2012년 6월 7일, 괴물이 상륙한다.
VI
모의고사
A급 기출문제 집중공략
MediVa

들어가기

* 의과대학은 시험이 너무 많네요. 그래도 수험생분들에게 가장 중요한 6월 모의고사가 다가오니 자료를 올려 보려고 합니다.
* 이 자료는 6월 모의고사 이후 출간될 "수학 시험의 기술(나형)"(쏠티북스)의 자료에 기반을 두고 있습니다. 책에서 다루지 못하는 가형 내용이나 어려운 나형 내용들이 칼럼의 내용이 될 것입니다.
* "수학 시험의 기술"은 다음의 수리(나)형 응시자들을 위한 책입니다.

1. 해 놓은 것은 없는데 해야 할 것은 많은 학생
2. 개념 공부를 해야 된다는데 당장 점수도 올려야 해서 갈등하는 학생
3. 수학(상)~미통기까지 수능에 나오는 것만 빠르게 추려 보고 싶은 학생
4. 두꺼운 수학책을 한 권도 아닌 두 권(수1 + 미통기)이나 풀어야 한다는 사실이 싫은 학생
~~5. MediVa님의 간지와 자상함에 반해서 팬이 된 학생~~

후덜덜한 본과생의 시험 포화에서 잠시 벗어나니 여러분들은 6월 모의고사를 보는군요. 학생의 라이프란 뭐 다 거기서 거기인 듯싶네요. 몇 가지 화두로 시작할까 합니다.

모의가 높다하되 수능 아래 시험이로다.

제아무리 모의고사가 중요하더라도 대학교에서 보는 것은 수능입니다. (일각에서는 수시에 반영한다는 설이 있으나 정시를 기준으로 생각하자) 6월 모의고사 점수가 별로여도 수능에서 어찌어찌 대박이 나면 입시전쟁은 승리로 끝이 날 것입니다.

따라서 너무 긴장하지 마시길 바랍니다. 일단 6월 모의고사는 전 범위 시험도 아니므로 수능하고 정확히 같을 수는 없습니다. (9월 모의고사가 바로 수능과 같은 범위의 시험이 될 것입니다.) 따라서 6월 모의고사를 수능과 동일시해서는 안 됩니다. 6월 모의고사 점수가 어떻게 나올지는 모르지만, 그것은 11월에 치를 수능을 대비하기 위할 지표일 뿐, 대학을 결정하지 않습니다.

골수까지 우려먹어야 하는 6월 모의고사

그렇다고 해서 6월 모의고사가 대충 치를 시험은 절대 아닙니다. 일단 문제를 받아 보면 알겠지만 그 전에 봐 오던 모의고사와 다른 유형의 문제들이 많을 것입니다. 평가원에서 문제를 내는 분들은 대학교의 교수님들로, 한 문제당 엄청난 돈이 지불됩니다. 일례로, 2010년 수능 수리(가)형의 25번 문제는 그 문제를 만드는데 수천만원이 들었다고도 하네요. 그것이 사실인지는 확실하지는 않지만, 아무튼 저렴하게 만들어진 기존의 모의고사와는 다른 문제들로 이루어진 시험이라는 것을 알아 둡시다.

앞으로 6월 모의까지 연재할 칼럼들에서는 평가원에서 냈던 문제를 골수까지 우려먹는 해설을 제공할 것입니다. 물론 6월 모의가 끝나고도 사골곰탕 해설은 제공될 예정입니다. (다만 제가 그 근처에 시험이 있어서 바로 제공하기는 힘들 것 같네요 ㅠㅠ)

기출 확인하기

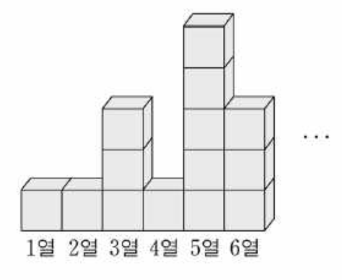
1. 발견적 추론 [2011년 수능 25번]

[2011년 수능]

25. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자. 예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



수학 시험의 기술

발견적 추론
구하라고 하는 것에서 힌트를 얻는다.

이 원칙을 제대로 이해하려면 먼저 "구하라는 것"이 무엇인지 확인해야 한다.

[2010년 6월 평가원]

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$의 값은?

