01. [행렬의 덧셈]

$sol.1)$
서로 다른 두 행렬 간의 덧셈은 행과 열의 수가 동일한 꼴의 행렬일 때, 각 성분들 간의 합으로 정의되죠! 따라서

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$$

이므로 $2+2+3+2=9$가 답입니다.

$sol.2)$
A, B 두 행렬의 모든 성분의 합을 각각 a, b라고 하겠습니다. 이때

$$a=1+1+0+2=4,\ b=1+1+3+0=5$$

에서 $a+b=9$가 나옵니다. $sol.1)$에서 덧셈 연산을 총 6번 하였다면, $sol.2)$에서는 덧셈 연산을 단 3번 만에 끝낼 수 있죠. 소소한 테크닉입니다.

02. [자연상수 e의 정의]

$sol.1)$
교과서에서는 자연상수 e를 보통 $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2.718\cdots$ 혹은 $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.718\cdots$ 로 도입을 합니다. 따라서'

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=\ln e=1$$

이 성립하고 지금과 같이 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$ 을 계산하길 요구하고 있다면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

이 답이 됩니다. 여러분은 물론 이 중에 몇 가지 과정을 생략하고서, 심지어 통째로 암산해서 답을 얻으셨겠죠?! 실전에선 그게 현명합니다.

$sol.2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=\ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\frac{1}{3}}=\ln e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln e=\frac{1}{3}$$

이라고 e의 기본 형태로 맞춰주는 방법도 있습니다. 이때 $(1+x)$의 지수로서 $\frac{1}{x}$와 $\frac{1}{3}$의 연산 부분에서 헷갈릴 수도 있는데, $\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}$으로 쪼갠 것이지 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$을 의미하는 것이 아님에 주의하면 됩니다.

$sol.3)$
$x=0$에서 $\ln(1+x)$의 테일러 전개에 의한 근사를 적용하면 $\ln(1+x)\simeq x$로 볼 수 있고, 즉 $x=0$에서 $y=\ln(1+x)$의 접선인 $y=x$로 대신 쓰겠다는 아이디어입니다.

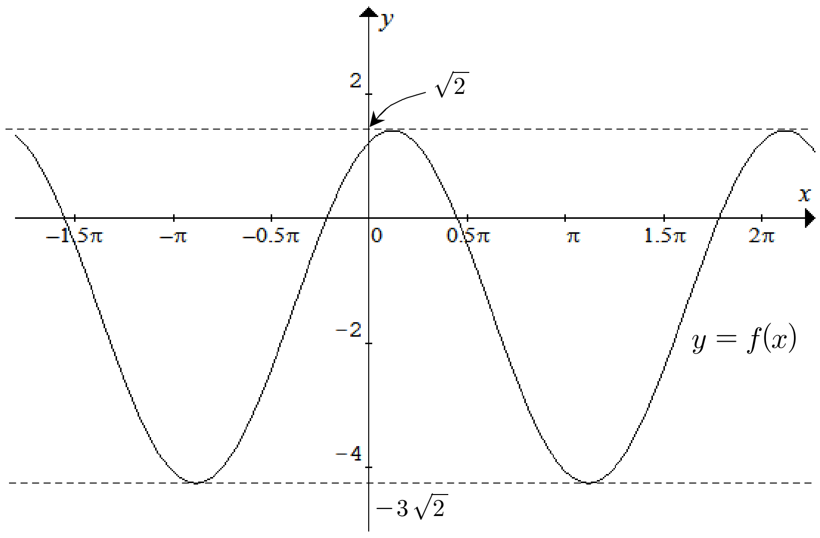
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}\simeq\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$이라고 답을 구할 수 있습니다. 단연코 암산이 가능케 하는 가장 빠른 풀이이기는 하지만 대학 미적분학에서 배우게 되는 내용이죠.

