9월 모의고사 문항 분석

28. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

식이 복잡해 보이지만, 시그마와 일반항 사이의 관계를 파악하여 식을 구해야 한다는 사실을 파악하고, 점화식을 능숙하게 다룰 수 있다면 푸는 데 큰 어려움을 요구하는 문제는 아니었다. 4점이라 어렵게 느껴졌을 수 있지만, 수열을 다루는 방법을 알고 있다면 생각보다 쉽게 풀릴 수 있는 문제였다.

Warming Up

수열 문제가 나왔는데, 간단히 수열의 성질과 점화식에 대해서 기출문제로 복습을 하고 문제풀이로 들어가도록 하자.

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2+2^n$일 때, a_1+a_5의 값은? [2010 평가원 9월]

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고 $a_{n+1}-a_n=4n-3$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [2008 평가원 6월]

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$이다.) $a_1=1,\ a_2=3, (S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_n a_{n+1}+4\,(n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$일 때, a_{20}의 값을 구하여라. [2005 9월 평가원]

기출 문제 중에서 이 문제와 관련있는 문제들을 모아 봤다. 모두 수열과 점화식의 기본 내용들을 이해할 수 있어야 풀 수 있는 문제이니만큼 풀어 보고 넘어가도록 하자.

개념 재확인

$\sum$는 무서운 기호이다. 다른 기호보다 덩치도 커서 보는 순간 위압감을 주는데 $\int$와 양대산맥을 이루는 '수학 울렁증 유발인자'라고 할 수 있다.

그러나 고등학교 과정에서는 시그마를 정확히 이해하고, 몇 가지 공식만 외워 두면 되기 때문에, 너무 겁 먹을 필요는 없는 기호이다. $\int$도 생각보다 착한 기호이지만.

기출문제 수가 많은데, 하나하나 풀어 볼 가치가 있는 문제들이다.

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2^n$일 때, $a_1 + a_5$의 값은?

간단한 문제이지만, 이 문제에서 실수하면 안 되는 것이 있어서 하나 정리하고 넘어가고자 한다.

합과 일반항의 관계

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$이라 할 때,

$a_1 = S_1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ (단, n은 2 이상의 자연수)

합에서 일반항을 구할 때, 주의할 점은 <u>초항을 구할 때는 S_n에 바로 대입해야 한다는 것</u>이다. $S_n - S_{n-1}$을 통해서 구할 때, $n=1$을 대입하면 $S_1 - S_0$이라는 말이 되지 않는 연산을 하는 것이므로 그런 것이다.

이 문제는 간단하지만, 이 내용을 간과하면 쉽게 틀릴 수 있는 문제이다. 올바른 풀이는 다음과 같다.

$a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 1 + 2 = 3$이다.

$a_5 = S_5 - S_4$이므로 $a_5 = (25 + 32) - (16 + 16) = 25$이다.

$\therefore\ a_1 + a_5 = 3 + 25 = 28$ **정답**

만약 이렇게 풀면 틀린 답이 나오게 된다.

$S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2^n) - \{(n-1)^2 + 2^{n-1}\} = 2n - 1 + 2^{n-1} = a_n$이다.

여기에 $n=1$을 대입하면 $a_1 = 2$가 되고, $n=5$를 대입하면 $a_5 = 25$가 나오므로 $a_1 + a_5 = 27$이다.

이것은 $a_1 = S_1$이라는 사실을 간과하고 $S_n - S_{n-1}$에 대입했기 때문에 발생한 결과로, 혹시 이렇게 풀고 있었다면 주의하도록 하자.

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$이고 $a_{n+1} - a_n = 4n-3$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

간단한 계차수열 문제로, 계차수열의 점화식 표현을 다시 한 번 떠올리라는 의미에서 가져와 봤다.

$a_{n+1} - a_n = 4n-3$은 $a_{n+1} = a_n + f(n)$에서 $f(n) = 4n-3$인 꼴이다.
즉, $a_{n+1} - a_n = 4n-3$이 수열 $\{a_n\}$의 계차이다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-3) = 3 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3(n-1) = 2n^2 - 5n + 6$$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10 + 6 = 156$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$이다.)
$a_1 = 1,\ a_2 = 3, (S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4\,(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$일 때, a_{20}의 값을 구하여라.

시그마와 관련이 있는 S_n이 나오고, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$이라는 표현이 나와서 확인해 볼 문제이다. $S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$이라는 사실을 캐치하고 식을 정리하면 그리 어렵지는 않은 문제이다.

$S_{n-1} + (a_n + a_{n+1}) = S_{n+1}$을 이용한다.