[2011년 수능]

블록을 드러내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자. 예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[2011년 수능]

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오.

대부분 $\sum_{k=1}^{n} a_k$나 a_{20}의 값과 같은 것을 물어보지만 문제에 따라서 조금 독특한 형태를 물어볼 수도 있다. 그것은 문제를 푸는 데 있어서 힌트가 될 수 있다.

특히 두 번째 문제인 2011년 수능을 보면 $f(2^{n+1})$이라는 독특한 것을 물어보고 있는데, 이것은 수열의 일반항을 구할 때 2^{n+1}번째 항을 구하기가 쉽거나 2^{n+1}째 항만 식으로 나타낼 수 있다는 점을 암시한다. 다시 말하면 수열 중에서 2^{n+1} 번째 항에 수열의 규칙이 숨겨져 있을 수 있다는 것이다.

그러므로 문제에서 구하라는 형태가 좀 수상쩍은 경우 반드시 의심을 해 보아야 한다. 문제를 풀다가 답이 안 구해지는 경우는 혹시 내가 구하라는 것 말고 다른 것을 구하고 있지 않는지 생각해 보아야 할 것이다. 방금 말한 문제도 $f(2^{n+1})$이 아닌 $f(n)$을 구하라고 하면 답이 잘 나오지 않는다. 뒤에서 풀어 볼 것이다.

또, 평범한 형태라도 문제에서 $\sum_{k=1}^{14} a_k$까지만 물어봤는데 14가 넘어가는 것까지 구하고 있다면 시간낭비일 것이다. 반드시 구하라는 것을 구하자. 이것은 수능 수학에서 진리와 같은 명제다.

기출 때려잡기

2011년 수능에서 상당히 악명이 높았던 문제이다. 후덜덜한 문제 길이며, 포스있는 그림, 구하라는 것도 복잡한데 그 어느 누가 이 문제에 겁먹지 아니하리오. 그러나 **구하라는 것이 복잡하다는 사실**이 우리에게는 좋은 힌트가 될 수 있다.

일단 발견적 추론 문제라는 것이 확인되면 열심히 하라는 대로 해야 한다. 출제자가 아닌 이상 말 그대로 규칙을 "발견"해야 하기 때문이다. 그러면 뭘 하라고 했는지부터 보자.

① 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. ② 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 ③ 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다. ④ 블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$

발견적 추론 문제의 특성은 하라는 대로 하면 뭔가 보이는데, 하라는 대로 하기가 힘들다는 데 있다. 어찌 보면 문제가 수리영역이 아니고 언어영역 같다. 그래도 하라는 대로 해야 수험생이다.

발견적 추론 문제에 나온 예를 이용하면서 규칙을 찾는다.

예가 나와 있나? $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 여기 있네. 이 것을 이용해서 직접 해 보자.

자, 먼저

① 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다.

이라고 상황 설명이 되어 있다. 그냥 1열부터 숫자만 써 보자. 문제에 간지나게 그림 그려져 있다고 해서 그대로 따라서 그림 그리지 말자. 미대 갈 거라 해도 수능 시험 볼 때는 아름다운 그림 그리지 말자.

열	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	9열	10열
블록 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

이런 상황은 내가 앞에서 예로 든 문제에도 나온 것 같다. 드라마도 자주 보면 스토리가 뻔히 보이듯이 발견적 추론 문제도 보다 보면 익숙한 내용이 보인다.

② 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 ③ 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록의 개수가 짝수인 열은 2, 4, 6, 8, 10 $\cdots$니까 짝수 번째 열이고, 거기서 절반을 빼내라는 소리다. 그러면 일단 한 번 빼 내 보자.

열	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	9열	10열
블록 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
빼내기	1	1	3	2	5	3	7	4	9	5

빼내고 나니까 또 짝수 인 것이 남아 있다. 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 빼내라고 했으니까 더 빼자. 또 있나? 또 빼자.

열	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	9열	10열
빼내기1	1	1	3	2	5	3	7	4	9	5
빼내기2	1	1	3	1	5	3	7	2	9	5
빼내기3	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5

이렇게 빼내다 보니 드디어 짝수가 없다. 이 문제는 짝수만 보이면 씨를 말려 죽이라는 문제 같다.

그러면 이제 일이 다 끝난 것 같으니 일 다 하면 뭐 하라고 했는지 봐 보자.

