2021학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 19 강종우)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

답은 $9\sqrt{2}$ 이다.

2) [정답] ③ (출제자 : 20 김태희)

[출제의도] 간단한 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2+16n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+16n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+16n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+16n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+16n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{16n}{\sqrt{4n^2+16n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{16}{\sqrt{4+\frac{16}{n}}+2} = \frac{16}{2+2} = 4$$

3) [정답] ⑤ (출제자 : 19 백수정)

[출제의도] 간단한 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$|\sin\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $|\tan\theta| = 1$ 이다.

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 일 때 $\tan\theta > 0$ 이므로 $\tan\theta = 1$ 이다.

4) [정답] ④ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A^C \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{2}{5}$ 이므로

$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{3}{5}$ 이다.

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C) + \mathrm{P}(A \cap B)$ 이므로

구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$ 이다.

5) [정답] ① (출제자 : 19 정재훈)

[출제의도] 함수의 연속을 이용하여 주어진 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = k\ln 2$ 이고 $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = 4$ 이므로 $k = \frac{4}{\ln 2}$ 이다.

6) [정답] ④ (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 이산확률변수의 표본평균의 평균을 알고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

크기가 2 인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$ 이므로

$\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $-a+b = -\frac{1}{5}$ 이다. … ㉠

한편, 확률의 총합은 1 이므로 $2a+b=1$ 이다. … ㉡

두 식 ㉠, ㉡ 을 연립하면 $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ 이다.

따라서, $\mathrm{P}(X \ge 0) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = a+b = \frac{3}{5}$ 이다.

7) [정답] ③ (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+2k}{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{2k}{n}}{\frac{k}{n}}$$ 에서

$\frac{k}{n} = x_k$ 라 하면 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이고 $x_n \to 1$, $x_{2n} \to 2$ 이므로

정적분과 급수의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+2k}{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \Delta x \times \frac{1+2x_k}{x_k}$$

$$= \int_1^2 \frac{1+2x}{x}dx = [\ln x + 2x]_1^2 = 2 + \ln 2$$ 이다.

8) [정답] ② (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 대칭성을 이용하여 주어진 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 OCA 의 넓이가 삼각형 OCB 의 넓이의 3 배이고

밑변이 선분 OC 로 공통이므로
두 삼각형의 넓이의 비는 두 점 A , B 의 y 좌표의 비와 같다.

두 점 A , B 의 y 좌표를 각각 $3k$, k 라 하면
두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
점 A 의 좌표는 $(k, 3k)$ 이다.

점 A 의 좌표를 주어진 원의 방정식에 대입하면
$k^2+(3k)^2=10k^2=10$, $k=1\,(\because k>0)$ 이므로
점 A 의 좌표는 $A(1, 3)$ 이다.
따라서 점 A 는 $y=a^x$ 위의 점이므로 $x=1$, $y=3$ 을 $y=a^x$ 에 대입하면
$a=3$ 이다.

9) [정답] ③ (출제자 : 20 정원철)
[출제의도] 원순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
먼저 5 명의 학생이 원형으로 앉는 경우의 수는 $\frac{5!}{5}=4!=24$ 이다.
빈자리가 서로 이웃하지 않기 위해서는
학생과 학생 사이에 빈자리는 최대 1 개여야 한다.

학생이 앉은 자리가 5 개이므로
학생 사이에 빈자리를 배치하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$ 이다.

따라서 빈자리가 서로 이웃하지 않도록 5 명의 학생이 원탁에 앉는 경우의 수는 $24\times10=240$ 이다.

10) [정답] ⑤ (출제자 : 19 정지혁)
[출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식이
$y=2x-5$ 이므로 $f'(2)=2$ 이다.
또, 직선 $y=2x-5$ 는 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 $f(2)=-1$ 이다.

$g'(x)=\left(\frac{f(2x)}{x}\right)'=\frac{2xf'(2x)-f(2x)}{x^2}$ 이므로
$g'(1)=2f'(2)-f(2)=2\times2-(-1)=5$ 이다.

[별해]
몫의 미분법이 곱의 미분법을 통해 유도되므로
곱의 미분법을 이용해 $g'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.

[해설]과 같은 방법으로 $f(2)=-1$, $f'(2)=2$ 이다.
$g(x)=\frac{f(2x)}{x}$ 이므로 모든 양의 실수 x 에 대하여
$xg(x)=f(2x)$ 이다. 또, 이 식으로부터 $g(1)=f(2)=-1$ 이다.

위 식의 양변을 미분하면 $xg'(x)+g(x)=2f'(2x)$ 이고,
이 식에 $x=1$ 을 대입하면 $g'(1)+g(1)=2f'(2)$ 이다.

그런데, $g(1)=f(2)=-1$ 이므로
$g'(1)=2f'(2)-g(1)=2\times2-(-1)=5$ 이다.

11) [정답] ⑤ (출제자 : 20 송문주)
[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]
$\angle CAB=\theta$ 라 하자.
주어진 원의 넓이가 10π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.
사인법칙에 의해 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}=2\sqrt{10}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.
$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$ 이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.
선분 AC 의 길이를 구하기 위해서 코사인법칙을 사용하면
$(2\sqrt{5})^2+\overline{AC}^2-2\times2\sqrt{5}\times\overline{AC}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=(2\sqrt{2})^2$ 이 된다.
$\overline{AC}^2-8\overline{AC}+12=0$ 이므로 $\overline{AC}=2$ 또는 $\overline{AC}=6$ 이다.

i) $\overline{AC}=2$ 일 경우
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=28>4=\overline{AC}^2$ 이므로 $\angle ABC<\frac{\pi}{2}$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $\overline{AC}=6$ 일 경우
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=28<36=\overline{AC}^2$ 이므로 $\angle ABC>\frac{\pi}{2}$ 가 되어 조건을 만족시킨다.

따라서 선분 AC 의 길이는 6 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 20 김동해)
[출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]
정삼각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sec t)^2$ 이다.
따라서 구하는 입체도형의 부피는
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sec t)^2dt=\frac{\sqrt{3}}{4}[\tan t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

13) [정답] ① (출제자 : 19 박석준)
[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

[해설]
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여
$f(x)=\cos(ax-b)+c$, $g(x)=\cos x+c$ 라 하자.

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $c+1$ 이고,
주어진 그림에서 그 값은 $\frac{3}{2}$ 이므로 $c=\frac{1}{2}$ 이다.

주어진 그림의 $0\le x\le3\pi$ 에서

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리는 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

$0 \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $g(x)=0$ 의 두 실근은 각각 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$ 이므로

곡선 $y=g(x)$ 와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 주기에 비례하고 그 값은 각각 $\frac{2}{a}\pi$, 2π 이므로 $\frac{4}{3}\pi : \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{a}\pi : 2\pi$ 이다. 따라서 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

$f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x-b\right)+\frac{1}{2}$ 에서 $f(3\pi)=0$ 이다.

