

지수, 로그 그래프에서의 진위판단

수능이나 모의고사에 잇을만하면 나오는 문제 중 하나가 지수함수와 로그함수를 포함하는 진위판별 문제입니다. 이번 6평에서도 아래와 같은 문항이 가형에서 18번으로 출제되었죠.

2020학년도 6월 (가) 18번

18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$
- ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$
- ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이러한 문항이 어렵게 느껴지는 가장 큰 이유는, 문제에서 주어진 값들을 정확히 구할 수 없는 경우가 대부분이기 때문입니다. 즉 방정식의 해를 구하기보다는 다른 정보들을 활용하여 등식이나 부등식을 끌어내야 하는 경우가 많습니다. 이때 활용할 수 있는 정보가 매우 많고 그중에서 어떤 정보를 사용할지 정하는 것이 힘들기에 이러한 유형의 문제를 해결하는 것이 더욱더 어렵게 느껴질 것입니다. 이 칼럼에서는 진위판별에 종종 사용되는 도구들에 무엇이 있고, 어떤 상황에서 각 도구가 사용되는지 정리해보고자 합니다.

진위판별에 사용할 수 있는 도구는 아래와 같습니다.

- 1) 그래프의 형태
- 2) 그래프의 위치 관계
- 3) 직선의 기울기
- 4) 넓이

1, 2, 3번은 굉장히 많이 사용되므로 반드시 알아두도록 합시다. 아직 4번은 출제되지는 않았으나 이 유형이 가형 범위에 포함되면서 충분히 출제 가능할 것으로 보입니다. 각각을 자세히 살펴보고

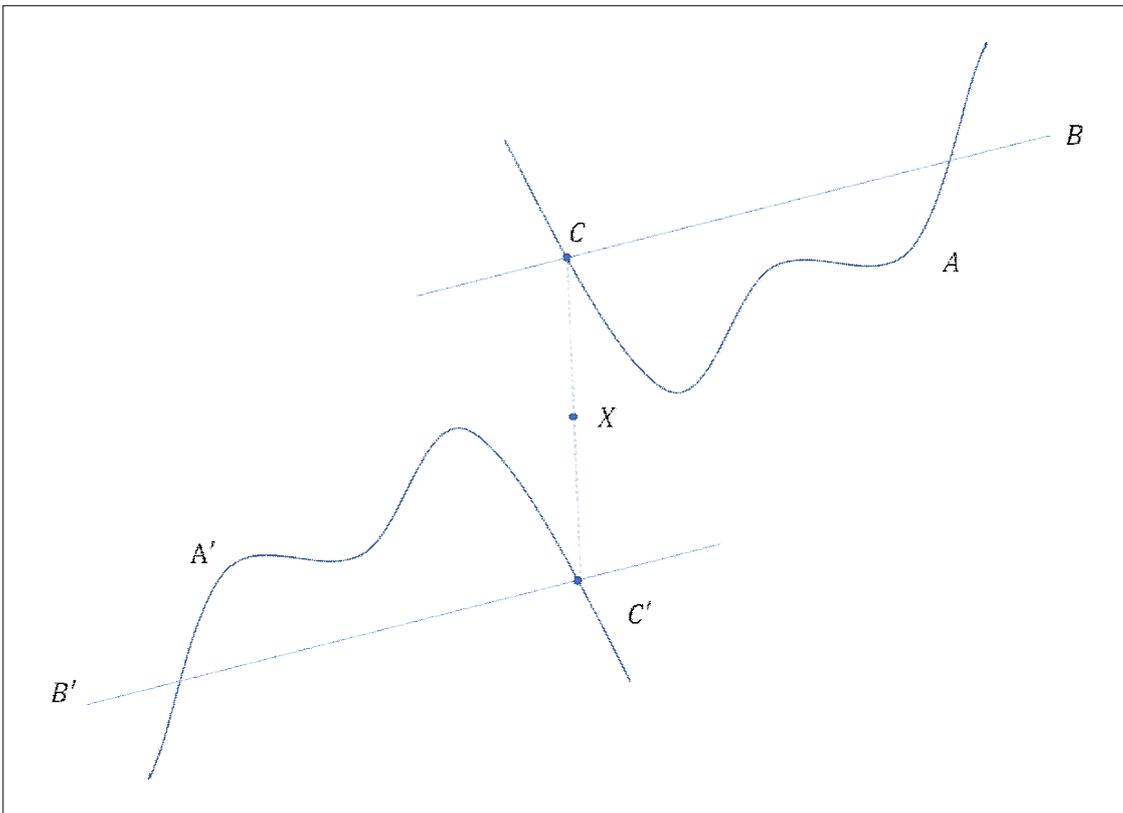
록 합시다.