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

$(a_n + a_{n+1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

${a_n}^2 + 2a_n a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

${a_{n+1}}^2 - 2a_{n+1}a_n + {a_n}^2 = 4$

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 4$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 2$ ($\because\ a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$)

$a_{n+1} - a_n = 2$는 수열 $\{a_n\}$이 이웃하는 두 항의 차이가 2로 항상 일정한 등차수열을 나타내므로

$a_n = 1 + 2(n-1)$

$\therefore\ a_{20} = 1 + 2(20-1) = 39$

이제 기출문제 풀이로 들어가 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

문제에 있는 표현들을 다시 한 번 확인해 보도록 하자.

① 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$

말 그대로 $a_1 = 10$이라는 것이다. 나중에 쓰일 것이라 생각할 수 있다.

② $a_n < a_{n+1}$

수열이 점점 커지고 있다는 것임을 보여주는데, 나중에 활용될 수 있을 것이다.

③ $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$

문제풀이의 핵심이 되는 식이다. 이 식을 어떻게 다루느냐에 따라서 4점을 얻을 수 있는지 없는지가 결정될 것이다.

먼저 알아두어야 할 것은 $a_n = S_n - S_{n-1}(n \geqq 2)$를 적용하는 S_n 은 $\sum_{k=1}^{n} a_n$와 같다는 것이다.

이 문제에서는 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$이라는 복잡한 표현이 등장하고 있는데, 여기서 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2$를 어떻게 처리할지를 생각해 보자.

언뜻 $(a_{k+1}-a_k)^2$을 전개해 볼까 생각할 수 있지만, 그 다음 아무것도 할 수 없다. $\sum_{k=1}^{n} k$ 등 시그마에 대한 공식이 존재하지만 이 문제에서는 일반항을 알 수가 없기 때문에 무의미한 전개이다.

여기서 $(a_{k+1}-a_k)^2 = b_k$으로 생각하는 것이 필요하다. 이렇게 치환을 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = S_n = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$라는 관계가 성립되어 $b_n = S_n - S_{n-1}(n \geqq 2)$을 이용할 수 있기 때문이다. 수열에 익숙한 사람은 치환을 하지 않고도, 이 생각을 할 수 있을 것이다.

$S_n - S_{n-1}$을 이용하여 시그마를 제거하면 $b_n = (a_{n+1}-a_n)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right) - 2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$이라는 공식이 도출되며, 우변을 계산하면

$(a_{n+1}-a_n)^2 = -\frac{2}{9^n} + \frac{2}{9^{n-1}} = \frac{2}{9^n}(-1+9) = \frac{16}{9^n}$ 이 된다.

16과 9는 모두 자연수의 제곱이므로, 좌변의 제곱을 풀기 좋은 식이 된다. 수능 문제는 이처럼 계산을 간편하게 만들어 주는 경우가 많다.

앞에서 $a_n < a_{n+1}$임을 확인했기 때문에, $a_{n+1} - a_n > 0$이 되어, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4}{3^n}$이 된다.

이제부터는 간단한 계차수열이다. 계차는 초항이 $\dfrac{4}{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등차수열로, 일반항을 구하는 데 문제가 없다.

계차수열의 해법은 다음과 같다.

계차수열의 해법

원수열 $\{a_n\}$: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n \quad \cdots$

계차수열 $\{b_n\}$: $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad \cdots$

$$\rightarrow a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$
$$= a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$
$$= (\text{원수열의 첫째항}) + (\text{계차수열의 제}(n-1)\text{항까지의 합})$$
$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

경우에 따라서 계차가 일반항을 구하기 힘들면 직접 대입하는 방식을 취하기도 하지만, 대개 계차가 우리가 알고 있는 등차, 등비수열 중 하나인 경우가 많고, 이 문제도 그러하다.

계차수열의 일반항 공식 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$을 활용하여 a_n을 구해 주자.

$a_n = 10 + \dfrac{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$이다. 등비수열의 합 공식을 사용했다는 것을 확인하자.

식을 전개하기 전에 문제에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 물어봤기 때문에 $\dfrac{1}{3^{n-1}} \to 0$으로 계산해주면 계산이 빨라질 수 있다.

계산하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 10 + 2 = 12$가 된다.

→ 답 : 12

요약

28. ① 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

② $a_n < a_{n+1}$, ③ $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \dfrac{1}{9^n}\right)$

을 만족시킬 때, ④ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

③에서 합과 일반항의 관계를 활용
→ ② 식을 정리할 때 활용
→ ① 정리한 식이 계차수열의 일반항임을 확인하고 일반항을 구할 때 활용
→ ④ 계산 중간에 극한 계산을 해서 식을 간단히 정리