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-b\right)+\frac{1}{2}=0$ 와 $0<b<\frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는

b 의 값은 $\frac{\pi}{6}$ 뿐이므로 $b=\frac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 $abc=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{24}$ 이다.

[별해]

c 를 유추한 후에 주어진 함수의 x 절편 값을 대입하여 미지수를 찾을 수 있다. 이에 대한 식을 세워보면,

$0=\cos\left(\frac{5}{3}a\pi-b\right)+\frac{1}{2}$

$0=\cos(3a\pi-b)+\frac{1}{2}$ 이다.

$a>0$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ 의 범위에서 주어진 두 식을 만족하는 a, b 의 값은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}\pi$ 이다. 따라서 $abc=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{24}$ 이다.

14) [정답] ⑤ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 중복조합을 이용해 주어진 조건에 대한 수학적 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$a+b+c+3d=16$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $d=1, 2, 3, 4$ 일 때 각각의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수의 합과 같다.

$d=1$ 일 때, $a+b+c=13$ 이고

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (단, A, B, C 는 정수이고 $A\ge 0$, $B\ge 0$, $C\ge 0$ 이다.)로 치환하여

식에 대입하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=13$, $A+B+C=10$

즉 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{10}$ 이다.

위와 같은 방법으로 $d=2, 3, 4$ 일 때 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 각각 ${}_3\mathrm{H}_7$, ${}_3\mathrm{H}_4$, ${}_3\mathrm{H}_1$ 이다.

따라서 전체 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{10}+{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_1=120$

한편 $a+b+c=16-3d$ 임을 이용하여 주어진 조건의 식을 변형시키면 $\frac{a+b+c}{d}=\frac{16-3d}{d}=\frac{16}{d}-3$ 이다.

$\frac{16}{d}-3$ 의 값이 자연수여야 하므로 $\frac{16}{d}$ 의 값은 4 이상의 자연수여야 한다.

즉 $d=1, 2, 4$ 일 때 $\frac{16}{d}$ 의 값이 각각 16, 8, 4 로 조건을 만족시킨다.

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $d=1, 2, 4$ 일 때 각각의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수의 합 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{10}+{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_1=105$

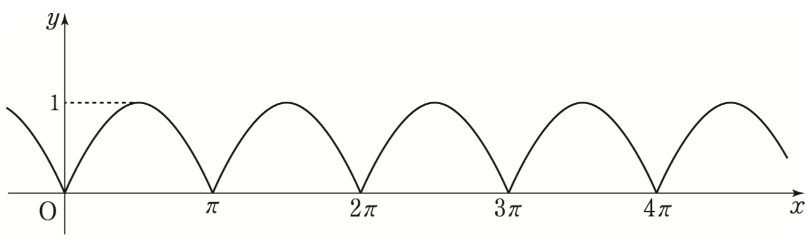
따라서 구하는 확률은 $\frac{105}{120}=\frac{7}{8}$

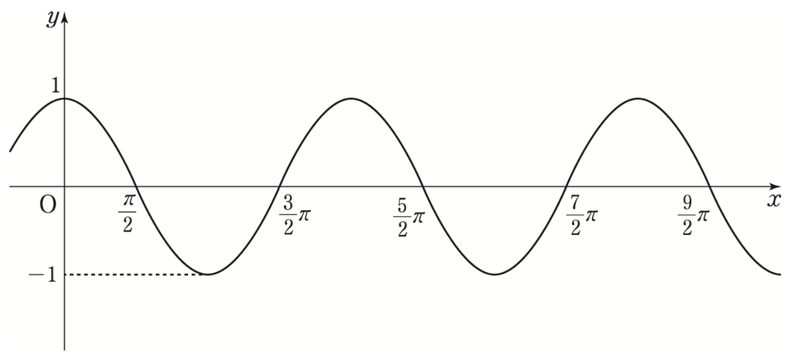
15) [정답] ③ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 삼각함수의 주기와 정적분의 값의 관계를 이용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

구간 $x\ge 0$ 에서 $y=|\sin x|$ 와 $y=\cos x$ 그래프는 다음과 같다.





$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ 이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=2$ 이고

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin x|dx=1$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=-1$ 이므로

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=0$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 주기함수이므로 $\int_0^t f(x)dx=6=2+2+2$ 를 만족시키는 t 의 값은 $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$ 이다. 하지만, 구간 $(0\le x<a)$ 에서 조건을 만족시키는 모든 t 의 값의 합이 $\frac{11}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi+3\pi$ 라고 했으므로 $\frac{7}{2}\pi$ 가 들어갈 수 없다.

따라서 $3\pi<a\le\frac{7}{2}\pi$ 가 되어야 하므로 a 의 최댓값은 $\frac{7}{2}\pi$ 이다.

16) [정답] ① (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 확률밀도함수의 특징을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $g(x)$ 의 그래프가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로

$g(3-x)=g(3+x)$ $(0\le x\le 3)$

이 식에 $x=1, 2, 3$ 을 각각 대입하면

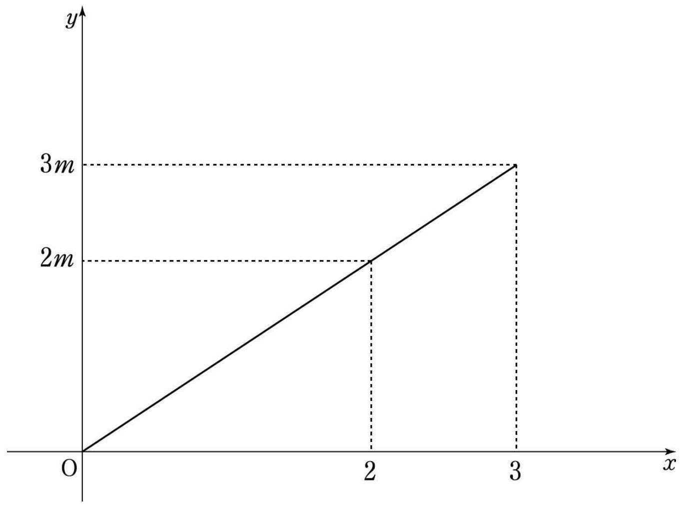
$g(2)=g(4)$, $g(1)=g(5)$, $g(0)=g(6)$ 이다.

따라서 $g(0)+g(1)+g(2)=g(4)+g(5)+g(6)$ 이고,

$\mathrm{P}(0 \le X \le 3) = \mathrm{P}(4 \le X \le 7)$ 이다.

그런데 $g(3) = \mathrm{P}(3 \le X \le 4) = \dfrac{1}{7}$ 이고, $\mathrm{P}(0 \le X \le 7) = 1$ 이므로

$\mathrm{P}(0 \le X \le 3) = \mathrm{P}(4 \le X \le 7) = \dfrac{3}{7}$ 이다.



$\mathrm{P}(0 \le X \le 3) = \dfrac{3}{7}$ 이므로 $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 3m = \dfrac{3}{7}$,

$m = \dfrac{2}{21}$ 이다.