1. 그래프의 형태

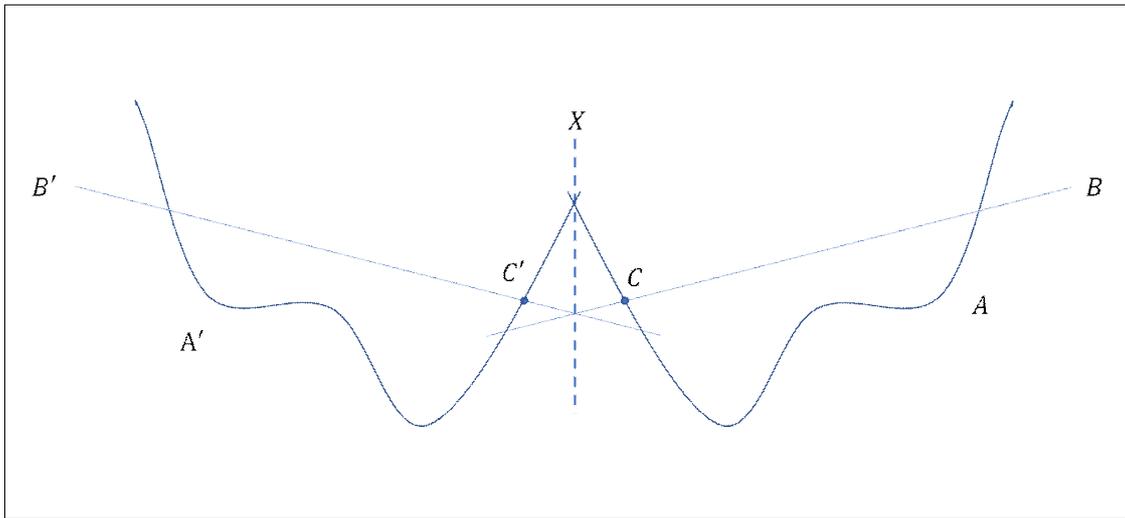
그래프의 형태에서 가장 먼저 살펴보아야 할 것은 **대칭성**입니다. 로그함수/지수함수가 동시에 등장한다면, 가장 먼저 두 함수가 **역함수(선대칭) 관계**에 있지 않은지를 생각해보아야 합니다.

그래프의 교점을 분석할 때도 대칭성을 사용할 수 있습니다. 그래프 A 와 그래프 B 의 교점이 C 일 때, A 와 B 를 X 에 대해 대칭 시킨 그래프 A' 와 B' 의 교점 C' 는 C 와 X 에 대해 대칭이 됩니다. 글로만 보면 어려워 보일 수 있지만, 그림을 보면 자명한 성질임을 알 수 있습니다.

X 가 점인 경우



X가 선인 경우

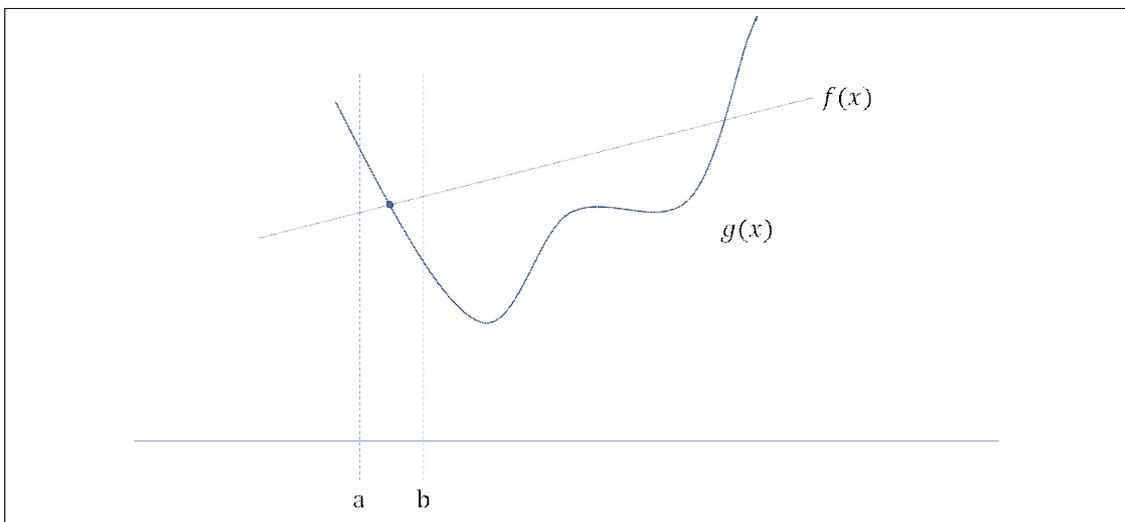


2. 그래프의 위치 관계

그래프의 위치 관계를 통해서 주어진 점들의 x 좌표나 y 좌표에 관한 간단한 부등식들을 만들 수 있습니다. 한 그래프가 다른 그래프보다 위/아래에 있다면, 같은 x 좌표에서의 y 좌표를 비교할 수 있습니다. 마찬가지로 한 그래프가 다른 그래프보다 왼쪽/오른쪽에 있다면 같은 y 좌표에서의 x 좌표를 비교할 수 있습니다.

