

패턴 17

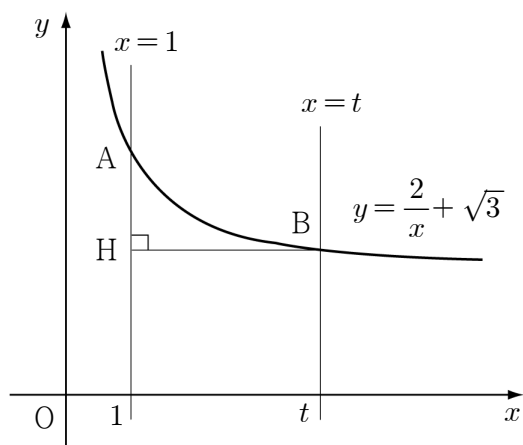
함수의 극한+도형

편집:우에노리에

1. **2007** 교육청 (3점)

곡선 $y = \frac{2}{x} + \sqrt{3}$ ($x > 0$)과 두 직선 $x = 1$, $x = t$ 의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서

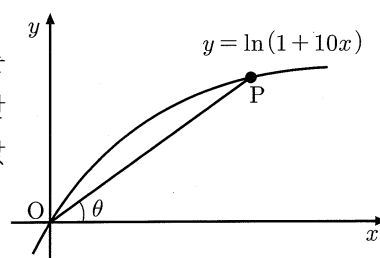
직선 $x = 1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 때, $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$ 의 값은? (단, $t > 1$ 이다.)



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. **2005** 교육청 (3점)

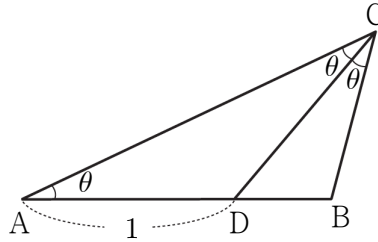
곡선 $y = \ln(1 + 10x)$ 위의 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 한다. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 $\tan \theta$ 의 극한값은?



- ① 1 ② 5
③ 10 ④ e
⑤ $\ln 10$

2. **2007** 교육청 (3점)

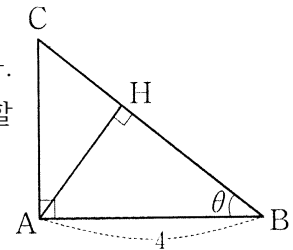
삼각형 ABC에서 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC가 이등변삼각형이고 $\overline{AD}=1$ 일 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \overline{AB}$ 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

4. **2007** 교육청 (3점)

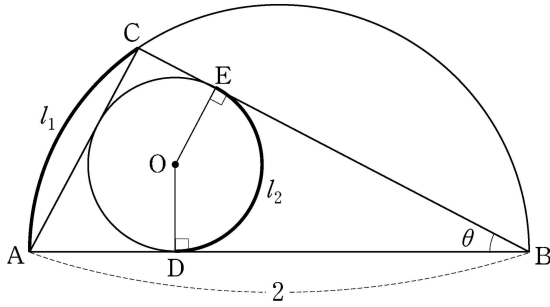
오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = 4$ 이다. 꼭지점 A로부터 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H, $\angle B = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\overline{CH}}{\theta \cdot \ln(1+2\theta)}$ 의 값은?



- ① 0 ② 1 ③ $\frac{\pi}{2}$
 ④ 2 ⑤ π

5. **2007** 평가원 (3점)

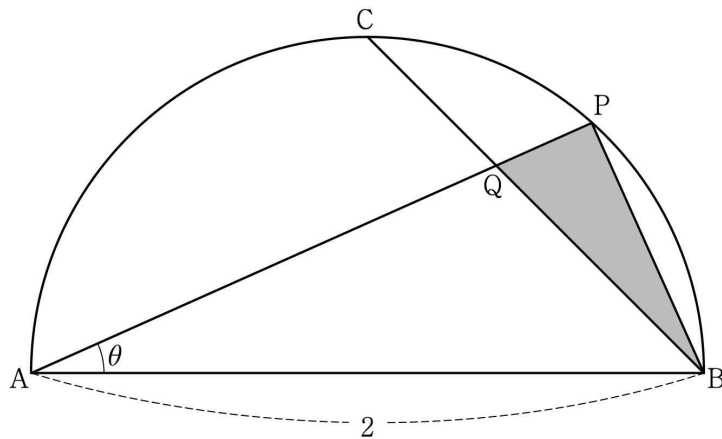
그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$ 이고, 호 AC의 길이를 l_1 , 호 DE의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)