03. [삼각함수의 합성]

$sol)$
딱히 정의역에 제한이 있는 것도 아니니 맘 편하게 삼각함수의 합성을 이용해주면 되겠네요.

$$f(x)=\sqrt{1+7}\sin(x+\theta)-\sqrt{2}\quad\left(\tan\theta=\frac{\sqrt{7}}{1}\right)$$

이라 둘 수 있으므로 $f(x)$의 최댓값은 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$가 됩니다.



[2005년 09월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 폐구간 $[0, \pi]$에서 함수

$$f(x)=\cos 2x+2\sin x\cos x$$

의 그래프가 직선 $y=a$와 세 점에서 만날 때, a의 값은? [3점]

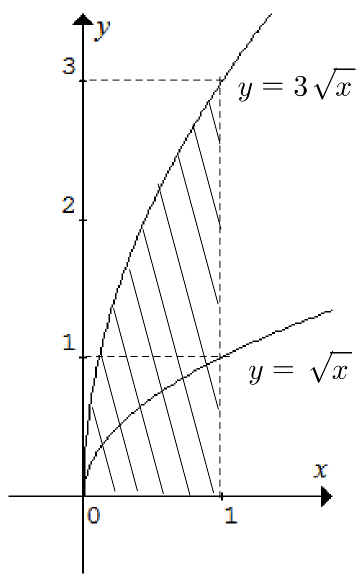
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

04. [계산 vs 기하학적 해석]

$sol.1)$

$$\therefore \int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=2\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2(1-0)=2$$

$sol.2)$



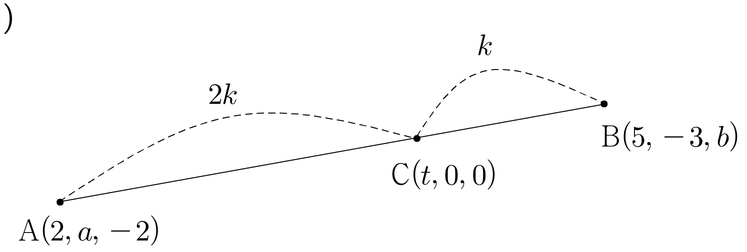
$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$이기에 그 역함수에 대응하는 부분을 보자면 $\int_0^1\sqrt{x}\,dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 $\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=2$가 됩니다. 사실

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)dx=bf(b)-af(a)$$

라는 공식도 암묵적으로 사용한 셈이죠.

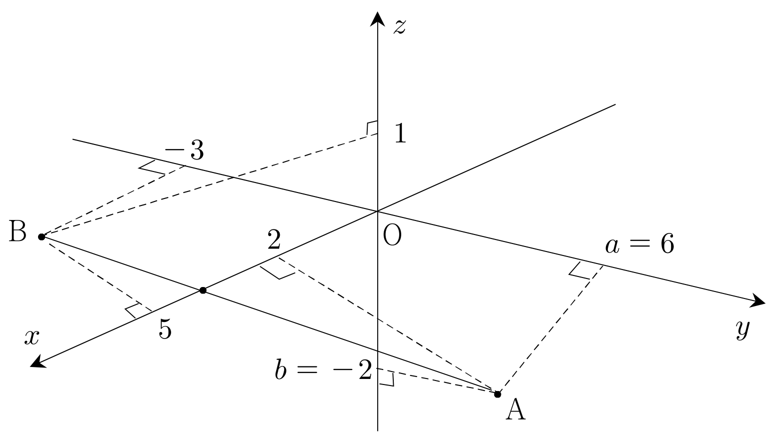
05. [핵심 요소를 관찰할 수 있는 이상적인 위치에서 바라보기]

sol.1)



해당하는 x축 위의 내분점을 $\mathrm{C}(t,0,0)$이라고 두겠습니다. 이때, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=2:1$이라 해서 $\overline{\mathrm{AC}}=2, \overline{\mathrm{CB}}=1$이 아니기에 적당한 비례상수 k를 이용해 나타낼 수 있습니다. 그런데, 수치가 너무 뻔하므로 굳이 내분점 공식을 이용하지 않더라도 $t=4, a=6, b=1$임을 알 수 있겠죠? 따라서 $a+b=6+1=7$이 됩니다.

sol.2)



실전에선 이런 그림을 그려야 하는지를 걱정 안 해도 됩니다!

