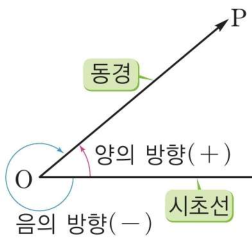
Chapter 3

삼각함수

1.시초선, 동경, 각의 부호

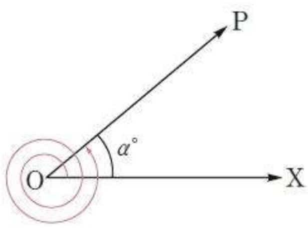
1) 시초선과 동경

오른쪽 그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX와 OP로 이루어진 도형을 ∠XOP라고 한다. ∠XOP의 크기는 반직선 OP가 고정된 반직선 OX의 위치에서 시작하여 점 O를 중심으로 회전할 때, 그 회전 한 양으로 정의한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다.



2) 각의 부호

동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 반대 방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다. 각의 크기는 회전 방향이 양의 방향이면 양의 부호 (+)를, 음의 방향이면 음의 부호 (−)를 붙여서 나타낸다.



2. 일반각

1) 일반각

동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가 $\alpha°$일 때, ∠XOP의 크기는

$$360° \times n + \alpha° \quad (n\text{은 정수})$$

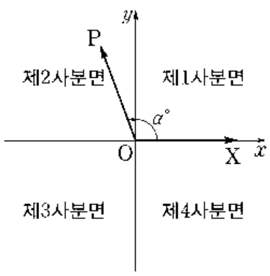
와 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

2) 사분면

좌표평면에서 x축의 양의 방향을 시초선 OX로 잡았을 때, 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면 중 어느 사분면에 있는가에 따라 동경 OP가 나타내는 각을

각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의

각이라고 한다.



3. 호도법과 라디안

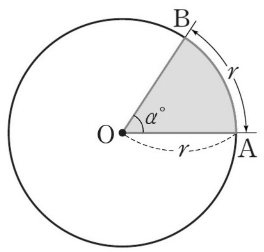
반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 호의 길이
는 중심각의 크기에 비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha° : 360°, \text{ 즉 } \alpha° = \frac{180°}{\pi}$$

이다. 따라서 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이와 관계없이 항상 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\frac{180°}{\pi}$를 1라디안이라고 하며, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

1) 호도법과 육십분법 사이의 관계

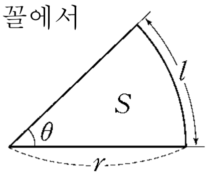
$$1\text{라디안} = \frac{180°}{\pi}, \quad 1° = \frac{\pi}{180}\text{라디안}$$



4. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$



[증명]

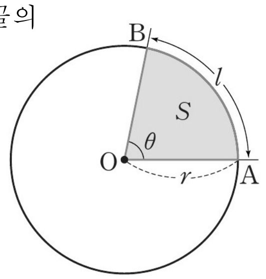
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \text{ 즉 } l = r\theta$$

이다. 또 부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로

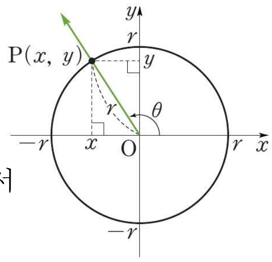
$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi, \text{ 즉 } S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

이다. 이때 $l = r\theta$이므로 $S = \frac{1}{2}rl$이다.



5. 삼각함수의 정의

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 일반각 θ를 나타내는 동경과 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원의교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 r의 값에 관계없이 다음비의 값



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

는 θ의 값에 따라 각각 한 가지로 정해진다. 따라서

$$\theta \rightarrow \frac{y}{r},\quad \theta \rightarrow \frac{x}{r},\ \theta \rightarrow \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

와 같은 대응은 모두 θ에 대한 함수이다.