- ① 1 ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{3}{\pi}$

6. **2012** 교육청 (4점)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C를 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ 가 되도록 잡는다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 Q라 하고, $\angle PAB = \theta$ 라 하자. 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



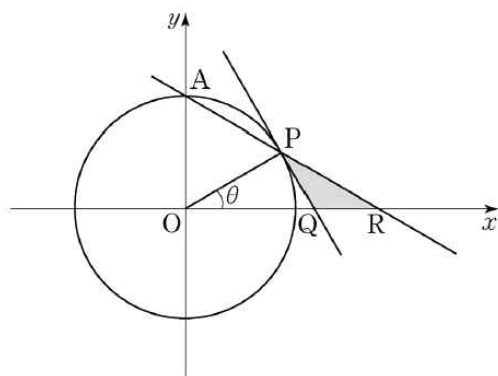
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

7. **2010** 평가원 (4점)

좌표평면에서 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 $A(0,1)$ 과 점 P 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 R 라 하자.

$\angle QOP = \theta$ 라 하고 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(\theta)$ 라고 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \alpha$ 일 때, 100α 의 값을 구하시오.

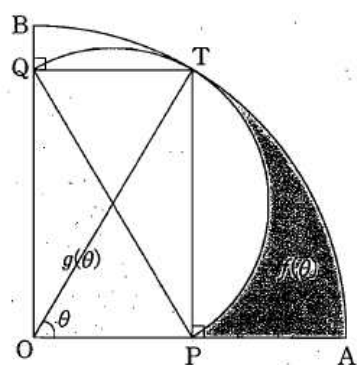
(단, 점 P 는 제1사분면 위의 점이다.)



8. **2010** 평가원 (4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 호 AB 위의 점 T 에서 선분 OA 와 선분 OB 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하고 $\angle T = \theta$ 라 하자. 점 P 와 점 Q 를 지름의 양끝으로 하고 점 T 를 지나는 반원을 C 라 할 때, 반원 C 의 호 TP , 선분 PA , 부채꼴 OAT 의 호 AT 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta + f(\theta)}{g(\theta)} = a$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



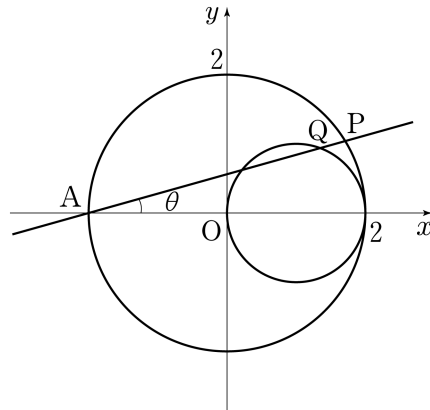
9.

2012

평가원 (4점)

그림과 같이 점 $A(-2, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P 에 대하여 직선 AP 가 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P 에 가까운 점을 Q 라 하자.

$\angle OAP = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$ 의 값은?



① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

⑤ $\frac{9}{2}$

10.

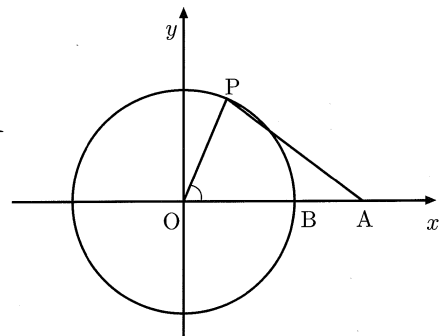
2005

평가원(4점)

그림과 같이 제 1 사분면에서 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 위의 움직이는 점 P 에 대하여

$2\angle PAO = \angle POA$ 가 되도록 x 축 위에 점 A 를 잡는다.