06. [말할 수 없는 비밀]

sol)

$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\6\end{pmatrix}$이므로 $a=3$이 됩니다.

※ 여기서 이 문제와는 그다지 상관없지만 똘똘한 학생이 가질만한 의문들로

① 왜 $f=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$라고 간단하게 표기하지 않는가?

② 좌표쌍은 $(a,6)$인데, 이걸 마음대로 $\begin{pmatrix}a\\6\end{pmatrix}$이라고 써도 되는가? 가로로 쓰면 안 되나?

③ $\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$는 어떠한 기하학적 의미를 담고 있는가?

등을 꼽을 수 있습니다. 첫 번째는, 엄밀한 표현 방법이 교과를 벗어나는 수준에서 따로 존재하기에 일차변환을 행렬과 등호로 연결해서는 안 됩니다. 논술에서 혹여나 그렇게 썼다가 채점 위원분들이 기겁할 수도 있으니 표현을 정확하게 써야 합니다.

다음으로 좌표쌍 얘기는, 상관없다고 알고 있으면 충분합니다. 가로로 쓰면 어떻게 될까 하는 이상한 의문은 품지 말고 교과서에 나오는 표현법을 여과 없이 따르는 게 가장 현명합니다.

마지막은, 평가원에선 단 한 번도 묻지 않지만 특히나 사설 모의고사나 문제집에서는 자주 물어봐서 수험생들을 혼란에 빠뜨리는 부분으로서, 역시 신경 쓰지 않아도 됩니다. '판별식 $D=ad-bc=0$이면 평면 상 임의의 직선을 원점을 지나는 직선, 혹은 한 점으로 옮기는 일차변환' 이라는 말은, 그때만 풀고 넘어가도 괜찮습니다.

07. [도형과 결합한 무한등비급수 문제가 수능에서 빠지다니]

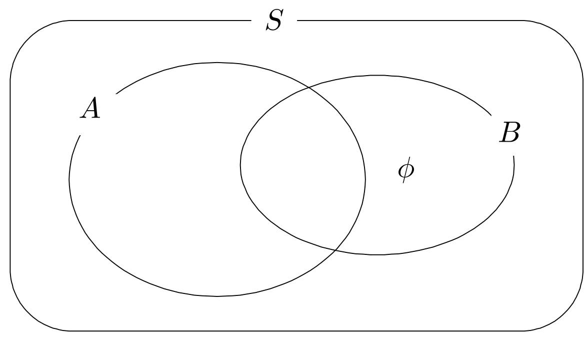
sol)

수열 $\{a_n\}$의 초항이 0이 아니고, 공비가 r이라 하면 이를 항별로 완전제곱해서 만든 수열 $\{(a_n)^2\}$ 역시 초항이 0이 아니고, 공비가 r^2으로서 등비수열이 됩니다. 즉, $\{(a_n)^2\}:9,1,\frac{1}{9},\cdots$이므로 구하고자 하는 값은 $\dfrac{9}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{81}{8}$이 됩니다.

08. [독립이 아니라 배반]

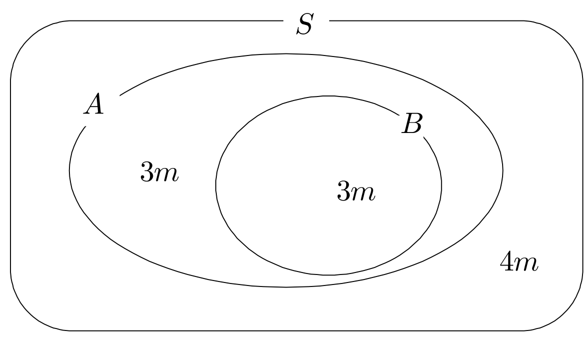
sol.1)