$f(2) = 2m$, $g(4) = g(2) = \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$ 이고,

$\mathrm{P}(2 \le X \le 3) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times (2m+3m) = \dfrac{5}{2}m$

따라서 $f(2) + g(4) = \dfrac{9}{2}m$ 이고, $m = \dfrac{2}{21}$ 이므로

$\dfrac{9}{2} \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{3}{7}$

17) [정답] ② (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 수학적 귀납법을 사용하여 주어진 식이 성립함을 보일 수 있는가?

[해설]

(가) : $\dfrac{2}{(m+2)(m+3)}$ / (나) : $m+1$ / (다) : $\dfrac{1}{m+3}$

(가)

주어진 식은 공통인 식 $\dfrac{1}{m+1}$ 로 묶어 정리하는 과정이다.

$a_{m+1} = \dfrac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$ 이므로

$$1 - \frac{1}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2} + a_{m+1} + \frac{1}{m+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{m+1} \times \left(1 - \boxed{\frac{2}{(m+2)(m+3)}}\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2}$$

이다. 따라서 (가)에 알맞은 식은 $\dfrac{2}{(m+2)(m+3)}$ 이다.

(나), (다)

(가)에서 $\dfrac{2}{(m+2)(m+3)} = \dfrac{2}{m+2} - \dfrac{2}{m+3}$ 이므로

이를 다시 정리하면

$$1 - \frac{1}{m+1} \times \left(1 - \frac{2}{m+2} + \frac{2}{m+3}\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{m+1} + \frac{2}{\boxed{(m+1)}(m+2)} - \frac{2}{\boxed{(m+1)}(m+3)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+1} - \frac{2}{m+2} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+3} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{m+2} + \boxed{\frac{1}{m+3}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+2}$$

이다. 따라서 (나), (다)에 들어갈 알맞은 식은 각각 $m+1$, $\dfrac{1}{m+3}$ 이다.

$f(m) = \dfrac{2}{(m+2)(m+3)}$, $g(m) = m+1$, $h(m) = \dfrac{1}{m+3}$ 이므로

$f(6) = \dfrac{2}{8 \times 9} = \dfrac{1}{36}$, $g(8) = 8+1 = 9$, $h(3) = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$ 이다.

따라서, $f(6) \times g(8) \times h(3) = \dfrac{1}{36} \times 9 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$ 이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 19 윤황규)

[출제의도] 조건부 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

주머니에서 임의로 1 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 4 번 반복하는 것은 처음부터 주머니에서 4 개의 공을 꺼낸 후 꺼낸 4 개의 공을 임의로 배열하는 것과 같다.

4 개의 공을 배열할 때 첫 번째 적힌 공부터 순서대로 a, b, c, d 라 하면

이때 가능한 경우들은 $|a-b| < |c-d|$, $|a-b| > |c-d|$,

$|a-b| = |c-d|$ 이다.

꺼낸 4 개의 공을 임의로 배열하였으므로

$|a-b| < |c-d|$ 일 확률과 $|a-b| > |c-d|$ 일 확률은 같다.

즉, $|a-b| = |c-d|$ 일 확률을 p_1,

$|a-b| < |c-d|$ 일 확률을 p_2 라 할 때,

$p_1 + 2p_2 = 1$, $p_2 = \dfrac{1-p_1}{2}$ 이다.

따라서 $|a-b| \le |c-d|$ 일 확률은 $p_1 + \dfrac{1-p_1}{2} = \dfrac{1+p_1}{2}$ 이다.

순서쌍 (a, b, c, d) 에 대하여

i) $|a-b| = |c-d| = 1$

순서쌍 (a, b, c, d) 가

$(2, 1, 3, 4)$, $(2, 1, 3, 2)$ 이면 된다.

이때 $(2, 1, 3, 4)$ 의 경우 $(3, 4, 1, 2)$ 와 같이 바뀌는 경우 2 가지

$(1, 2, 3, 4)$ 과 같이 1 과 2 의 위치만 바뀌는 경우 2 가지

$(2, 1, 4, 3)$ 과 같이 3 과 4 의 위치만 바뀌는 경우 2 가지

주머니에 있는 숫자 2 를 각각 구분하는 경우가 2 가지이므로

구하는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.

$(2, 1, 3, 2)$ 의 경우의 수도 위와 마찬가지로 구하면 16 이다.

ii) $|a-b| = |c-d| = 2$

순서쌍 (a, b, c, d)가

$(3, 1, 4, 2)$ 이면 된다.

이 경우도 위와 마찬가지로 경우의 수를 구하면 16 이다.

i), ii)에 의해 $|a-b| = |c-d|$ 일 확률은 $\dfrac{16 \times 3}{{}_5\mathrm{P}_4} = \dfrac{2}{5}$ 이므로

$|a-b| \le |c-d|$ 일 확률은 $\dfrac{1+\frac{2}{5}}{2} = \dfrac{7}{10}$ 이다.

$|a-c| = 3$ 이려면 $a=4$, $c=1$ 또는 $a=1$, $c=4$ 이다.

$a=4$, $c=1$ 일 때 $|a-b| \le |c-d|$ 를 만족시키기 위해서

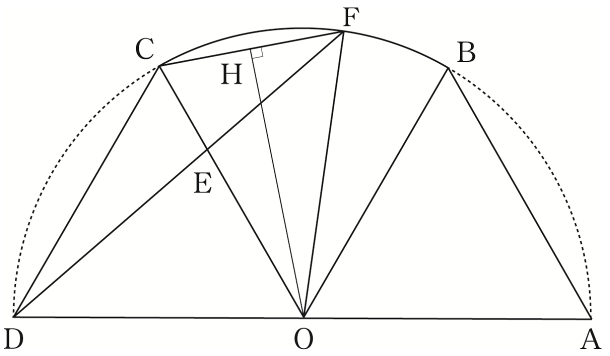
순서쌍 (a, b, c, d) 로 가능한 것은 $(4, 3, 1, 2)$ 또는 $(4, 2, 1, 3)$ 이고 각각 가능한 경우의 수는 2 가지이므로 총 4 가지이다.
$a=1$, $c=4$ 일 때 $|a-b| \le |c-d|$ 를 만족시키기 위해서 순서쌍 (a, b, c, d) 로 가능한 것은 $(1, 2, 4, 2)$, $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 3, 4, 2)$ 이고, 각각 가능한 경우의 수는 2 가지이므로 총 6 가지이다.
$|a-b| \le |c-d|$ 이고 $|a-c|=3$ 일 확률은 $\dfrac{4+6}{{}_5\mathrm{P}_4} = \dfrac{1}{12}$ 이다.

구하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{5}{42}$ 이다.

19) ③ (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에서의 등비급수를 구할 수 있는가?

[해설]



두 삼각형 OAB, OCD 는 정삼각형이므로 네 선분 OA, OB, OC, OD 의 길이는 모두 같고, 점 F 는 호 BC 위의 점이므로 점 A, B, C, D, F 는 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3 인 원 위의 이다.

삼각형 CDE 에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{DE}}^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 7$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{7}$ 이다.