이 때, $\lim_{P \rightarrow B} \overline{OA}$ 의 값은? (단, $B(1, 0)$)



① 3

② 4

③ 5

④ 6

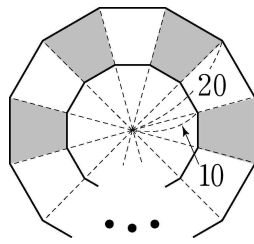
⑤ 7

11.

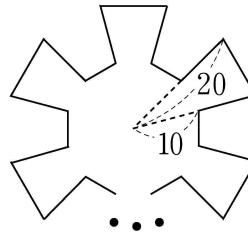
2005

평가원(4점)

[그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정 $2n$ 각형에서 큰 정 $2n$ 각형의 꼭지점, 작은 정 $2n$ 각형의 꼭지점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정 $2n$ 각형의 꼭지점까지의 거리는 각각 10, 20이다. [그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림 2]와 같은 도형의 넓이를 S_n 이라 하자. $\frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하시오.



[그림1]



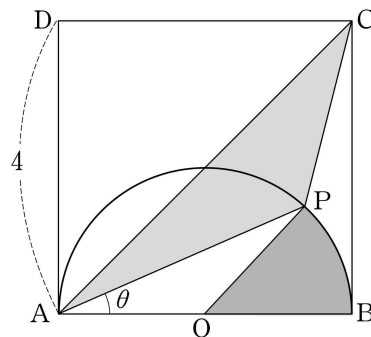
[그림2]

12.

2005

평가원(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$ 에서 변 AB 의 중점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위에 점 P 가 있다. $\angle BAP = \theta$ 일 때 삼각형 APC 의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{8 - f(\theta)}{g(\theta)} = \alpha$ 라 할 때, 10α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



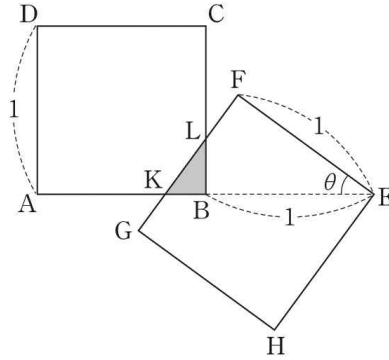
13.

2008

평가원(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{BE}=1$ 인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle BEF = \theta$ 일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이고, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

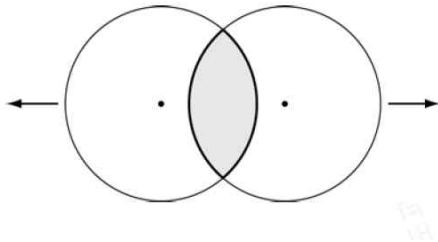


14.

2008

교육청(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 있다. 이 두 원 내부의 공통부분의 길이를 l , 두 원의 교점을 잇는 선분의 길이를 m 이라 하자. 두 원의 중심사이의 거리가 2에 한없이 가까워질 때, $\frac{l}{m}$ 의 극한값은?



① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

15.

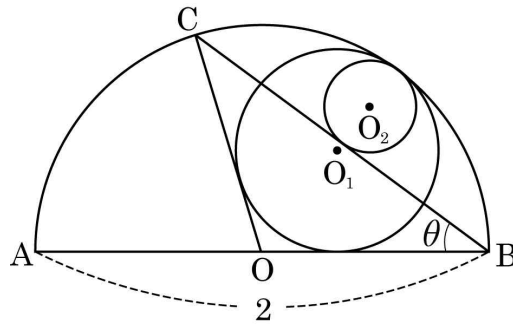
2012

교육청(4점)

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 의 중점 O 와 반원 위를 움직이는 점 C 에 대하여 부채꼴 OBC 에 내접하는 원을 O_1 , 현 BC 와 호 BC 로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2 라 하자. $\angle ABC = \theta$ 라 하고 두 원 O_1, O_2 의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta), g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \frac{q}{p}$ 이