집합의 포함관계의 성질 중에 다소 수험생에게 까다로울 수 있는 것으로 $A^c\cap B=\phi \Leftrightarrow A\supset B$가 있습니다. 혹은 벤 다이어그램을 통해서도 확인이 가능한데



에서 $B\subset A$가 되어야 합니다. 이때 S는 표본공간으로서, '일어날 수 있는 근원사건들을 모두 포함하는 집합'으로 볼 수 있고, A, B의 원소로는 근원사건들이 올 수 있습니다. 여기서 물론 근원사건들이 일어날 확률은 서로 균등하고, 동시에 일어나지 않으며, 그 확률들의 총합은 1이 되어야 합니다.

그러면 수학적 확률의 정의인 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$, 즉 해당 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 것으로서, 근원사건의 수의 개수비가 확률값을 나타냅니다. 따라서 적당히 벤 다이어그램에 원소의 개수를 표기해보면 다음과 같습니다.



이때 m은 비례상수로서 어떤 양의 정수를 의미합니다. 그러면 $\mathrm{P(A)}=\frac{3}{5}, \mathrm{P(B)}=\frac{3}{10}$을 만족하고, $A^c\cap B=\phi$가 됩니다. 따라서,

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\dfrac{n(A\cap B^c)}{n(S)}=\dfrac{3m}{10m}=\dfrac{3}{10}$이 답입니다.

sol.2)

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}\cancel{(A^c\cap B)}=\mathrm{P}(A)$이자

$\cancel{\mathrm{P}(A\cup B)}=\cancel{\mathrm{P}(A)}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{10}$이 나옵니다.

09. [무한급수를 정적분으로]

sol)

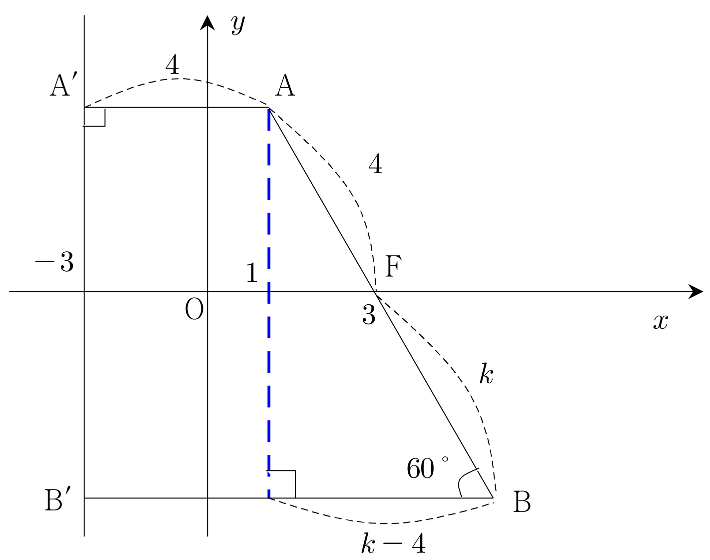
$x_k = 1 + \frac{2k}{n}$라 잡으면 $dx_k = \frac{2}{n}$에 해당하고, 정적분시 아래끝은 $x_1 = 1$ $(\because n \to \infty)$에, 위끝은 $x_n = 3$에 대응이 됩니다. 즉, 준 식은 $\int_1^3 f(x)dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3$이 됩니다.