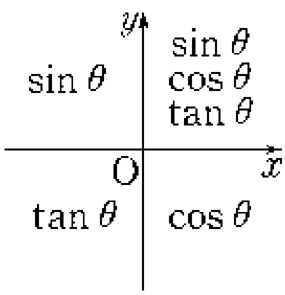
이때 각 함수를 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan x = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

와 같이 나타낸다. 또 이들을 통틀어 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

6. 삼각함수의 부호

삼각함수 \ 사분면	제1사분면 $(x>0,\ y>0)$	제2사분면 $(x<0,\ y>0)$	제3사분면 $(x<0,\ y<0)$	제4사분면 $(x>0,\ y<0)$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−



7. 단위원

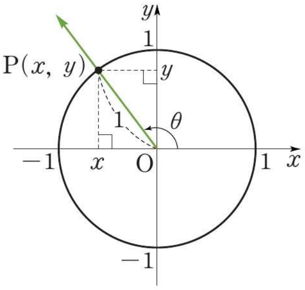
오른쪽 그림과 같이 크기가 θ인 각을 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$, $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

이다. 이 식들로부터

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

임을 알 수 있다.



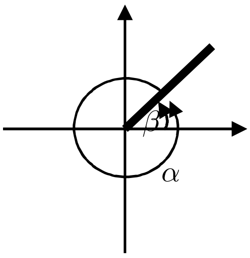
8. 삼각함수 사이의 관계

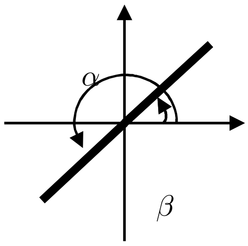
❶ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

❷ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

9. 삼각함수의 각의 변환

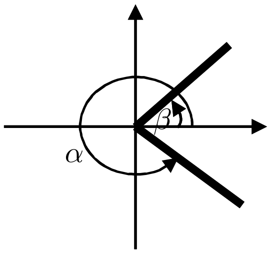
① 일치한다. ② 일직선상에 있고 방향이 반대이다.





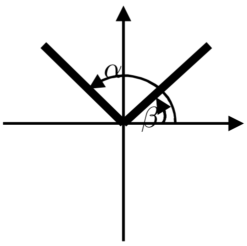
$\alpha-\beta=360^\circ n$(단, n은 정수) $\alpha-\beta=360^\circ n+180^\circ$

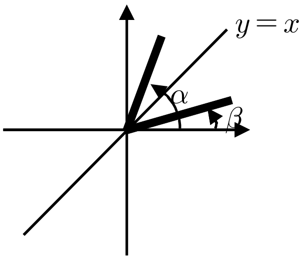
③ x축에 관하여 대칭이다.



$\alpha+\beta=360^\circ n$

④ y축에 관하여 대칭이다. ⑤ $y=x$에 관하여 대칭이다





$\alpha+\beta=360^\circ n+180^\circ$ $\alpha+\beta=360^\circ n+90^\circ$

주어진 각을 $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$의 꼴로 변형한 후 삼각함수와 부호를 다음과 같이 결정한다.

① 함수 n이 짝수 : 함수가 그대로

n이 홀수 : sin과 cos은 반대로, tan은 역수로

② 부호 $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$ 가속한 사분면에서 원래 주어진 삼각함수의 부호를 따른다.

	$2n\pi+\theta$	$-\theta$	$\pi-\theta$	$\frac{\pi}{2}\pm\theta$
sin	$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
cos	$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
tan	$\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

2. 삼각함수 그래프의 성질

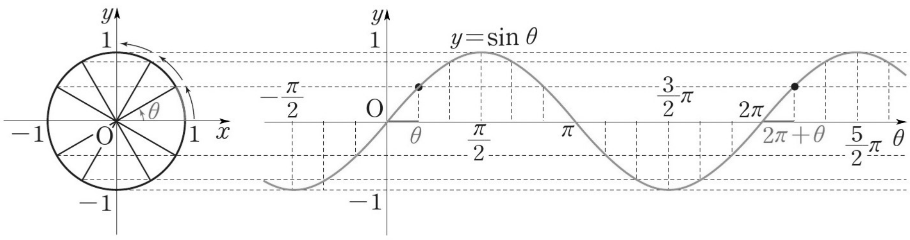
1) $y = \sin x$

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

이다. 따라서 θ의 값이 변할 때, $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표로 정해진다.

