrm{CE}}$가 성립하고, 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle\mathrm{ACE} = \frac{\pi}{4}$가 된다.

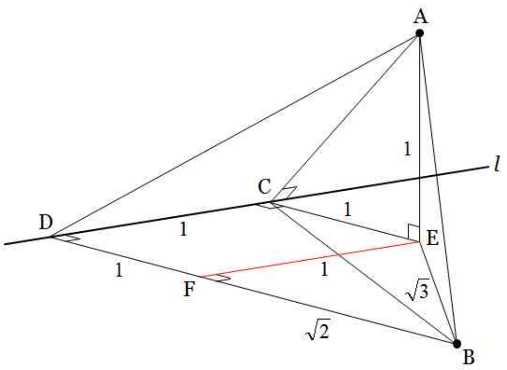


다음으로 선분 BE를 추가하면, 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle\mathrm{ABE} = \frac{\pi}{6}$가 된다. 또한 삼각형 AEB에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{AE}} = 1$, $\overline{\mathrm{BE}} = \sqrt{3}$이다.



삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CE}} = 1$, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}$이다. 이어서 삼각형 ADC는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}} = 1$이 된다.

마지막으로 점 E에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{\mathrm{EF}} = 1$, $\overline{\mathrm{DF}} = 1$이고, 삼각형 BEF가 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BF}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 1 + \sqrt{2}$가 된다.



그러므로 사면체 ABCD의 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{2})\times1\right\}\times1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$$\therefore 36(a+b)=36\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$$

7 ②

위치벡터의 시점을 O라 할 때, 선분 AB의 길이를 두 점 A, B의 위치벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 표현해서 계산하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}$$
$$=2-2\times1+2=2$$
$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}$$

같은 방법으로 선분 BC, AC의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{BC}^2=|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2$$
$$=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=2-2\times0+2=4$$
$$\therefore \overline{BC}=2$$

$$\overline{AC}^2=|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$
$$=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}$$
$$=2-2\times(-\sqrt{2})+2=4+2\sqrt{2}$$
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

각 선분 길이의 제곱을 비교하면 $2<4<4+2\sqrt{2}$이므로

$$\overline{AB}^2<\overline{BC}^2<\overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$$

8 8

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)로 두면 $y_1{}^2=4px_1$이 성립하고, 점 P에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이다. 여기에 점 $A(-k, 0)$을 대입하면

$$0=2k(-k+x_1) \Rightarrow x_1=k$$

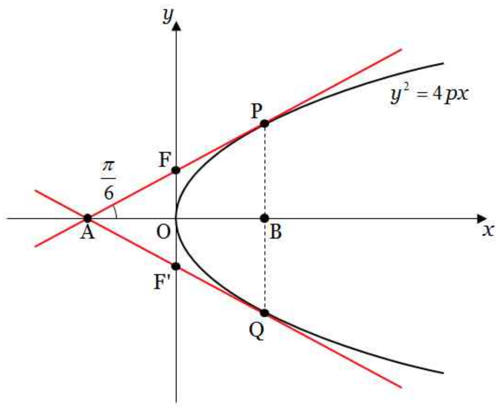
$$y_1{}^2=4px_1=4pk \Rightarrow y_1=\pm2\sqrt{pk}$$

이므로 점 P의 좌표를 $(k, 2\sqrt{pk})$라고 하면, 점 Q의 좌표는 $(k, -2\sqrt{pk})$가 된다.

또한 선분 PQ와 x축의 교점을 B라 하면 $\angle PAB=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\overline{AB}:\overline{BP}=2k:2\sqrt{pk}=\sqrt{3}:1 \Rightarrow k=3p$$

가 성립하고, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(3p, 2\sqrt{3}p)$, $(3p, -2\sqrt{3}p)$가 된다.



그리고 $\overline{OA}=k=3p$이므로 $\overline{OF}=\overline{OF'}=\frac{\overline{OA}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}p$이고, 두 점 F, F′의 좌표는 각각 $(0, \sqrt{3}p)$, $(0, -\sqrt{3}p)$가 된다.