다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

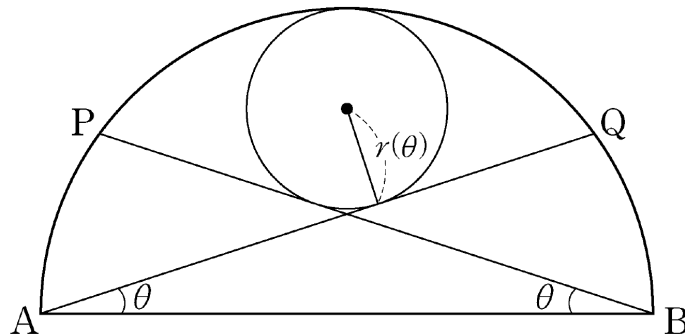


16.

2012

평가원(4점)

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q 를 $\angle ABP = \angle BAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) 가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP 와 호 PQ 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = p\sqrt{2} + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)

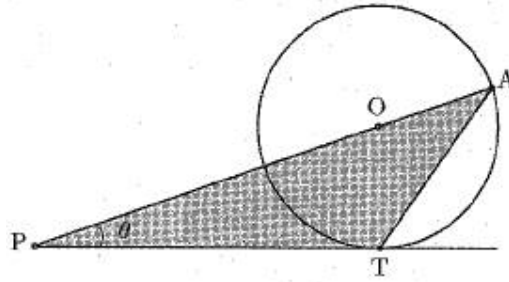


17.

2009

교육청(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고 중심이 점 O 인 원이 있다. 원 밖의 한 점 P 에서 원에 그은 한 접선의 접점을 T 라 하자. 선분 PO 의 연장선이 원과 만나는 점을 A 라 하고, $\angle APT = \theta$ 라 하자. $\triangle APT$ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{S(\theta)}{\theta - \frac{1}{2}}$ 의 값은?



① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

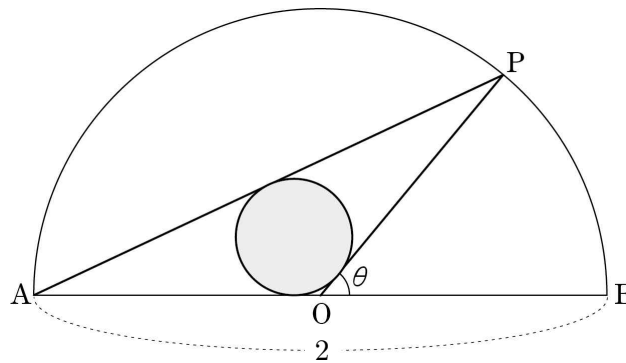
⑤ 1

18.

2012

교육청(4점)

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하고 중심이 O 인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\angle POB = \theta$ 일 때, 삼각형 PAO 에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$ 이다.)

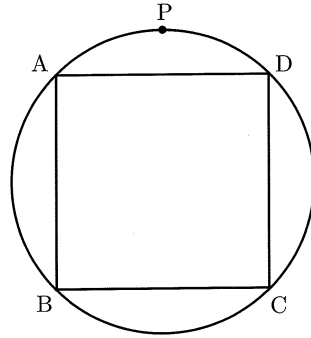
① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$ ④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

19.

2006

교육청(4점)

그림과 같이 원에 내접하는 정사각형 ABCD 와 점 B 를 포함하지 않는 호 AD 위에 동점 P 가 있다. 동점 P 가 점 D 에 한없이 가까워질 때, $\frac{(\overline{AD} - \overline{AP})}{\overline{DP}}$ 의 극한값을 α 라고 한다. 이 때, $100\alpha^2$ 의 값을 구하시오.



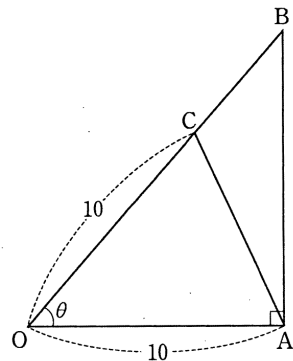
20.