이를 이용하여 각 θ의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\sin\theta$의 값을 세로축에 나타내어 함수 $y = \sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

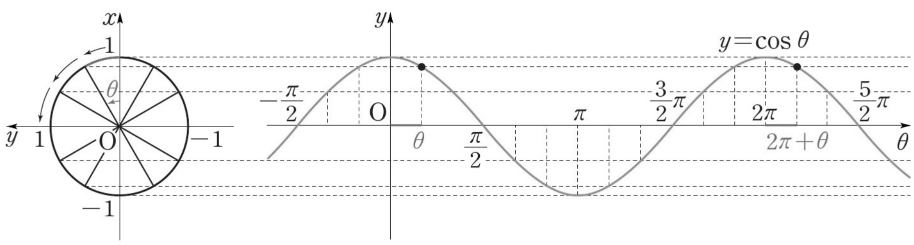


2) $y = \cos x$

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는
동경이 단위원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

이다. 따라서 θ의 값이 변할 때, $\cos\theta$의 값은 점 P의
x좌표로 정해진다. 이를 이용하기 위하여 좌표축을
원점을 기준으로 양의 방향으로 $90°$ 회전한 후 각 θ
의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\cos\theta$의 값을 세로축에 나타내어 함수
$y = \cos\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



) $y = \tan x$

오른쪽 그림과 같이 $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때,

각 θ를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 P(x, y)라 하고

원 위의 점 A$(1, 0)$에서의 접선이 직선 OP와 만나는 점을 라고 하면

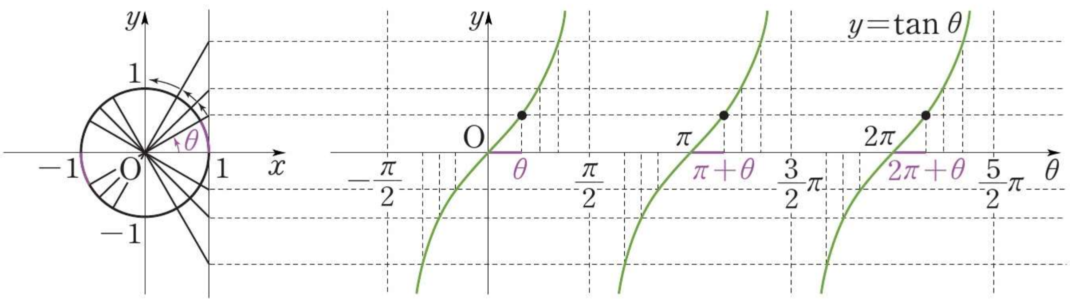
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

이다.

즉 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표이다.

이를 이용하여 각 θ의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\tan\theta$의 값을

세로축에 나타내어 함수 $y = \tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



2. 삼각함수의 닮음이동과 평행이동

1) 닮음이동

① 두 함수 $y = a\sin bx$ $y = a\cos bx$의

치역은 $\{y| -|a| \le y \le |a|\}$, 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$

② 함수 $y = a\tan bx$의

치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\dfrac{\pi}{|b|}$

[예]

$y = 2\sin 2x$

$y = -3\cos 2x$

$y = -3\tan(-2x)$

2) 평행이동

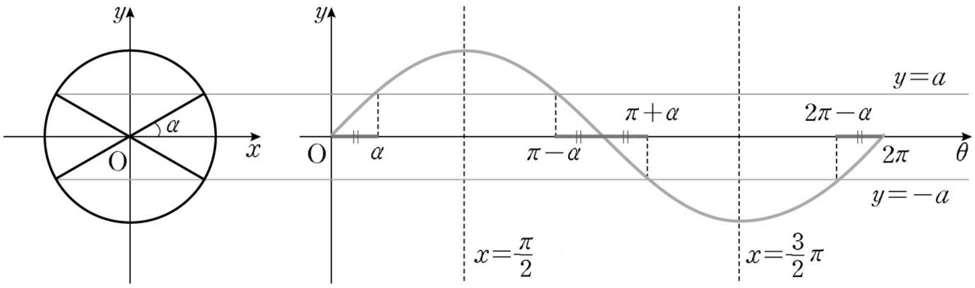
삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y = a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert + d$	$-\lvert a\rvert + d$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y = a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert + d$	$-\lvert a\rvert + d$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y = a\tan(bx+c)+d$			$\dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$

3. 삼각방정식과 부등식 : 단위원과 그래프

1) 방정식 $\sin x=a$ $(0<a<1)$의 해

$\sin x=a(0\leq x<2\pi)$의 한 근이 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$이면 다른 근은 $\pi-\alpha$이다.

