

제 2 교시

# 수학 영역(나형)

5지선다형

1.  $8^{\frac{1}{3}} \times 9^{-2}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{81}$     ②  $\frac{2}{81}$     ③  $\frac{1}{9}$     ④  $\frac{2}{9}$     ⑤ 1

2. 두 집합  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 에 대하여  $n(A-B)$ 의 값은? [2점]

- ① 2    ② 3    ③ 4    ④ 5    ⑤ 0

3.  $\log_2 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_2 3$ 의 값은? [2점]

- ① 1    ②  $\frac{4}{5}$     ③  $\frac{3}{4}$     ④  $\frac{1}{2}$     ⑤  $\frac{1}{3}$

4. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_2 = 3$ ,  $\frac{a_3}{a_1} = 4$  일 때  $a_5$ 의 값은? [3점]

- ① 24    ② 12    ③ 9    ④ 6    ⑤ 3

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2-1}-n}$ 의 값은? [3점]

- ① -1    ②  $-\frac{1}{2}$     ③ 1    ④  $\frac{1}{2}$     ⑤ 2

6. 집합  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 를 공집합이 아닌 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하면? [3점]

- ① 4    ② 6    ③ 7    ④ 10    ⑤ 15

7.  $\sum_{k=1}^{10} \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+1}$ 의 값은? [3점]

- ① 20    ② 25    ③ 30    ④ 35    ⑤ 45

8. 자연수  $n$ 에 대하여  $\frac{n(n+1)}{2}$ 을 3으로 나눈 나머지를

$a_n$ 이라고 하자.  $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 10    ② 15    ③ 17    ④ 25    ⑤ 30

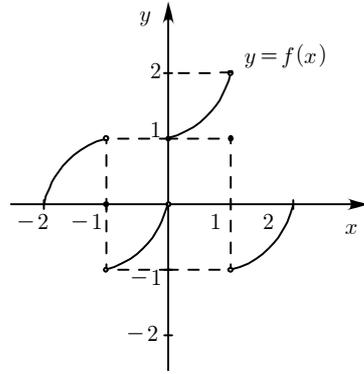
9. 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 12$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1}$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 6      ④ 9      ⑤ 12

10. 열린구간  $(-2, 2)$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 열린구간  $(-2, 2)$ 에서 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = f(x)f(-x)$ 로 정의할 때

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 의 값은? [3점]



- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

11. 어떤 물체의 온도가 낮아지는 경우 물체의 온도는 그 물체 자체의 온도와 주위의 온도차에 의하여 결정되며 어떤 물체의 처음 온도를  $T_0$ , 주위의 온도를  $S$ 라고 할 때  $t$ 분이 지난 후의 온도  $T$ 는

$$T = S + (T_0 - S)2^{kt} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

로 결정된다. 주위의 온도가  $15^\circ$ 일 때, 처음 온도가  $95^\circ$ 인 물체가 5분이 지난 후에  $35^\circ$ 로 낮아졌다. 이 물체의 온도가  $20^\circ$ 까지 낮아지려면 몇 분 더 걸리는지 구하면? [3점]

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

12. 함수  $f(x) = \frac{ax+b}{2x-3}$ 이  $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족시키고  $f(1) = 2$ 일 때  $f(10)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{17}{9}$       ②  $\frac{19}{11}$       ③  $\frac{21}{13}$       ④  $\frac{23}{15}$       ⑤  $\frac{25}{17}$

13. 1, 2, 3, 4를 모두 한번 씩만 사용하여 만든 숫자를  $A$ 라고 하자. 이 수의 배열을 반대로 하여 만든 숫자를  $B$ 라고 하자. 예를 들어  $A=1234$ 이면  $B=4321$ 이다.  $A+B$ 의 모든 자리의 수가 짝수가 되도록 하는  $A$ 의 개수는? [3점]
- ① 4      ② 5      ③ 7      ④ 8      ⑤ 10

14. 실수  $x, y$ 에 대한 두 조건

$$p: x^2 + y^2 \leq 4, \quad q: x + y \leq k$$

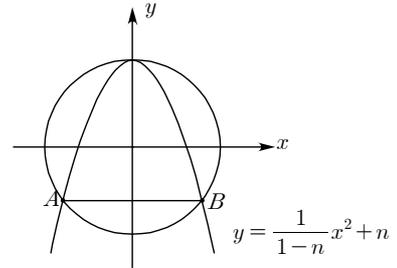
에 대하여  $p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건이 될 때  $k$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 1                      ②  $\sqrt{2}$                       ③  $2\sqrt{2}$   
 ④ 4                      ⑤  $6\sqrt{2}$