2009

평가원(4점)

그림과 같이 양수 θ 에 대하여

$\angle AOB = \theta$, $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$, $\overline{OA} = 10$ 인 직각삼각형 OAB 가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{OC} = 10$ 인 점 C 에 대하여 삼각형 ABC 의 둘레의 길이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오.

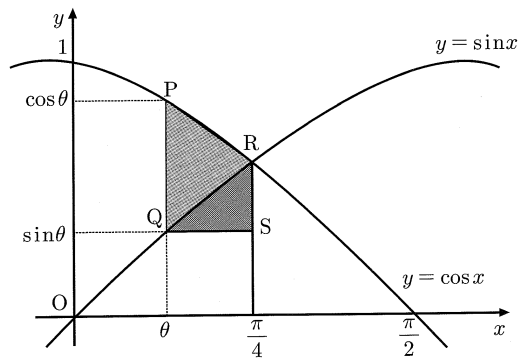


21.

2006

평가원(4점)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ 일 때, 곡선 $y = \cos x$ 위의 점 $P(\theta, \cos \theta)$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선과 곡선 $y = \sin x$ 의 교점을 Q 라 하자. 점 Q 를 지나고 x 축에 평행한 직선과 점 $R\left(\frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선의 교점을 S 라 하자. 삼각형 PQR 의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QSR 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값은?



① $2\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{3}$

④ $\sqrt{2}$

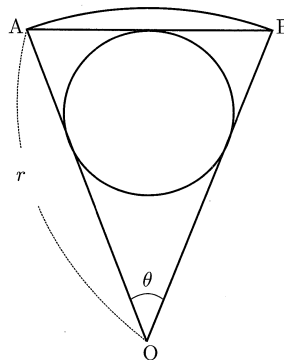
⑤ 1

22.

2006

평가원(4점)

그림과 같이 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 r 인 부채꼴 OAB 가 있다. 부채꼴의 호 AB 의 길이를 l_1 , 삼각형 OAB 에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_2}{l_1}$ 의 값은?



① $\frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{2}$

③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$

⑤ 2π

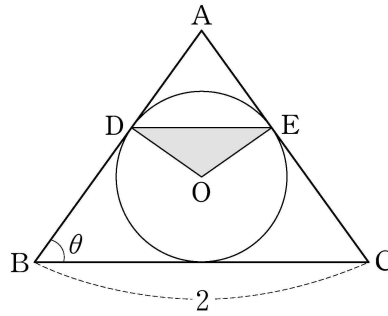
23.

2007

수능 (3점)

그림과 같이 양수 θ 에 대하여 $\angle ABC = \angle ACB = \theta$ 이고 $\overline{BC} = 2$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 내접원의 중심을 O , 선분 AB 와 내접원이 만나는 점을 D , 선분 AC 와 내접원이 만나는 점을 E 라 하자.

삼각형 OED 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?



① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$

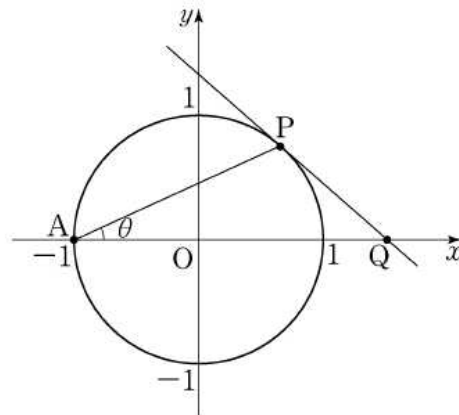
⑤ $\frac{5}{8}$

24.

2009

수능 (3점)

그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 $A(-1, 0)$ 과 원점 O 에 대하여 $\angle PAO = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{\overline{PQ} - \overline{OQ}}{\theta - \frac{\pi}{4}}$ 의 값은? (단, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이다.)