또, 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin(\angle \mathrm{DCE})} = \dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}$ 이므로
$\sin(\angle \mathrm{CDE}) = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$ 이다.

삼각형 CDF 에서 지름에 대한 사인법칙을 이용하면
$6 = \dfrac{\overline{\mathrm{CF}}}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CF}} = 6 \times \dfrac{\sqrt{21}}{14} = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ 이다.

점 O 에서 선분 CF 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
삼각형 OCF 는 이등변삼각형이므로 점 H 는 선분 CF 의 중점이다.
따라서 $\overline{\mathrm{HF}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ 이다.

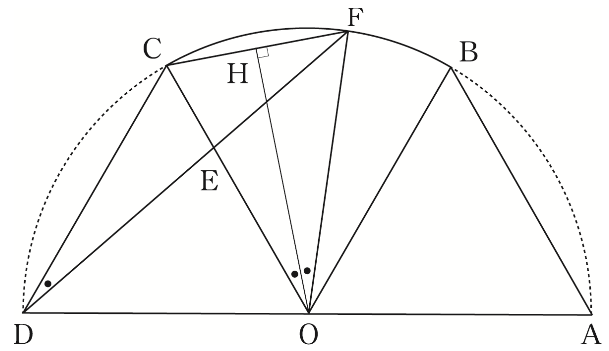
피타고라스 정리에 의해
$\overline{\mathrm{OH}}^2 = \overline{\mathrm{OF}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2 = 9 - \dfrac{27}{28} = \dfrac{9 \times 25}{28}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{15\sqrt{7}}{14}$ 이고,
삼각형 OCF 의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\sqrt{21}}{7} \times \dfrac{15\sqrt{7}}{14} = \dfrac{45\sqrt{3}}{28}$ 이다.

그런데, 삼각형 OEF 의 넓이는 삼각형 OCF 의 넓이의 $\dfrac{2}{3}$ 배이므로
$S_1 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{45\sqrt{3}}{28} = \dfrac{15\sqrt{3}}{14}$ 이다.

한편, 그림 R_2 에서 그려지는 두 삼각형 MAP, MQO 은 정삼각형이고 부채꼴의 중심각은 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다. 따라서 R_2 에서 그려지는 도형은 R_1 에서의 도형과 닮음이다.

그림 R_1 에서 정삼각형의 한 변의 길이와 그림 R_2 에서 그린 정삼각형 한 변의 길이의 비가 $3 : \dfrac{3}{2}$ 이므로 길이의 비는 $2 : 1$ 이다.
따라서 그림 R_2 에서 색칠되는 부분의 넓이는 그림 R_1 에서 색칠되는 넓이의 $\dfrac{1}{4}$ 이므로, S_n 은 공비가 $\dfrac{1}{4}$ 인 등비수열의 합이다.
구하고자 하는 값은 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{\frac{15\sqrt{3}}{14}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{7}$ 이다.

[별해 1]
– 선분 CF 의 길이를 구하는 과정에서



원주각의 성질을 이용하면, $2\angle \mathrm{CDF} = \angle \mathrm{COF}$ 이다. 이때, 두 삼각형 OHF, OHC 는 서로 합동이므로 $\angle \mathrm{HOF} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{COF} = \angle \mathrm{CDF}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{HF}} = \overline{\mathrm{OF}}\sin(\angle \mathrm{HOF}) = 3 \times \dfrac{\sqrt{21}}{14} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ 이다.
같은 방법으로, $\overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{CF}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ 이다.

[별해 2]
– 삼각형 OFC 의 넓이를 구하는 과정에서

※ 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면,
$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 이다.
따라서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 인데, 이를 '배각공식'이라 한다.

[별해 1]에서 $\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{COF} = \angle \mathrm{CDF}$ 이므로 배각 공식을 사용하면
$\sin(\angle \mathrm{COF}) = 2 \times \sin(\angle \mathrm{CDF}) \times \cos(\angle \mathrm{CDF})$
$= 2 \times \dfrac{\sqrt{21}}{14} \times \dfrac{5\sqrt{7}}{14} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ 이다.

따라서 삼각형 OFC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\sin(\angle \mathrm{COF}) \times 3 \times 3 = \dfrac{45\sqrt{3}}{28}$ 이다.

20) [정답] ③ (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수에 사이값 정리와 롤의 정리를 적용하여 주어진 명제의 참 거짓을 판단할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2\pi-x)$를 만족시킨다.

$g(x)=\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$에서 삼각함수의 덧셈정리를 적용하여 변수를 분리시켜 보자. 즉,

$g(x)=\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$

$=\int_0^x \sin x\cos t f(t)\,dt-\int_0^x \cos x\sin t f(t)\,dt$

$=\sin x\int_0^x \cos t f(t)\,dt-\cos x\int_0^x \sin t f(t)\,dt \cdots$ ㉠ 이다.

ㄱ.

$g(2\pi)=-\int_0^{2\pi}\sin t f(t)\,dt$에서 $t=2\pi-a$로 치환하면

$f(x)=f(2\pi-x)$이고, $\dfrac{dt}{da}=-1$이므로

$g(2\pi)=-\int_{2\pi}^0 -\sin a f(a)(-da)=\int_0^{2\pi}\sin t f(t)\,dt$이다. 즉,

$-\int_0^{2\pi}\sin t f(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\sin t f(t)\,dt$이므로

$-\int_0^{2\pi}\sin t f(t)\,dt=g(2\pi)=0$이다. (참)

ㄴ.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\cos x\int_0^x \cos t f(t)+\sin x\int_0^x \sin t f(t)\,dt$이므로

$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f(t)\,dt$, $g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin t f(t)\,dt$이다.

ㄱ에서와 같은 방법으로 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin t f(t)\,dt=0$이므로,

$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$이다.

즉, $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\left(g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^2\le 0$이다. (거짓)

ㄷ.

ㄴ에서 $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\le 0$이므로 사잇값 정리에 의해 방정식 $g'(x)=0$는 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$에서 적어도 한 개의 실근 c_1을 가진다.

또한, $g'(0)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $g''(c_2)=0$를 만족시키는 c_2가 구간 $(0, c_1)$에 적어도 하나 존재한다.

$\dfrac{\pi}{2}\le c_1\le\dfrac{3\pi}{2}$이므로 방정식 $g''(x)=0$은 구간 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) [정답] ② (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항들을 구할 수 있는가?

[해설]

조건에서 주어진 a_3의 값을 기준으로 수열 $\{a_n\}$의 항을 추론하자.

$a_3=a_2+a_4$ (즉 $a_2\le a_4$)인 경우를 먼저 살펴보자.

$a_2+a_4=-1$이 되도록 음이 아닌 상수 α에 대하여

$a_2=-\alpha-\dfrac{1}{2}$, $a_4=\alpha-\dfrac{1}{2}$라 하자.

n	1	2	3	4	5
a_n		$-\alpha-\frac{1}{2}$	-1	$\alpha-\frac{1}{2}$	
α	$\alpha\ge 0$				

$a_2=a_1+a_3$ (즉 $a_1\le a_3$)이 되도록 하는 a_1의 값은 $\alpha+\dfrac{1}{2}$인데 이는 위의 부등식 $a_1\le a_3$을 만족시키지 않으므로 제외한다.