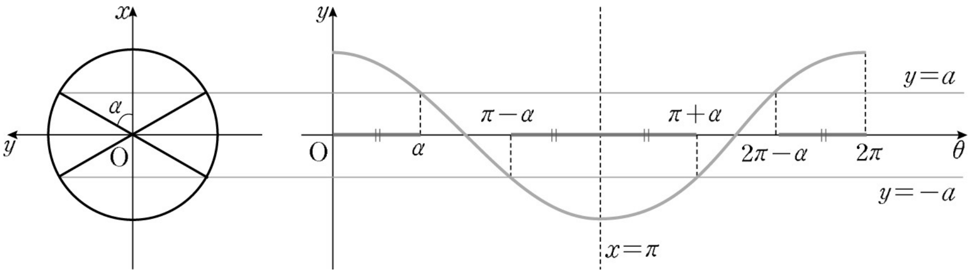
또, $\sin x=-a(0\leq x<2\pi)$의 두 근은 $\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$이다.



2) 방정식 $\cos x=a$ $(0<a<1)$의 해

$\cos x=a(0\leq x<2\pi)$의 한 근이 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$이면 다른 근은 $2\pi-\alpha$이다.

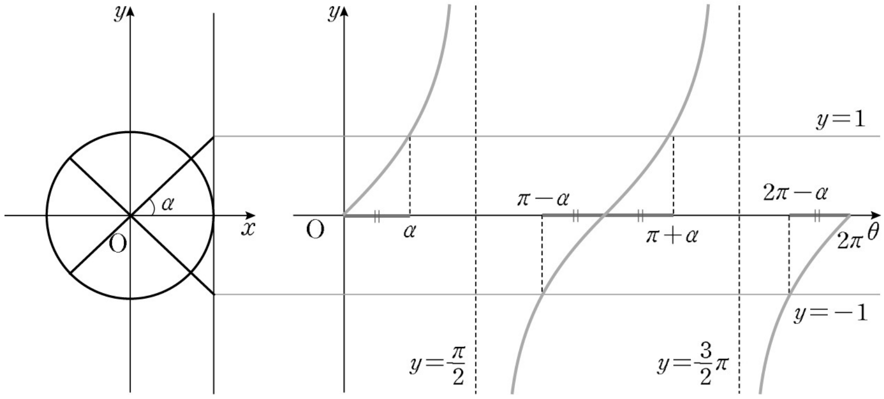
또, $\cos x=-a(0\leq x<2\pi)$의 두 근은 $-\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$이다.



3) 방정식 $\tan x=a$ (a 는 모든 실수)의 해

$\tan x=a(0\leq x<2\pi)$의 한 근이$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$이면 다른 근은$\pi+\alpha$이다.

또, $\tan x=-a(0\leq x<2\pi)$의 두 근은$\pi-\alpha$, $2\pi-\alpha$이다.


y
x
O
α
y
O
α
π−α
π+α
2π−α
2π
θ
y=1
y=−1
y=π/2
y=3/2π

수능특강

1. $\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$ 의 값은?

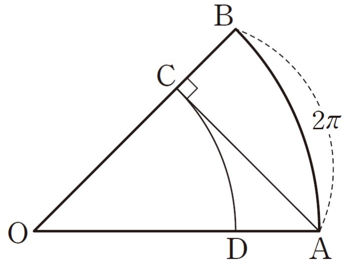
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 값은?

(가) $\sin\theta \times \cos\theta < 0$
(나) 좌표평면에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 6θ가 나타내는 동경이 서로 일치한다.