④ 블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$

그러니까 $f(2)$라고 하면 1열부터 2열까지 블록 다 더하라는 거고, $f(3)$은 3열까지 더하라는 말. 이런 말이다. 여기까지 나열하다가 머리 아프다고 그만두지 말자. 4점짜리 문제다. 이거 하나 맞히면 인생이 바뀐다는 생각으로 문제에 임하자.

예랑 비교해 보면 $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 나오긴 한다. 음, 하라는 대로 제대로 한 모양이다.

그럼 여기서 구하라는 게 뭔지 살펴보자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$

범상치 않다. 하라는 대로 해서 일반항 찾으라고 했으면 $f(2011)$ 이런 거 물어보면 된다. 그런데 범상치 않게 $f(2^n)$을 물어보네? 의심을 해 봐야 한다.

이걸 물어보는 이유는 하라는 대로 다 하고 $f(n)$을 일반화하려고 해 볼 때 알 수 있다.

열	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	9열	10열
최종블럭	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5

을 보면서 $f(n)$을 하나하나 구해 보자. 그냥 숫자 나열만 하겠다.
1, 2, 5, 6, 11, 14, 21, 22, 31, 36, ⋯

????????

확실히 등차, 등비수열은 아니고 계차수열도 아닌 것 같다. 그러면 "여러 가지 수열"이라는 건데, ;;; 내가 모르는 수열이 또 있는 건가......? 이러다 보면 **멘탈이 와르르 무너지는 소리**가 달까지 전해질 수도 있다.

그래서 내가 “구하라는 것”을 구하라고 친절하게 써 놓은 것이다. 출제자님은 $f(n)$을 구하라고 하지 않았는데 우리들은 과도하게 충성한 나머지 시키지도 않은 일을 하고 있다. 시킨 일만 잘하자. 수능에서는 그러면 된다.

$f(2^n)$만 구해 보자.
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(4)=6$, $f(8)=22$
이것만 나열하면 1, 2, 6, 22다. 등차, 등비는 아니니 계차를 의심해 보자.
$f(2)-f(1)=1$, $f(4)-f(2)=4$, $f(8)-f(4)=16$

응? 1, 4, 16? 그러면 다음 것은 뭘까? 여기서 바로 64라고 과감하게 해도 되고, 조금 걱정되면 $f(16)$까지만 노가다를 해 봐도 되겠다. 그러면 64를 찾을 수 있을 것이다. 계차수열의 일반항이 나왔는데 우리가 구한 것이 $f(2^n)(n \geqq 0)$이라는 수열이므로, 그냥 이 녀석을 c_n이라고 바꾸자. 즉
$f(2^1)=c_1=2$
$f(2^2)=c_2=6$
$f(2^3)=c_3=22$
이라는 것이다. 계차수열은 이 때 $b_n=4^n$이 나오는 것이고. 이제 계차수열의 일반항 공식을 쓰자.

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $a_n=a_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1} 4^n+\frac{4 \cdot (4^{n-1}-1)}{4-1}=2+\frac{4^n-4}{3}=\frac{4^n+2}{3}$$
오 일반항이 나왔네. 대입해서 맞는지 확인도 해 보자. 멀쩡하게 잘 나온다.

우리는 $f(n)$은 못 구했지만 $f(2^n)=c_n=\frac{4^n+2}{3}$이라고 예쁘게 구해 놨다. 문제에서 필요한 것은 $f(2^n)$이니까 그것을 구하면 된다.

그러면 이제 남은 건 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$뿐. 대입만 하면 되겠다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{c_{n+2}}$로 쓰면 좀 더 식이 간단해 보인다. 그런데 우리는 $c_n=\frac{4^n+2}{3}$이라고 구했고, 이것은 등비수열인데, 등비수열의 극한은 떨거지 빼고 밑만 봐도 된다. 그러니까 $\frac{4^n}{3}$이라고 간단하게 생각하자. 극한이니까.

그러므로 극한은 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{4^n}{3}}{\frac{4^{n+2}}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-4^n}{4^{n+2}}=\frac{4-1}{16}=\frac{3}{16}$으로 답이 나온다.

따라서 $\frac{3}{16}$이 답이 된다. 문제에서는 분자와 분모를 더하라고 했으니까 **답은 19.**