$a_2=(a_1+2)a_3$ (즉 $a_1>a_3$)이 되도록 하는 a_2의 값은 $\alpha-\dfrac{1}{2}$이고 $\alpha>\dfrac{1}{2}$일 때 위의 부등식 $a_1>a_3$을 만족시킨다.

n	1	2	3	4	5
a_n	$\alpha-\frac{1}{2}$	$-\alpha-\frac{1}{2}$	-1	$\alpha-\frac{1}{2}$	
α	$\alpha>\frac{1}{2}$				

위의 표에서 $\sum_{k=1}^{4}a_k=\alpha-\dfrac{5}{2}$이다.

조건 (나)에서 주어진 $\sum_{k=1}^{5}a_k=\left(\alpha-\dfrac{5}{2}\right)+a_5=-5$가 되도록 하는 a_5의 값은 $-\alpha-\dfrac{5}{2}$이다.

n	1	2	3	4	5
a_n	$\alpha-\frac{1}{2}$	$-\alpha-\frac{1}{2}$	-1	$\alpha-\frac{1}{2}$	$-\alpha-\frac{5}{2}$
α	$\alpha>\frac{1}{2}$				

$\alpha>\dfrac{1}{2}$일 때 $a_3+a_5=-\alpha-\dfrac{7}{2}<0$이고 $a_4=\alpha-\dfrac{1}{2}>0$이므로 $a_4=a_3+a_5$ (즉 $a_3\le a_5$)이 되도록 하는 α의 값은 존재하지 않는다.

$\alpha>\dfrac{1}{2}$일 때 $(a_3+2)a_5=-\alpha-\dfrac{5}{2}<0$이고 $a_4=\alpha-\dfrac{1}{2}>0$이므로 $a_4=(a_3+2)a_5$ (즉 $a_3>a_5$)이 되도록 하는 α의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $a_3=(a_2+2)a_4$ (즉 $a_2>a_4$)이다.

$(a_2+2)a_4=-1$이 되도록 양수 β에 대하여

$a_2=\beta-2$, $a_4=-\dfrac{1}{\beta}$라 하자.

(β의 값이 양수이면 $a_2-a_4=\beta-2+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{(\beta-1)^2}{\beta}>0$이다.)

n	1	2	3	4	5
a_n		$\beta-2$	-1	$-\frac{1}{\beta}$	
β	$\beta>0$				

$a_2=a_1+a_3$ (즉 $a_1\le a_3$)이 되도록 하는 a_1의 값은 $\beta-1$인데 이는 위의 부등식 $a_1\le a_3$을 만족시키지 않으므로 제외한다.

$a_2 = (a_1+2)a_3$ (즉 $a_1 > a_3$)이 되도록 하는 a_2 의 값은 $-\beta$ 이고
$0<\beta<1$ 일 때 위의 부등식 $a_1 > a_3$ 을 만족시킨다.

n	1	2	3	4	5
a_n	$-\beta$	$\beta-2$	-1	$-\frac{1}{\beta}$	
β	$0<\beta<1$				

위의 표에서 $\sum_{k=1}^{4} a_k = -\frac{1}{\beta}-3$ 이다.

조건 (나)에서 주어진 $\sum_{k=1}^{5} a_k = \left(-\frac{1}{\beta}-3\right)+a_5 = -5$ 가 되도록 하는 a_5 의 값은 $\frac{1}{\beta}-2$ 이다.

n	1	2	3	4	5
a_n	$-\beta$	$\beta-2$	-1	$-\frac{1}{\beta}$	$\frac{1}{\beta}-2$
β	$0<\beta<1$				

위의 표에서 $(a_3+2)a_5 = -\frac{1}{\beta}+2$ 이고 $a_4 = -\frac{1}{\beta}$ 이므로
$a_4 = (a_3+2)a_5$ (즉 $a_3 > a_5$)이 되도록 하는 β 의 값은 존재하지 않는다.
따라서 $a_4 = a_3 + a_5$ (즉 $a_3 \le a_5$)이고,
$-\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta}-3$ 를 만족시키는 β 의 값은 $\frac{2}{3}$ 이다.
이는 $0<\beta<1$ 을 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 의 항은 다음 표와 같다.

n	1	2	3	4	5
a_n	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

위 표와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 주어진 조건식을 이용하여
$n>5$ 일 때의 수열 $\{a_n\}$ 의 항을 조사해보자.

$a_4 \le a_6$ 인 경우 $a_5 = a_4 + a_6$, $a_6 = 1$ 이고, $a_4 = -\frac{3}{2} > a_6$ 인 경우는 $a_5 = (a_4+2)a_6$, $a_6 = -1$ 이므로 조건을 만족하는 a_6 의 값은 존재하지 않는다. $\therefore a_6 = 1$

$a_5 \le a_7$ 인 경우 $a_6 = a_5 + a_7$, $a_7 = \frac{3}{2}$ 이고 $a_5 = -\frac{1}{2} > a_7$ 인 경우는 $a_6 = (a_5+2)a_7$, $a_7 = \frac{2}{3}$ 이므로 조건을 만족하는 a_7 의 값은 존재하지 않는다. $\therefore a_7 = \frac{3}{2}$

따라서 $a_6 + a_7 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$ 이다.

22) [정답] 24 (출제자 : 20 김유진)
[출제의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]
$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^4$ 의 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r \times x^{2(4-r)} \times \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_4\mathrm{C}_r \times x^{8-3r} \times 2^r$ 이다.
이 식을 통해 x^2 의 항은 $8-3r=2$ 일 때인 $r=2$ 일 때이다.
따라서 x^2 의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$ 이다.

23) [정답] 15 (출제자 : 20 이선우)
[출제의도] 간단한 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]
함수 $f(x) = (4x^2+5)e^{3x}$ 에서
$f'(x) = 8xe^{3x} + 3(4x^2+5)e^{3x} = (12x^2+8x+15)e^{3x}$ 이다.
따라서 $f'(0) = 15$ 이다.

24) [정답] 4 (출제자 : 20 송문주)
[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 부등식을 풀 수 있는가?

[해설]
진수 조건에 의해 i) $x^2+x>0$, ii) $x-1>0$ 이다.
i) $x(x+1)>0$ 으로 $x>0$ 또는 $x<-1$ 이다.
ii) $x>1$ 이다.

한편,
$\log_3(x^2+x) > 1+\log_{\sqrt{3}}(x-1)$
$\log_3(x^2+x) > \log_3 3+\log_3(x-1)^2$
$\log_3(x^2+x) > \log_3 3(x-1)^2$
으로, $x^2+x > 3(x-1)^2$ 이 되어야 한다.
$x^2+x > 3x^2-6x+3$, $2x^2-7x+3<0$,
$(2x-1)(x-3)<0$ 이므로 iii) $\frac{1}{2}<x<3$ 이다.
i), ii), iii)을 모두 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 범위는
$1<x<3$ 이다.
따라서 $a=1$, $b=3$ 이므로 $a+b=4$ 이다.