이때, 두 점 F, F′을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축 길이가 $4\sqrt{3}+12$이므로

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=4\sqrt{3}+12$$

가 성립하고, 세 점 $P(3p, 2\sqrt{3}p)$, $F(0, \sqrt{3}p)$, $F'(0, -\sqrt{3}p)$의 좌표로 p에 대한 방정식을 만들어서 풀면 다음과 같다.

$$\sqrt{(3p)^2+(\sqrt{3}p)^2}+\sqrt{(3p)^2+(3\sqrt{3}p)^2}=4\sqrt{3}+12$$
$$2\sqrt{3}p+6p=4\sqrt{3}+12$$
$$p=\frac{4\sqrt{3}+12}{2\sqrt{3}+6}=2,\ k=6$$
$$\therefore k+p=8$$

9 12

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

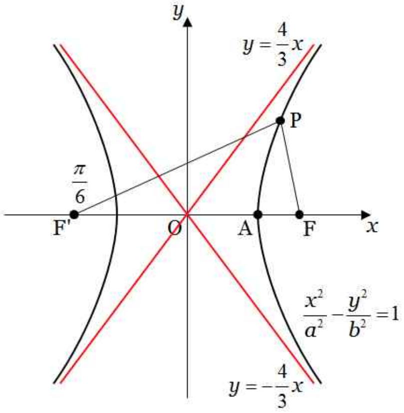
$$\frac{b}{a}=\frac{4}{3} \Rightarrow b=\frac{4}{3}a \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

가 성립하고, 쌍곡선 위의 한 점 P와 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ (단, $a^2+b^2=c^2$)에 쌍곡선의 정의와 조건 ㈎를 적용하면 다음이 성립한다.

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=30-\overline{PF}=2a \Rightarrow \overline{PF}=30-2a$$

> 조건 (가)로부터 $\overline{\mathrm{PF'}} > \overline{\mathrm{PF}}$이므로 점 P는 y축 오른쪽에 있고, 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 $\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}}$이다.

$\Rightarrow 16 \le 30-2a \le 20 \Rightarrow 5 \le a \le 7$ ………②



그리고 조건 (나)에서 꼭짓점 A의 좌표가 $(a, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AF}} = c-a = n$ (단, n은 자연수)

으로 두면

$\Rightarrow c = a+n$ ………③

이 되고, $a^2+b^2=c^2$에 ①, ③을 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$a^2+\frac{16}{9}a^2 = a^2+2an+n^2$$

$$16a^2-18an-9n^2=0$$

$$(2a-3n)(8a+3n)=0$$

$$a=\frac{3}{2}n \ (\because a>0)$$

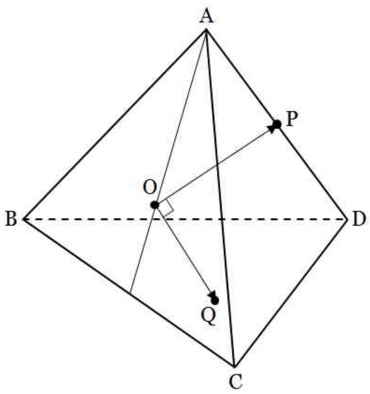
이를 ②에 대입하면

$$5 \le \frac{3}{2}n \le 7 \Rightarrow \frac{10}{3} \le n \le \frac{14}{3} \Rightarrow n=4,\ a=6$$

이므로 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=12$이다.

10 19

먼저 문제에 주어진 조건을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 시점을 점 O로 변형하면

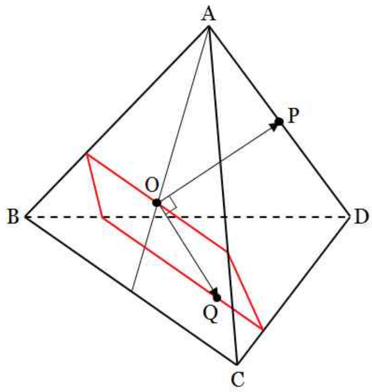
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 이용하기 위해 양변을 제곱하면 다음과 같다.

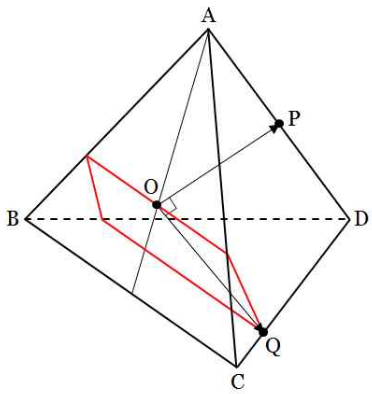
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\end{aligned}$$

여기서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$는 일정하므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$가 최대이려면 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 최대여야 한다. 그럼 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 최대이기 위한 점 Q의 위치를 알아보자.

사면체 ABCD를 점 O를 지나면서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에 수직인 평면으로 자르면 단면은 아래 그림의 빨간 사각형이 된다.