[2007년 11월 대수능 수리(가형) 20번]

20. 함수 $f(x) = x^3 + x$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

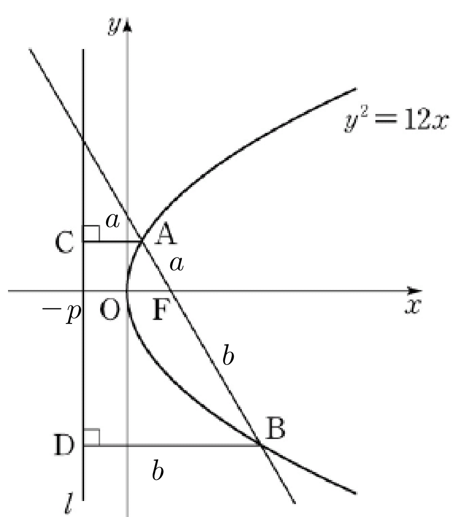
10. [포물선의 성질]

sol.1)



이렇게 보조선을 그어 보니 $1:2:\sqrt{3}$ 길이비의 직각삼각형이 보이네요.
따라서, $\cos 60^\circ = \frac{k-4}{k+4}$에서 $k = 12$가 나옵니다.

sol.2)



증명은 생략합니다만 $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$라는 공식을 통해서 $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{b}$이므로 $b = 12$를 얻을 수 있습니다. 여담이지만 수험생들이 많이 보는 『한권으로 완성하는 수학 – 기하와 벡터』편 중 포물선의 다양한 성질을 자그마치 11개나 제시하고 있습니다. 사실 사설용 공식인지라 외워도 그만 안 외워도 그만인데, 수능에 또 나와 버렸네요.

[2012년 11월 대수능 수리(가형) 18번]

18. 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}} = 1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}} = a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

11. [이쯤에서 시험의 난이도를 눈치 채셨나요]

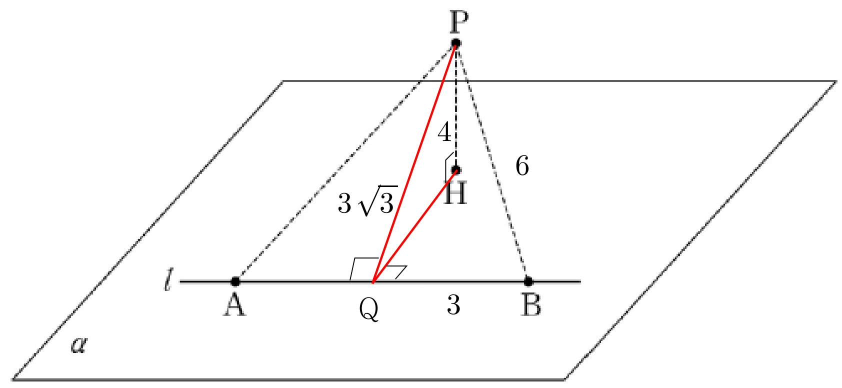
sol)

공장에서 생산되는 과자 1봉지의 무게를 확률변수 X라 두겠습니다. 그러면 $X \sim \mathrm{N}(75, 2^2)$이므로 주어진 표준정규분포표를 참고하여 구해보면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(76 \le X \le 78) &= \mathrm{P}(0.5 \le Z \le 1.5) \\ &= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417 \end{aligned}$$

12. [수직 관계]

sol)



점 P에서 직선 l에 수선을 내리기 위해서 한 번에 내리지 말고, 우선 평면 α위로 수선의 발 H를 내립니다. 그 다음 동일 평면 α상에서 점 H로부터 직선 l에 이르는 최단거리를 나타냈을 때, 점 Q가 곧 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발이 됩니다. 삼수선 정리에 의해 이 모든 사실이 보장됩니다.
이렇게 보면 수직 관계가 많이 보이고, 피타고라스 정리를 이용하면 $\overline{\mathrm{HQ}} = \sqrt{27 - 16} = \sqrt{11}$이 나옵니다.