25) [정답] 225 (출제자 : 19 장지원)
[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수의 성질을 이용하여 평균과 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]
주어진 식 $\mathrm{P}(m \le X \le 2m) + \mathrm{P}(X \le m-2) = 0.5$ 를 표준화하면
$\mathrm{P}(0 \le Z \le m) + \mathrm{P}(Z \le -2) = 0.5$ 이다.
위 식이 성립하기 위해서는 $m+(-2)=0$ 이어야 하므로 $m=2$ 이다.

$\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(Z \le a-2) = 0.0401$ 에서 주어진 표준정규분포표에 의하여 $\mathrm{P}(Z \le -1.75) = 0.5-0.4599 = 0.0401$ 이므로
$a-2 = -1.75$, $a = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $100(m+a) = 100\left(2+\frac{1}{4}\right) = 225$ 이다.

26) [정답] 17 (출제자 : 19 장지원)
[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 구하고자 하는 항을 구할 수 있는가?

[해설]
$\sum_{n=1}^{m} a_{2n} = a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m} = 72$ 이고

$\sum_{n=1}^{m+1} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m+1} = 84$ 이므로

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{n=1}^{m+1} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{m} a_{2n} = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \cdots (a_{2m+1} - a_{2m})$$
$$= a_1 + md = a_{m+1} \text{ 이므로}$$

$a_{m+1} = 84 - 72 = 12$ 이다.

이때 조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{m} a_{2n} = \dfrac{m \times (a_2 + a_{2m})}{2} = ma_{m+1} = 72$ 이므로 $m = 6$ 이다.

즉, $a_7 = 12$ 이므로 $a_1 = a_7 - 6d = 12 - 6d$ 이다. 문제의 조건에 의해 $a_1 > 0$ 이므로, $d < 2$ 이다. d 는 자연수이므로 $d = 1$ 이다.

따라서 $a_{2m} = a_{12} = a_7 + 5d = 12 + 5 = 17$ 이다.

[별해]

위의 해설이 조건 (가), (나)에 주어진 두 식을 뺀 풀이라면

두 식을 합해서도 문제를 해결할 수 있다.

조건 (가), (나)에 주어진 두 식을 합하면

$\sum_{n=1}^{m} a_{2n} + \sum_{n=1}^{m+1} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{2m+1} a_n = \dfrac{(2m+1)(a_1 + a_{2m+1})}{2} = 156$ 이므로 $(2m+1)(a_1 + a_{2m+1}) = 2 \times 156 = 2^3 \times 3 \times 13$ 이다.

이때 $2m+1$ 의 값과 $a_1 + a_{2m+1}$ 의 값이 모두 자연수이다.

자연수 m 에 대하여 $2m+1$ 의 값은 홀수이므로

$2m+1$ 의 값은 3, 13, 39 중 하나, 즉

m 의 값은 1, 6, 19 중 하나이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d (단, a, d 는 자연수)라 하면

$a_1 + a_{2m+1} = 2a + 2md$ 이다.

$m = 1$ 인 경우, $a_1 + a_{2m+1} = 2a + 2d = 104$, $a + d = a_2 = 52$ 이다.

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{1} a_{2n} = a_2 = 72$ 인데 이는 위에서 얻은 정보에 모순이다.

$m = 39$ 인 경우, $a_1 + a_{2m+1} = 2a + 78d = 8$, $a + 39d = 4$ 이다.

이를 만족시키는 자연수 a, d 는 존재하지 않으므로 이는 모순이다.

따라서 $m = 6$ 이고 $a_1 + a_{2m+1} = 2a + 12d = 24$, $a + 6d = 12$ 이다.

이를 만족시키는 자연수 a, d 는 $a = 6$, $d = 1$ 뿐이므로

$a_{2m} = a_{12} = a + 11d = 17$ 이다.

27) [정답] 3 (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 치환적분법을 이용해 역함수의 적분을 할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$g(f(x)) = x$, $g(\ln(x^2+1) + k) = x$ 이다.

$g(x) = t$ 라 하면 $x = \ln(t^2+1) + k$ 이므로 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{t^2+1}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 $x \ge 0$ 에서 정의된 함수이므로 $g(x) \ge 0$ 이다.

$x = k + \ln 2$ 일 때 $t = 1$, $x = k + \ln 10$ 일 때 $t = 3$ 이므로

$$\int_{k+\ln 2}^{k+\ln 10} \frac{e^x}{g(x)}\,dx = \int_1^3 \frac{e^{\ln(t^2+1)+k}}{g(\ln(t^2+1)+k)} \times \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$
$$= \int_1^3 \frac{(t^2+1)e^k}{t} \times \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_1^3 2e^k\,dt = \left[2e^k t\right]_1^3$$
$$= 6e^k - 2e^k = 4e^k = 4e^3 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ 이다.

28) [정답] 2 (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 선분의 길이와 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 나타내고 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

내접원과 반원의 접점을 R, 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하면

$\overline{\text{OR}} = 2r(\theta) + \overline{\text{OM}}$ 이고 $\overline{\text{OR}} = 1$, $\overline{\text{OM}} = \sin\theta$ 이므로

$r(\theta) = \dfrac{1 - \sin\theta}{2}$ 이다.

두 호 PN, NB 의 길이가 서로 같고 $\angle \text{BOP} = 2\theta$ 이므로

$\angle \text{BON} = \angle \text{NOP} = \theta$ 이다.

이때 이등변삼각형 AOP 에서 $\angle \text{APO} = \theta$ 이므로 $\overline{\text{AP}} \,/\!/\, \overline{\text{ON}}$ 이다.

$\angle \text{MOA} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, $\angle \text{BON} = \theta$ 이므로 $\angle \text{NOC} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.

즉 두 삼각형 NOC, DMC 가 서로 닮음이므로

$\overline{\text{OC}} : \overline{\text{MC}} = \sin\theta + r(\theta) : r(\theta) = 1 + \sin\theta : 1 - \sin\theta$ 이다.

따라서 $\overline{\text{MD}} = \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$ 이다.

$\overline{\text{PD}} = \overline{\text{MP}} - \overline{\text{MD}}$ 이고 $\overline{\text{MP}} = \cos\theta$, $\overline{\text{MD}} = \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$ 이므로

$\overline{\text{PD}} = \cos\theta - \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = (\cos\theta - 1) + \dfrac{2\sin\theta}{1 + \sin\theta}$ 이다.

삼각형 PDE 와 삼각형 ONE 가 닮음이므로

$\overline{\text{PD}} : \overline{\text{ON}} = \overline{\text{PD}} : 1$ 임을 이용해 $\overline{\text{PE}}$ 를 $\overline{\text{PD}}$ 로 나타내자.