해의 범위를 알아내는 것 역시 그래프의 위치 관계와 사이값 정리를 활용합니다. $f(a) > g(a)$ 이고, $f(b) < g(b)$ 라면 a 와 b 사이에 $f(x) = g(x)$ 의 해가 존재한다는 사실을 사이값 정리를 통해 알 수 있습니다. 이를 이용해 해의 범위에 대한 부등식을 알아내는 방법은 자주 사용되므로 반드시 알아야 합니다.

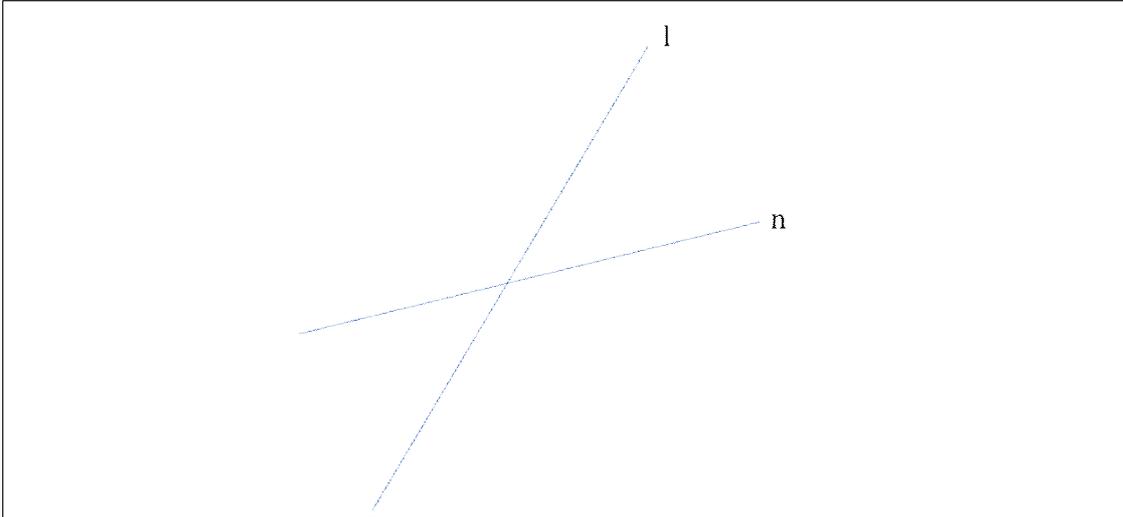
해의 범위



3. 직선의 기울기

직선의 기울기 역시 자주 사용됩니다. 특히 x 좌표의 차와 y 좌표의 차를 비교하는 부등식이 나올 때 직선의 기울기를 적극적으로 활용할 수 있습니다. 두 직선의 기울기를 비교하는 상황은 주로 다음과 같습니다.