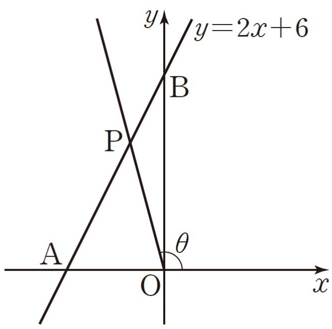
① $\frac{8}{5}\pi$ ② 2π ③ $\frac{12}{5}\pi$ ④ $\frac{14}{5}\pi$ ⑤ $\frac{16}{5}\pi$

3. 그림과 같이 중심이 O이고 호 AB의 길이가 2π, 넓이가 8π인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 C, 점 O를 중심으로 하고 반지름이 선분 OC인 원이 선분 OA와 만나는 점을 D라 할 때, 호 CD의 길이는?



① $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$
④ $\sqrt{2}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$

4. 좌표평면에서 직선 $y=2x+6$과 x축 및 y축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta\times\cos\theta$의 값은? (단, $0\leq\theta<2\pi$이고, O는 원점이다.)



① $-\frac{2}{17}$ ② $-\frac{4}{17}$
③ $-\frac{6}{17}$ ④ $-\frac{8}{17}$ ⑤ $-\frac{10}{17}$

5. $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 4$를 만족시키는 θ에 대하여 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 두 근이 $2\sin^2\theta$, $2\cos^2\theta$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

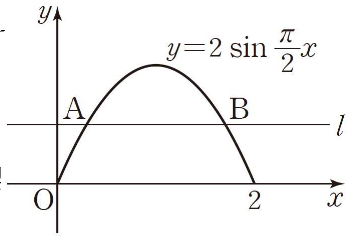
6. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^2 - (2\cos\theta)x - \sin^2\theta - 2\cos\theta + 2 \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha \le \theta \le \beta$이다. $4\alpha + \beta$의 값은?

① π ② $\dfrac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\dfrac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

7. $0 \le x \le 2$일 때, 그림과 같이 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 x축에 평행한 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}$일 때, $\left(\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^2$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$이고, O는 원점이다.)



① 2 ② $\frac{13}{5}$ ③ 3 ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ 4

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$ (단, $-1 \le x \le 1$)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 2n-1$에서 방정식

$$(2n-1)f(x)=2x$$

의 서로 다른 실근의 개수가 51일 때, n의 값을 구하시오.

수능완성 (나)

9. 밑면의 반지름의 길이가 1인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 겉넓이가 4π일 때, 이 원뿔의 옆면의 전개도인 부채꼴의 중심각의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$　　② $\frac{\pi}{3}$　　③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2}{3}\pi$　　⑤ $\frac{5}{6}\pi$

10. 제 4사분면의 각 θ에 대하여

$$3\cos\frac{\theta}{2}=\left|\cos\frac{\theta}{2}-5\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

일 때, $\tan\frac{\theta}{2}$의 값은?

① $-\frac{8}{5}$　　② -1　　③ $-\frac{2}{5}$

④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{4}{5}$

11. 함수

$$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}-2\sin^2 x$$

의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ -1

12. 부등식

$$3\cos\frac{\pi(x+3)}{6}-2\sin^2\frac{\pi x}{6}>1$$

을 만족시키는 20이하의 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 38 ② 44 ③ 50

④ 56 ⑤ 62

수능완성 (가)

13. $\sin\theta\cos\theta > 0$, $\cos\theta\tan\theta < 0$을 동시에 만족시키는 모든 실수 θ에 대하여

$$|\sin\theta+\cos\theta| - \sqrt{\sin^2\theta} + \sqrt[3]{(\tan\theta+\cos\theta)^3}$$
$$= a\sin\theta + b\cos\theta + c\tan\theta$$

가 성립한다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

14. $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

15. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $A(cos^2\theta,\ f(\cos^2\theta))$, $B(\sin^2\theta,\ f(\sin^2\theta))$에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}$이다. 직선 AB의 기울기는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

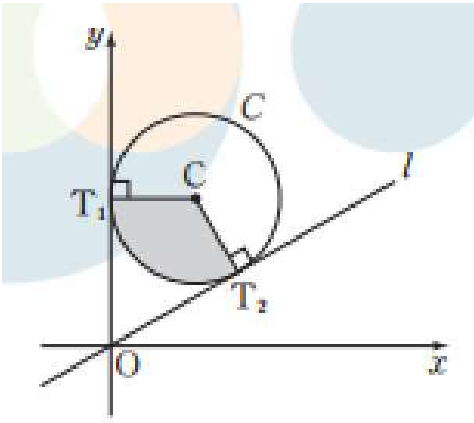
16. 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭일 때, 서로 다른 두 θ의 값을 각각 α, β라 하자. $\sin\alpha+\sin\beta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)