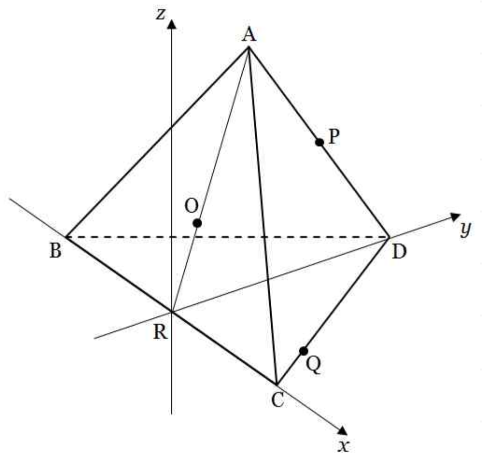


그리고 점 Q는 빨간 사각형과 밑면 BCD의 교선 위에 존재하므로, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 최대이려면 점 Q가 빨간 사각형과 모서리 BD의 교점 또는 빨간 사각형과 모서리 CD의 교점에 존재해야 한다. 이중 점 Q가 빨간 사각형과 모서리 CD의 교점에 위치하는 경우로부터 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$를 구해보자.



$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$를 직접 계산하는 것은 어렵기 때문에 좌표공간을 도입해서 두 점 P, Q의 좌표를 구하는 방법으로 접근한다.

아래 그림과 같이 모서리 BC의 중점을 R로 두고 직선 BC가 x축, 직선 RD가 y축, 그리고 점 R을 지나면서 평면 BCD에 수직인 직선이 z축이 되도록 좌표공간을 잡는다.

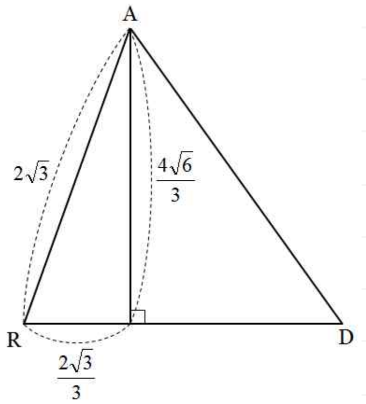


정사면체의 한 모서리의 길이가 4이므로 각 점의 좌표는 다음과 같다. (점 A의 좌표는 아래 그림 참고)

$$\mathrm{B}(-2,0,0),\quad \mathrm{C}(2,0,0),\quad \mathrm{D}(0,2\sqrt{3},0),$$

$$\mathrm{A}\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{O}\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9},\frac{4\sqrt{6}}{9}\right),$$

$$\mathrm{P}\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$



그리고 점 Q는 직선 CD 위에 있으며, 직선 CD의 방정식이

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{2\sqrt{3}-0},\ z=0 \Rightarrow x-2=-\frac{y}{\sqrt{3}},\ z=0$$

이므로 점 Q의 좌표는 $(t+2,\ -\sqrt{3}t,\ 0)$으로 둘 수 있으며, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에 의해

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\left(t+2,\ -\sqrt{3}t-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\\&\quad\cdot\left(0,\ \frac{10\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)\\&=-\frac{10}{3}t-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{5},\ \frac{2\sqrt{3}}{5},\ 0\right)$이 된다. 따라서

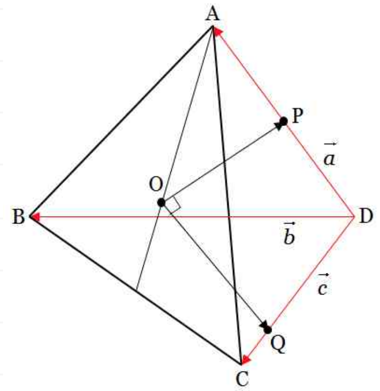
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|&=(\text{두 점 P, Q 사이의 거리})\\&=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{14\sqrt{3}}{15}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{14}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore p+q=19$$

[다른 풀이]

앞의 풀이에서는 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$를 계산하기 위해 좌표공간을 도입해서 두 점 P, Q의 좌표를 구했다. 여기서는 좌표축을 대신할 수 있도록 사면체 ABCD의 모서리로부터 서로 평행하지 않고, 한 평면 위에 있지도 않으며, 영벡터가 아닌 세 벡터를 잡아서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 표현해보자.

아래 그림과 같이 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$로 잡는다.



그러면 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DP}}=k\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\ (\text{단, } 0<k<1)$$

가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 이용해서 k의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DO}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DP}}-\overrightarrow{\mathrm{DO}})\\&=\left\{k\vec{c}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right\}\\&=\left\{-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\}\cdot\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{18}|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}\\&\quad-\frac{1}{18}\vec{b}\cdot\vec{a}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+\frac{1}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\quad+\frac{1}{6}\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2\\&=\left\{-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\right\}\times16\\&\quad+\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\left(k-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\right\}\times8\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=16\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=8\end{array}}$$

$$=\frac{20}{3}k+\frac{16}{3}=0$$

$$\therefore k=\frac{4}{5}$$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=\frac{16}{25}|\vec{c}|^2-\frac{4}{5}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|$

$=\frac{16}{25}\times 16-\frac{4}{5}\times 8+\frac{1}{4}\times 16=\frac{196}{25}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{14}{5}$

$\therefore p+q=19$