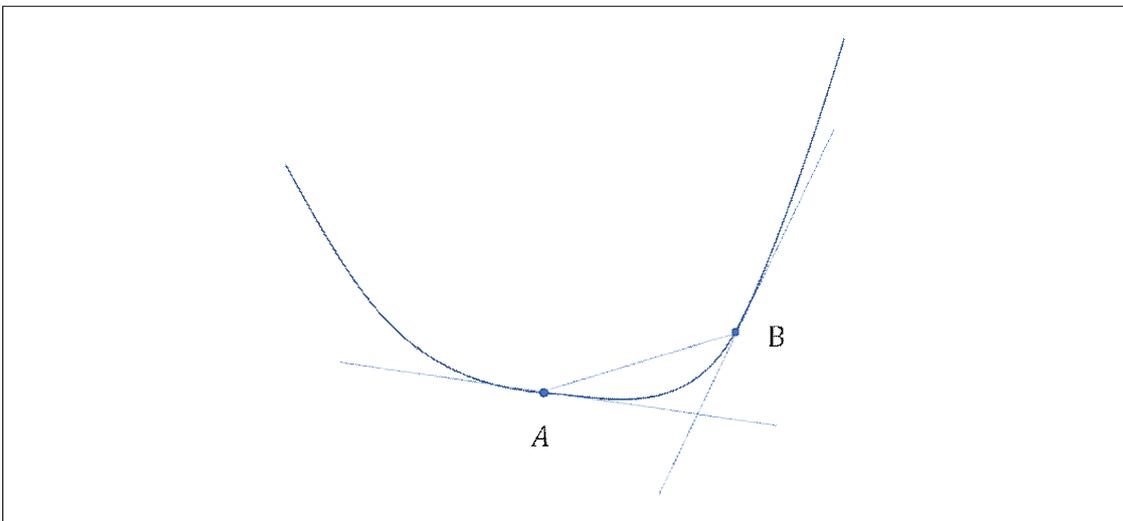
기울기의 비교



위와 같이 두 직선이 교차한다면, 직선 l 의 기울기가 직선 n 의 기울기보다 크다는 것을 확인할 수 있겠죠? 이때 중요한 것은, 기울기를 비교할 두 직선을 잡는 것입니다. 문제에서 얻고자 하는 정보를 최대한 많이 뽑아낼 수 있는 점들의 기울기를 비교해야 합니다.

접선의 기울기 역시 고려해볼 수 있습니다. 이때는 그래프의 오목/볼록을 고려해야 합니다.

오목/볼록과 기울기

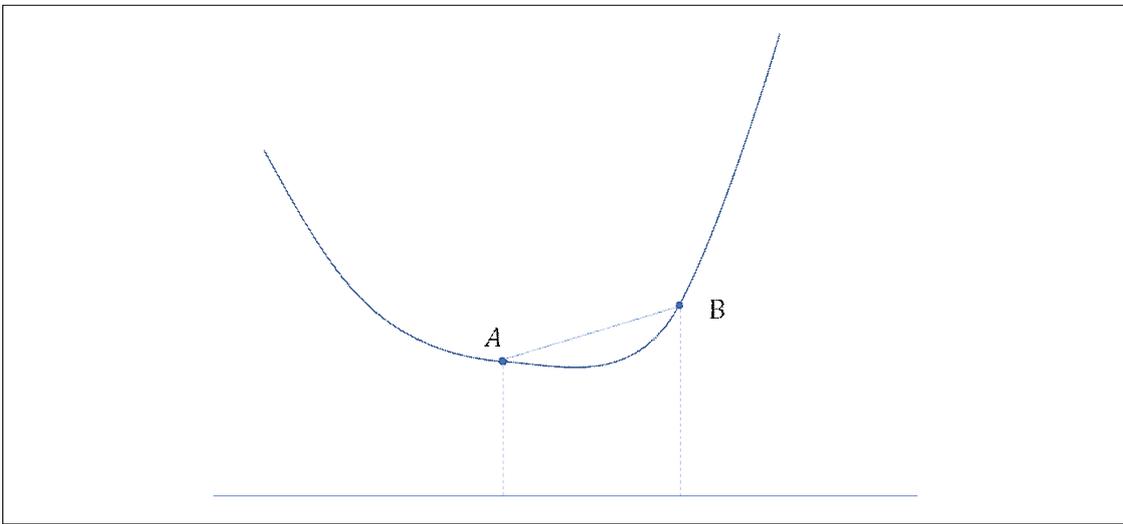


위와 같이 아래로 볼록인 그래프라면, 두 점 A 와 B 를 잇는 직선의 기울기가 A 에서의 접선의 기울기보다 크고, B 에서의 접선의 기울기보다는 작습니다. 위로 볼록인 그래프라면 위의 정보가 반대로 바뀌겠죠.

4. 넓이

넓이 역시 중요한 단서가 될 수 있습니다. 한 그래프가 다른 그래프보다 아래에 있다면, 그래프 아래 부분의 넓이 역시 더 작겠죠? 정적분을 활용하여 그래프 아래의 넓이를 구한다면 유용한 부등식을 얻을 수 있을 것입니다. 이때 역시 그래프의 오목과 볼록을 사용할 수 있습니다.

오목/볼록과 넓이



위와 같이 아래로 볼록한 그래프에서는, A 와 B 를 잇는 직선 아래의 넓이가 그래프 아래의 넓이보다 큼니다. 역시 위로 볼록인 그래프에서는 반대가 되겠죠.

문제가 단순하다면 위의 방법들로 하나의 등식/부등식을 끌어내 문제를 해결할 수 있겠지만, 문제가 더 복잡해진다면 여러 개의 등식/부등식을 엮어야 할 수도 있습니다. 위에서 많은 도구를 알려주었지만 이런 문제 유형에서 가장 중요한 것은, 참/거짓을 판단하는 데 도움이 되는 정보들을 최대한 많이 끌어낼 수 있는 식을 만드는 것임을 항상 기억해야 합니다.