① 1 ② $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

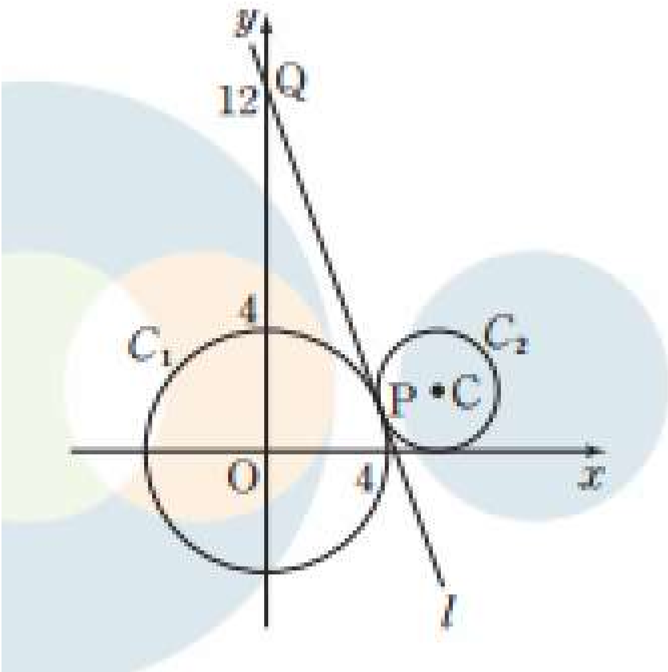
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

17. 좌표평면에서 중심이 C이고, 반지름의 길이가 3인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\frac{\pi}{6}$인 직선을 l이라 하자. 그림과 같이 원 C가 y축과 직선 l에 동시에 접하고, 접할 때의 접점을 각각 T_1, T_2라 하자. 색칠되어 있는 부채꼴 CT_1T_2의 넓이가 $k\pi$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(단, 점 C는 제1사분면에 있는 점이다.)



18. 그림과 같이 좌표평면에서 원 C_1 : $x^2+y^2=16$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선 l과 y축이 만나는 점 Q의 y좌표는 12이다. 원 C_1과 점 P에서 접하고 x축에 동시에 접하는 원을 C_2라 하고, 원 C_2의 중심을 C라 하자. $\tan^2(\angle \mathrm{CQP})=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



19. 주기가 $\frac{\pi}{3}$인 함수 $f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$의 그래프가 두 점 $(0,\ 2)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지날 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $f\left(\frac{(a+b+c)\pi}{2}\right)$의 값은? (단, $b>0$)

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

20. $0 \le x < 4\pi$일 때, 직선 $y=k\left(0<k<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$와 만나는 점의 x좌표의 합은 k의 값에 관계없이 일정한 값 S를 갖는다. $\frac{S}{\pi}$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

21. 함수 $f(x)=a\tan(bx+c)+d$가 다음 조건을 만족시킬 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $a\times b\times c\times d=k\pi$이다. 상수 k의 값을 구하시오. (단, $b>0$, $0<c<\pi$)

> (가) 함수 $f(x)$의 주기는 함수 $y=\sin 4x$의 주기와 같다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
> (다) $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=4$

22. $0\leq x<\pi$일 때, 두 함수 $f(x)=\sin(\pi\cos^2 2x)$, $g(x)=\cos(\pi\cos^2 2x)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$를 만족시키는 서로 다른 모든 정수 x의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답

1) [정답] ④

2) [정답] ③

3) [정답] ④

4) [정답] ②

5) [정답] ②

6) [정답] ⑤

7) [정답] ④

8) [정답] 26

9) [정답] ④

10) [정답] ③

11) [정답] ④

12) [정답] ①

13) [정답] ④

14) [정답] 17

15) [정답] ④

16) [정답] ①

17) [정답] 3

18) [정답] 33

19) [정답] ①

20) [정답] ④

21) [정답] 3

22) [정답] ⑤