15.  $g(x) = x^2 - 4x + 1$ 에 대하여  $t^4 = g(x)$ 를 만족시키는 실수  $t$ 의 개수를  $f(t)$ 라고 하자. 함수  $y = f(t)$ 의 불연속점의 개수는? [4점]

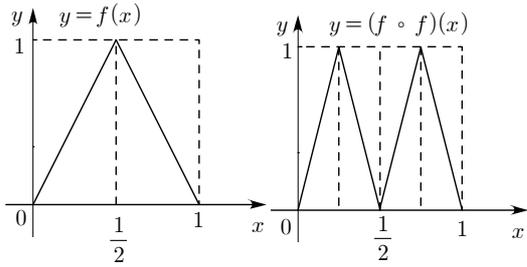
- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

16. 아래의 그림과 같이  $n \geq 2$ 인 자연수  $n$ 에 대하여  $y = \frac{1}{1-n}x^2 + n$ 과 중심이 원점이고 반지름의 길이가  $n$ 인 원이 두 점  $A, B$ 에서 만나고 있다. 선분  $\overline{AB}$ 의 길이를  $l_n$ 이라고 할 때,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{l_n^2}$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{3}{4}$       ②  $\frac{1}{8}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{1}{16}$       ⑤  $\frac{3}{16}$

17. 아래의 그림은  $0 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 와  $y=f(f(x))$ 의 그래프의 개형이다.



이 때 집합  $\{x \mid f(f(f(x))) = 0 \text{ 또는 } \frac{2}{3}, 0 \leq x \leq 1\}$ 의 모든 원소의 합은? [4점]

- ①  $\frac{13}{6}$     ②  $\frac{13}{4}$     ③  $\frac{13}{2}$     ④ 5    ⑤ 7

18. 수열  $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \text{ 일 때, 다음은}$$

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n+1}$  ..... (\*)이 성립함을 수학적 귀납적으로 증명한 것이다.

(1)  $n=1$ 일 때, (좌변) =  $\frac{1}{2}$ , (우변) =  $\frac{1}{2}$  이므로

(\*)이 성립한다.

(2)  $n=m$ 일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{m+1} \text{ 이다.}$$

$n=m+1$ 일 때, (\*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k} &\geq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{a_{m+1}} = \frac{1}{m+1} + (\text{가}) \times \frac{1}{a_m} \\ &= \frac{1}{m+1} + (\text{가}) \times \frac{m-1}{m+1} \times \frac{m-2}{m} \times \dots \\ &\qquad \qquad \qquad \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m+1} + (\text{나}) = (\text{다}) \times \frac{1}{m+2} \geq \frac{1}{m+2}$$

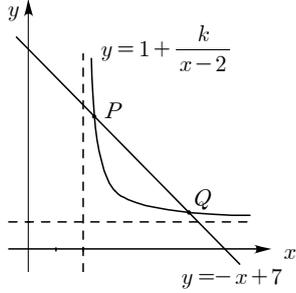
그러므로  $n=m+1$ 일 때도 (\*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각  $f(m), g(m), h(m)$ 이라고 할 때,  $f(2)g(2)h(2)$ 의 값은? [4점]

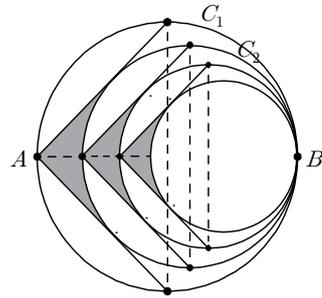
- ①  $\frac{5}{96}$     ②  $\frac{5}{72}$     ③  $\frac{5}{48}$     ④  $\frac{1}{16}$     ⑤  $\frac{1}{8}$

19. 그림과 같이 유리함수  $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 그래프와 직선  $y = -x + 7$ 가 만나는 두 점을  $P, Q$ 라 하자. 두 점의  $x$ 좌표의 곱이 15일 때, 이 두 점과 점  $(2, 1)$ 을 지나 는 원의 반지름의 값은? (단,  $k > 0$ ) [4점]



- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     ②  $\sqrt{2}$     ③  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$     ④  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$     ⑤  $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원  $C_1$ 이 있다. 호  $AB$ 의 중점을 각각  $P, Q$ 라 하자. 선분  $AP$ , 선분  $AQ$ 와 원  $C_1$ 에 동시에 내접하는 원  $C_2$ 를 그린다. 선분  $AP$ , 선분  $AQ$ 와 원  $C_2$ 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에서 선분  $AB$ 와 만나는 원  $C_2$  위의 점을  $A_1$ , 호  $A_1B$ 의 중점을 각각  $P_1, Q_1$ 이라 하자. 선분  $A_1P_1$ , 선분  $A_1Q_1$ 과 원  $C_2$ 에 동시에 내접하는 원  $C_3$ 을 그린다. 같은 방법으로 만들어지는 둘러싸인 부분의 넓이에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색 칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값 은? [4점]



- ①  $\frac{3}{4}(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$   
 ②  $\frac{3}{4}(2\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$   
 ③  $\frac{4}{7}(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$   
 ④  $\frac{4}{7}(2\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$   
 ⑤  $(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

21.  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  는 자연수이고

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  이다. 두 집합

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

$B = \{\log_2 a_1, \log_2 a_2, \log_2 a_3, \log_2 a_4, \log_2 a_5\}$  는 다음 두 조건을 만족한다.

(가)  $n(A \cap B) = 2$

(나)  $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 104이다.

이때,  $a_2 + \log_2 a_3$  의 값은? [4점]

- ① 7      ② 8      ③ 12      ④ 17      ⑤ 18

단답형

22.  ${}_n P_2 = 20$  일 때 자연수  $n$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 조건  $p: x \leq -3$  또는  $x > 5$ ,  $q: a \leq x \leq b$ 에 대하여 명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한  $a$ 의 값의 최댓값을  $M$ ,  $b$ 의 값의 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ ,  $g(x)$ 에 대하여

$h(x) = f(x) - g(x)$ 는 모든 실수에서 연속인 함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 3$ 일 때  $g(0) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 의 값을 구하시오.

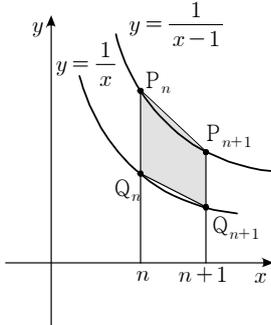
[3점]

25. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n \times 2^n} - 3 \right) = 1$ 일 때,

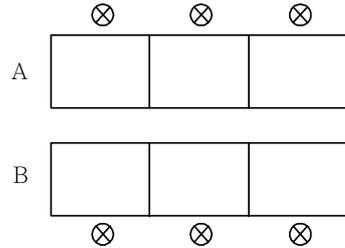
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(2n+1) \times 2^{n-1}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 세 점  $(1, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 무리함수  $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 만나도록 하는  $k$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $10(M+m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 곡선  $y = \frac{1}{x-1}$  위의 점  $P_n\left(n, \frac{1}{n-1}\right)$  ( $n=2, 3, \dots$ )  
 을 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과 만나는  
 점을  $Q_n$ 이라고 하자. 사각형  $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ 의 넓이를  
 $S_n$ 이라고 할 때,  $220 \sum_{n=2}^{10} S_n$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 남학생 3명과 여학생 3명이 있다. 이 6명의 학생이  
 그림과 같은 A, B 책상에 있는 6개의 좌석에 모두 앉  
 을 때 남학생과 여학생이 서로 마주보도록 앉는 경우의  
 수를 구하시오. [4점]



29. 등차수열  $\{a_n\}$ 이 다음의 조건을 만족한다.

$$(가) a_1 \geq 0$$

$$(나) a_{10} + a_{12} \leq 40$$

$$(다) a_2 + a_4 \leq 24$$

이때  $a_3 + a_5$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서  $A$ 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수를  $f$ 라고 하자.

(가) 함수  $f$ 는 일대일 대응이다.

(나) 어떤 양수  $d$ 에 대하여

$$d = f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n)$$

을 만족하는 정의역  $A$ 의 원소  $n$ 이 존재한다.

예를 들어  $f(1) = 5, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 4$ 는 조건을 만족하는 함수이다. 이때, 함수  $f$ 의 개수를 구하시오. [4점]

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.