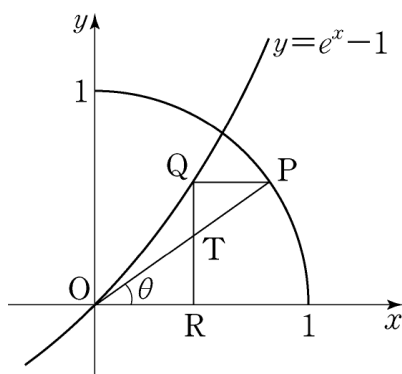


25. **2011 수능 (3점)**

좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P 에 대하여 선분 OP 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ 라 하자.

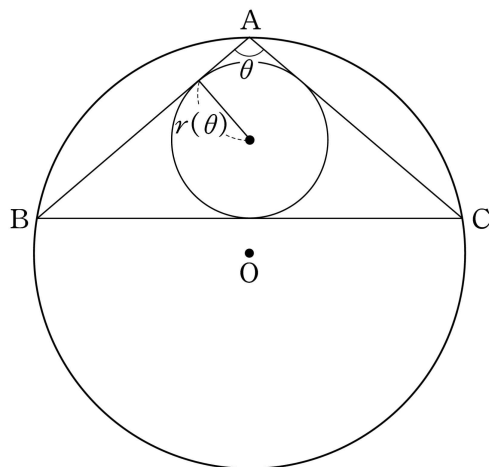
점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = e^x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 하고, 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 라 하자. 선분 OP 와 선분 QR 의 교점을 T 라 할 때, 삼각형 OTR 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오.



26. **2008 수능 (4점)**

반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A 가 있다. 그림과 같이 양수 θ 에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C 를 $\angle BAC = \theta$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \frac{r(\theta)}{(\pi - \theta)^2} = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)



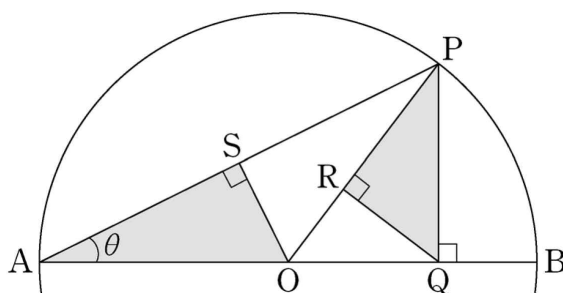
27. **2012** 수능 (4점)

그림과 같이 중심이 O 이고 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 점 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 Q , 점 Q 에서 선분 OP 에 내린 수선의 발을 R , 점 O 에서 선분 AP 에 내린 수선의 발을 S 라 하자.

$\angle PAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) 일 때, 삼각형 AOS 의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ 의 넓이를

$g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인

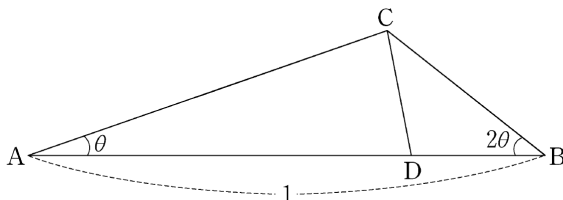
자연수이다.)



28. **2013** 수능 (4점)

삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 1$ 이고 $\angle A = \theta$, $\angle B = 2\theta$ 이다. 변 AB 위의 점 D 를 $\angle ACD = 2\angle BCD$ 가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{CD}}{\theta} = a$ 일 때, $27a^2$ 의 값을 구하시오. (단,

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



- 1) 정답 ⑤
- 2) 정답 ③
- 3) 정답 ③
- 4) 정답 ④
- 5) 정답 ④
- 6) 정답 ④
- 7) 정답 50
- 8) 정답 50
- 9) 정답 ④
- 10) 정답 ①
- 11) 정답 250
- 12) 정답 20
- 13) 정답 65
- 14) 정답 ③
- 15) 정답 17
- 16) 정답 8
- 17) 정답 ①
- 18) 정답 ④
- 19) 정답 50
- 20) 정답 20
- 21) 정답 ②
- 22) 정답 ③
- 23) 정답 ②
- 24) 정답 ④
- 25) 정답 30
- 26) 정답 17
- 27) 정답 24
- 28) 정답 16