$\overline{\text{PD}} : \overline{\text{ON}} = \overline{\text{PE}} : \overline{\text{OE}}$, $\overline{\text{PD}} : 1 = \overline{\text{PE}} : 1 - \overline{\text{PE}}$,

$\overline{\text{PD}} = \dfrac{\overline{\text{PE}}}{1 - \overline{\text{PE}}}$ 이므로 $\overline{\text{PE}} = \dfrac{\overline{\text{PD}}}{1 + \overline{\text{PD}}}$ 이다.

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\text{PD}} \times \overline{\text{PE}} \times \sin\theta$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{2\theta^3} \times \frac{(\overline{\text{PD}})^2}{1 + \overline{\text{PD}}} \times \sin\theta$ 이다.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \frac{\overline{\text{PD}}}{\theta} = \lim_{\theta\to 0+} \left\{ \frac{\cos\theta - 1}{\theta} + \frac{2\sin\theta}{\theta(1 + \sin\theta)} \right\} = 0 + 2 = 2$,

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \overline{\text{PD}} = 0$ 임을 이용해 구하고자 하는 값을 계산하자.

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{2\theta^3} \times \frac{(\overline{\text{PD}})^2}{1 + \overline{\text{PD}}} \times \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{1 + \overline{\text{PD}}} \times \left(\frac{\overline{\text{PD}}}{\theta}\right)^2 \times \frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 \times 1 = 2.$$

따라서 답은 2 다.

29) [정답] 186 (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 복잡한 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

(가) 조건을 만족시키는 경우의 수를 먼저 구한 뒤, (가) 조건을 만족시키면서 (나) 조건을 만족시키지 않는 경우의 수를 구해서 제외하자.

1. A 가 B 보다 먼저 공연하는 경우의 수

ⅰ) 다섯 명이 따로 공연하는 경우

$\frac{5!}{2!}=60$ 가지

ⅱ) 두 명은 함께, 나머지 세 명은 혼자서 공연하는 경우

① A ,B 모두 홀로 공연하는 경우

동시에 공연할 두 학생을 C ,D ,E 중에서 선택한 후, A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_3C_2\times\frac{4!}{2!}=36$ 가지

② A ,B 중 한 명이 다른 학생과 같이 공연하는 경우

A ,B 중 다른 사람과 함께 공연할 학생을 선택한 후, 선택한 학생과 함께 공연할 학생을 C ,D ,E 중에서 선택하고 A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_2C_1\times{}_3C_1\times\frac{4!}{2!}=72$ 가지

ⅲ) 네 명의 학생은 두 명씩 동시에, 남은 한 학생은 홀로 공연하는 경우

① A ,B 모두 다른 학생과 함께 공연하는 경우

A ,B 와 공연할 학생을 C ,D ,E 중에서 각각 선택하고 A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_3P_2\times\frac{3!}{2!}=18$ 가지

② A ,B 중 한 명의 학생이 홀로 공연하는 경우

A ,B 중 홀로 공연할 학생을 고르고 남은 학생과 함께 공연할 학생을 C ,D ,E 중에서 선택한 뒤, A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_2C_1\times{}_3C_1\times\frac{3!}{2!}=18$ 가지

따라서 A 가 B 보다 먼저 공연하는 경우의 수는

$60+36+72+18+18=204$ 가지

2. A 가 B 보다 먼저 공연하고, C 와 D 가 동시에 공연하는 경우의 수

ⅱ)−①의 경우

$\frac{4!}{2!}=12$ 가지

ⅲ)−②의 경우

$2\times\frac{3!}{2!}=6$ 가지

따라서 A 가 B 보다 먼저 공연하고, C 와 D 가 동시에 공연하는 경우의 수는 $12+6=18$ 가지

따라서 구하는 전체 경우의 수는

$204-18=186$ 가지이다.

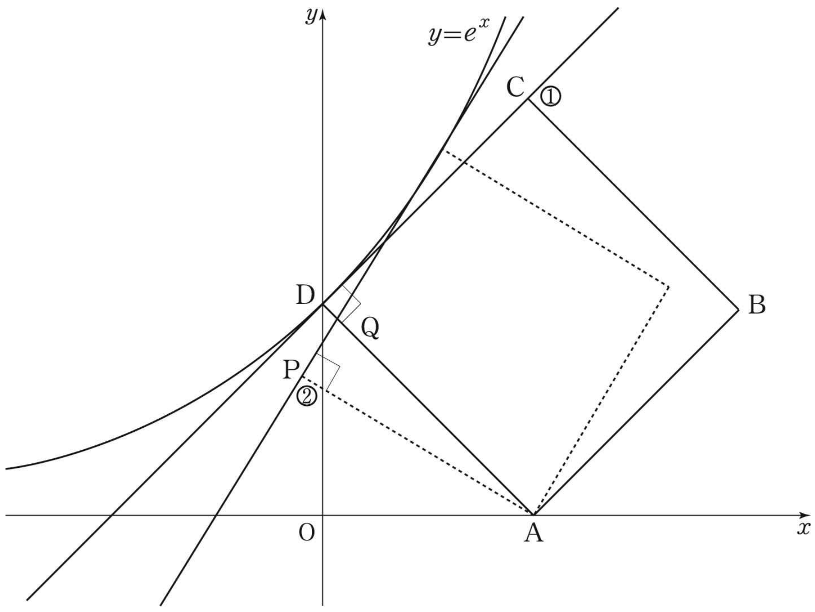
30) [정답] 7 (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 곡선과 정사각형이 접하는 경우를 추론하고 관계식을 구한 후, 음함수의 미분법을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

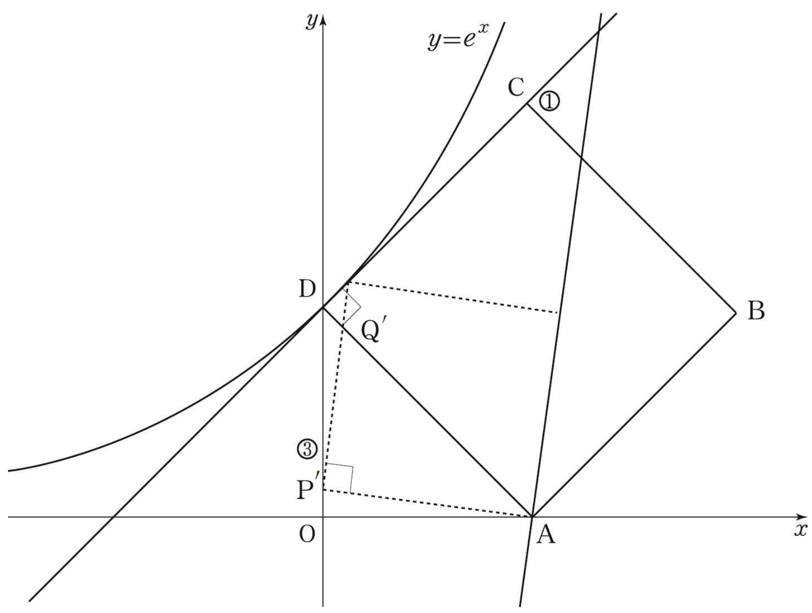
점 $(t, 0)$을 점 A 라 하고 그림과 같이 정사각형의 네 꼭짓점을 A , B , C , D 라 하자.