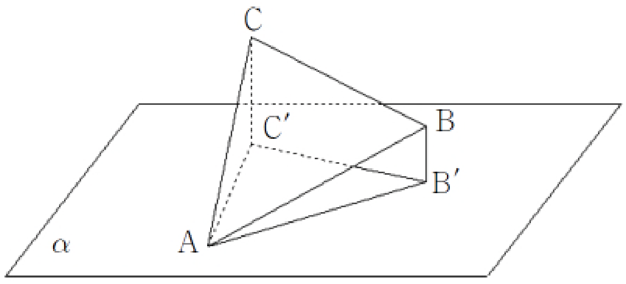
[2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 11번]

15. 좌표공간에 두 점 $(a, 0, 0)$과 $(0, 6, 0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $(0, 0, 4)$와 직선 l 사이의 거리가 5일 때, a^2의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[2013년 07월 사관학교 수학 영역(B형) 19번]

19. 그림과 같이 평면 α와 한 점 A에서 만나는 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B′, C′이라 하자. $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=2$, $\overline{\mathrm{C'A}}=\sqrt{3}$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

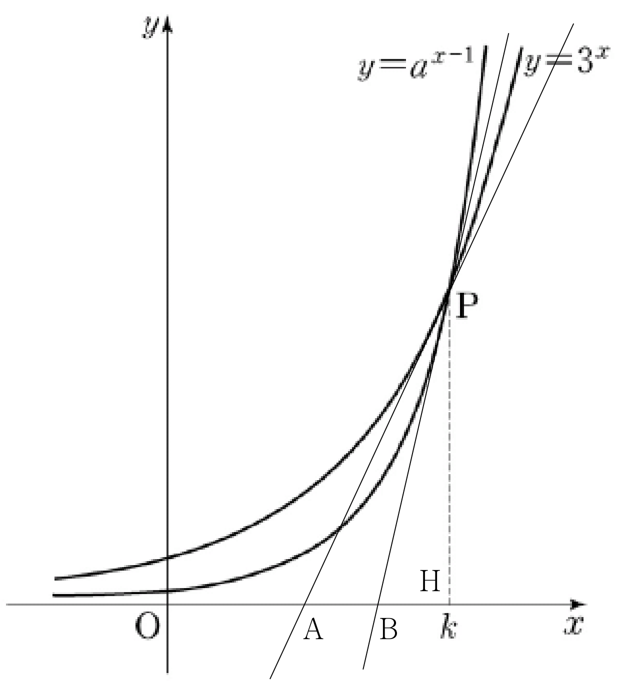
13. [변수 관계 파악하기]

sol)
점 P는 두 지수함수의 교점이므로, 두 함수식을 동시에 따르는 유일한 점이 됩니다. 즉, $a^{k-1}=3^k$가 성립합니다. 이때, $a>3$이므로 $\frac{a}{3}>1$이며 $\left(\frac{a}{3}\right)^k=a$로 볼 수도 있습니다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{k}}{\frac{a}{3}+\left(\frac{3}{a}\right)^{n}}=\frac{a}{\frac{a}{3}+0}=3$$

14. [접선 작도]

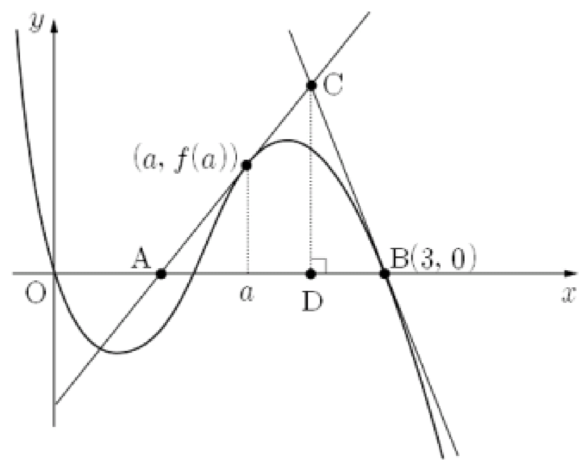
sol)



점 P에서 곡선 $y=3^x$와 $y=a^{x-1}$에 접하는 접선의 기울기는, 미분계수 의 관점에서 각각 $(3^x)'|_{x=k}=3^k\ln 3$과 $(a^{x-1})'|_{x=k}=a^{k-1}\ln a$이자, 직각삼각형의 빗변의 기울기라는 관점에서 $\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$와 $\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$가 됩니다. 한편, $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$라고 가정하였으므로 $2(3^k\ln 3)=a^{k-1}\ln a$가 됩니다. 그리고, $a^{k-1}=3^k$이므로 $a=3^2=9$가 답이 됩니다.

