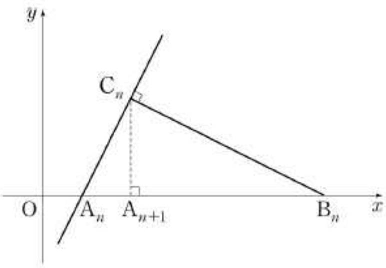
19. 좌표평면에서 점 A_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_n을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점을 B_n이라 한다.
> (나) 점 B_n에서 기울기가 2이고 점 A_n을 지나는 직선에 내린 수선의 발을 C_n이라 한다.
> (다) 점 C_n에서 x축에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

27. 방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $1 \le m < n < 100$
> (나) $\overline{P_m P_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

20. 자연수 n에 대하여 실수 a가 $10^n < a < 10^{n+1}$을 만족시킨다. $\log a$의 가수와 $\log\sqrt{a}$의 가수의 합이 정수이고 $(n+1)\log a = n^2+8$일 때, $\frac{\log a}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{57}{56}$ ② $\frac{22}{21}$ ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

21. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

30. 자연수 n에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

20. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(x)-(n+1)g(x)=n$을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

21. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

30. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^{x}$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $\quad (n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

30. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le 20$
(나) $\log b - \log a \le f(a) - f(b)$

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^{3}-2$이다.

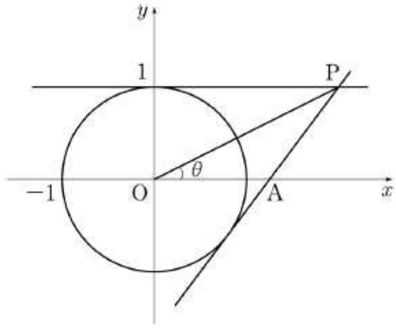
① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

30. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 100$
(나) 곡선 $y=2^{x}$이 원 $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=1$과 만나지 않는다.
(다) 곡선 $y=2^{x}$이 원 $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

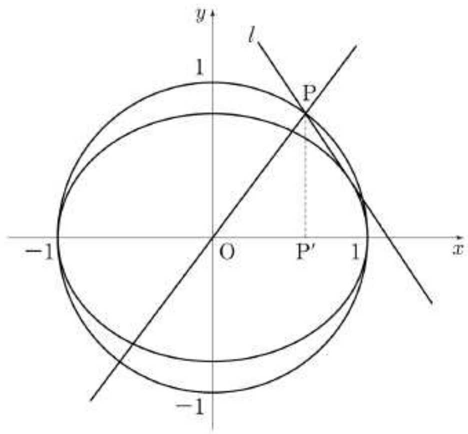
이상 A형 이후 B형

16. 그림과 같이 직선 $y=1$ 위의 점 P에서 원 $x^{2}+y^{2}=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle AOP=\theta$라 하자. $\overline{OA}=\frac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.) [4점]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

17. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P′이라 하자. 점 P′을 초점으로 하고, x축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P에서 타원에 그은 접선 l의 기울기가 $-\frac{3}{2}$일 때, 직선 OP의 기울기는? [4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 좌표공간에서 세 직선

$$x=-y=\frac{z}{2},\quad x=y=\frac{z}{2a},\quad x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$$

가 같은 평면 위에 있을 때, $20a$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$이다.) [4점]

16. 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (t, t^3)과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s, t\,(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

15. 좌표공간에서 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$과 구 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$이 원점에서 서로 접할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

21. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx=6e^2+4$이다. $\int_1^{e} f(\ln x)dx=ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]

19. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

20. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

21. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$$

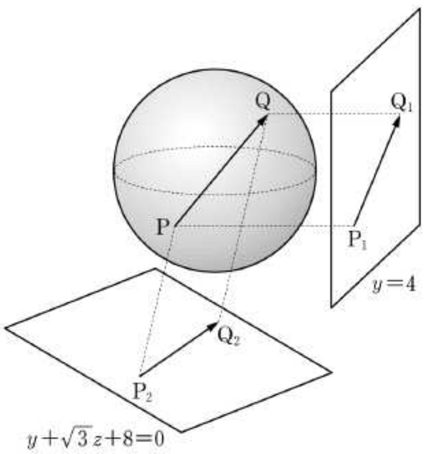
이다. $f(1)=1$일 때,

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx$$

의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

20. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

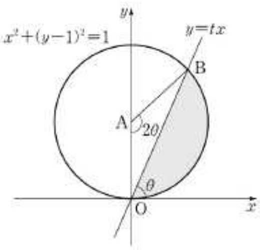
> (가) $a+b+c=6$
> (나) 좌표평면에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

21. 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다음은 $f'(2)$의 값을 구하는 과정이다.

> 원 $C: x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A, 원 C와 직선 $l: y=tx$가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$라 하면
>
> 
>
>
> $\angle\mathrm{OAB}=2\theta$이다. 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면
> $g(\theta)=\theta-$ $\boxed{(가)}$
> 이다. $t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이고, 합성함수의 미분법에 의하여
> $g'(\theta)=f'(t)\times$ $\boxed{(나)}$
> 이다.
> $t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로 $f'(2)=$ $\boxed{(다)}$ 이다.

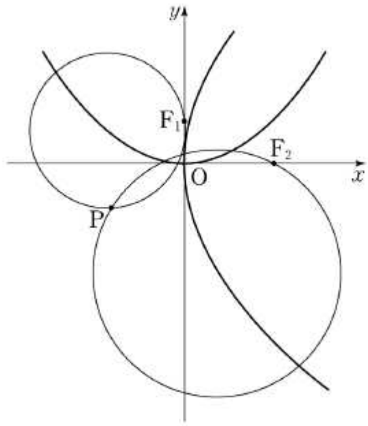
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{14}{25}$ ⑤ $\frac{16}{25}$

28. 좌표평면에서 포물선 $C_1: x^2=4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2: y^2=8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
> (나) 제3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1\le f'(x)\le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)\,dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

20. 3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

> ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
> ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
> ㄷ. 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
$(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$
을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]