조건 (나)를 만족시키면서 점 D 가 접점이 되는 경우에 만들어지는 정사각형을 ①, 꼭짓점이 아닌 한 변에서 곡선과 접하는 경우에 만들어지는 정사각형을 ②라 하자. ②의 경우에 점 A 에서 접선에 내린 수선의 발을 점 P , ②의 경우의 접선과 선분 AD 가 만나는 점을 Q 라 하자.



직각삼각형 APQ 에서 $\overline{AP}<\overline{AQ}$ 이고, $\overline{AQ}<\overline{AD}$ 이므로 ①의 넓이가 ②의 넓이보다 크다.

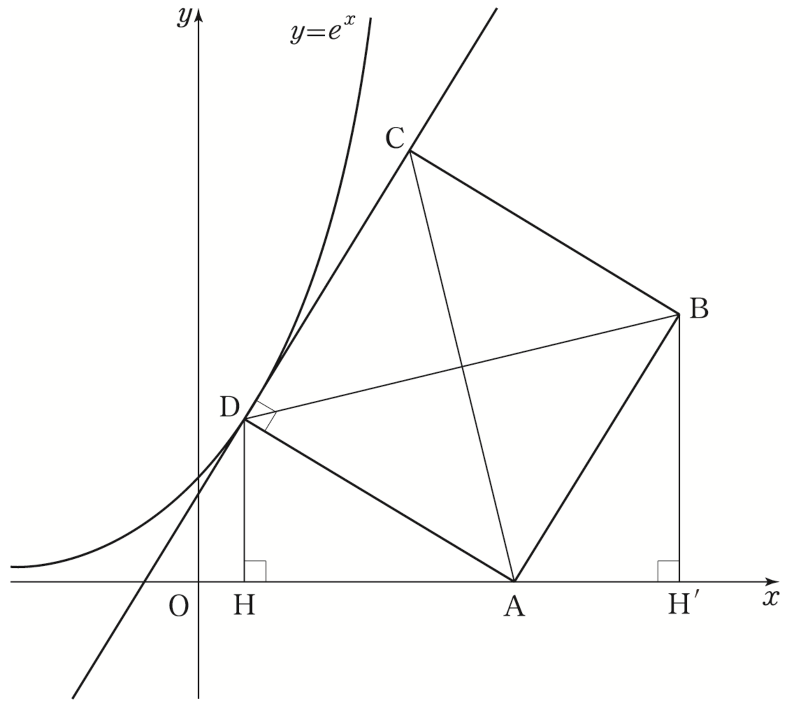
조건 (나)를 만족시키면서 점 A 가 접선 위에 있는 경우에 만들어지는 정사각형을 ③이라 하자. ③의 경우에 점 A 와 이웃한 꼭짓점 중 접선 위에 있지 않은 점을 P′, ①과 ③이 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 Q′이라 하자.



직각삼각형 AP′Q′에서 $\overline{AP'}<\overline{AQ'}$ 이고, $\overline{AQ'}<\overline{AD}$ 이므로 ①의 넓이가 ③의 넓이보다 크다.

따라서 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 정사각형 중 넓이가 최대가 되는

경우는 ①의 경우인 점 D 가 접점인 경우이다.
이제 점 D 가 접점인 경우에서 $f(t)$ 와 $g(t)$ 를 구해보자.



점 D 의 x 좌표를 a, 점 D 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 두 점 D , H 의 좌표는 $\mathrm{D}\left(a,\, e^a\right)$, $\mathrm{H}(a,\, 0)$ 이다.
즉 $\overline{\mathrm{DH}} = e^a$, $\overline{\mathrm{AH}} = t-a$ 이다.

점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H′ 라 하면 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}}$, $\angle \mathrm{DAH} = \angle \mathrm{ABH'}$ 이므로 두 직각삼각형 DAH 와 ABH′ 는 RHA 합동이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AH'}} = \overline{\mathrm{DH}} = e^a$ 이므로 점 H′ 의 좌표는 $\left(t+e^a,\, 0\right)$ 이고,
$\overline{\mathrm{BH'}} = \overline{\mathrm{AH}} = t-a$ 이므로 점 B 의 좌표는 $\left(t+e^a,\, t-a\right)$ 이다.

이때 두 대각선의 교점은 두 점 $\mathrm{B}\left(t+e^a,\, t-a\right)$, $\mathrm{D}\left(a,\, e^a\right)$ 의 중점이므로
$f(t) = \dfrac{t+e^a+a}{2}$, $g(t) = \dfrac{t+e^a-a}{2}$ 이다.
즉, $f(t)+g(t) = t+e^a$ 이므로 $f'(t)+g'(t) = 1+e^a \dfrac{da}{dt}$ 이다.

위 그림에서 두 직선 CD 와 AD 가 서로 수직이다.
이때 직선 CD 의 기울기는 e^a 이고, 직선 AD 의 기울기는 $\dfrac{e^a}{a-t}$ 이므로
$e^a \times \dfrac{e^a}{a-t} = -1$ 이다. 즉 $e^{2a} = t-a$ 이므로 $t = e^{2a}+a$ 이다.

위에서 얻은 양변을 t 에 대하여 미분하면
$1 = \left(2e^{2a}+1\right)\dfrac{da}{dt}$ 이므로 $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{1}{2e^{2a}+1}$ 이다.

$f'(t)+g'(t) = 1+e^a\dfrac{da}{dt} = 1+\dfrac{e^a}{2e^{2a}+1}$ 이므로
방정식 $1+\dfrac{e^a}{2e^{2a}+1} = \dfrac{4}{3}$ 을 만족시키는 t 의 값을 구하자.
$\dfrac{e^a}{2e^{2a}+1} = \dfrac{1}{3}$, $3e^a = 2e^{2a}+1$, $2e^{2a}-3e^a+1 = 0$ 에서
$e^a = s$ 라 치환하면 위의 식은 $2s^2-3s+1 = (s-1)(2s-1) = 0$ 이므로
주어진 방정식의 실근은 $e^a = 1$ 또는 $e^a = \dfrac{1}{2}$ 인 t 의 값임을 알 수 있다.

위에서 구한 $t = e^{2a}+a$ 의 식을 이용하자.
$e^a = 1$ 인 경우 $a = 0$ 이므로 $t = e^0+0 = 1$ 이다.

$e^a = \dfrac{1}{2}$ 인 경우 $a = -\ln 2$ 이므로 $t = e^{-2\ln 2}-\ln 2 = \dfrac{1}{4}-\ln 2$ 이다.
따라서 구하고자 하는 값은 $1+\left(\dfrac{1}{4}-\ln 2\right) = \dfrac{5}{4}-\ln 2$ 이므로
$p = \dfrac{5}{4}$, $q = 2$, $4p+q = 7$ 이다.