[2007년 07월 교육청 수리(가형) 12번]

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 B$(3, 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은? [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. [표를 통한 조건부 확률의 해석]

sol)
이 문제도 상당히 많이 출제되었던 유형입니다. 다음과 같이 표본공간을 표로 나타낼 수 있습니다.

	가입 O	가입 X	
남학생	$3a$	$2a$	$5a$
여학생	b	b	$2b$
	$3a+b$	$2a+b$	$5a+2b=320$

그러면 $p_1=\frac{3a}{3a+b}$이고, $p_2=\frac{b}{3a+b}$가 되고, $p_1=2p_2$로부터 $3a=2b$가 됩니다. 따라서, $5a+2b=8a=320$이므로 $a=40, b=60$이 됩니다. 고로, 이 학교 남학생의 수는 $5a=200$이 나옵니다.

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 11번]

11. 어느 공항에는 A, B 두 대의 검색대만 있으며, 비행기 탑승 전에는 반드시 공항 검색대를 통과하여야 한다.
남학생 7명, 여학생 7명이 모두 A, B 검색대를 통과하였는데, A 검색대를 통과한 남학생은 4명, B 검색대를 통과한 남학생은 3명이다. 여학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 A 검색대를 통과한 여학생일 확률을 p라 하자.
B 검색대를 통과한 학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 남학생일 확률을 q라 하자.
$p=q$일 때, A 검색대를 통과한 여학생은 모두 몇 명인가?
(단, 두 검색대를 모두 통과한 학생은 없으며, 각 검색대로 적어도 1명의 여학생이 통과하였다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. [역행렬 존재 여부, 교환법칙 성립 여부]

sol)

$A^2-AB=3E$로부터 $\frac{1}{3}A(A-B)=E$이므로 $A, A-B$의 역행렬이 모두 존재함을 알 수 있고, 따라서 $\frac{1}{3}A(A-B)=\frac{1}{3}(A-B)A=E$ 로부터 $AB=BA$를 이끌어 낼 수 있습니다. 고로, ㄱ, ㄴ은 참.

또한, $A^2B-B^2A=AB(A-B)=A+B$의 양변에 $(A-B)^{-1}=\frac{1}{3}A$를 곱하면 $AB=\frac{1}{3}(A^2+AB)$, 즉 $A^2=2AB$가 됩니다. 그런데, A의 역행렬이 존재하므로 양변에 다시 A의 역행렬을 가하면 결국 $A=2B$가 되고, 이를 $A^2-AB=3E$의 관계에 대입하면 $4B^2-2B^2=2B^2=3E$가 됩니다. 이때, ㄷ에서 묻고 있는 것은 $(A+2B)^2=(4B)^2=16B^2=24E$로 참이 됩니다.

※ 매번 이런 문제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 정답인 경우가 많아서, 풀지도 않고 답을 찍는 학생도 종종 있습니다. 그런데 올해 9월 평가원에선 ㄱ, ㄴ이 정답이었기에 약간 변화를 주는 것 같았으나, 수능 때는 다시 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 답인 경우로 출제되었네요. 그리고 역대 평가원 기출문제들을 살펴보면 역행렬이 존재하는가, 교환법칙이 성립하는가 여부는 매번 참인 경우가 과반수 였습니다.

17. [간단한 점화식 계산하기]

sol)

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

이므로 $f(n)=n$이고, $f(7)=7$이 됩니다. 그리고 $n\ge 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n\times n!-(n-1)\times(n-1)!$$
$$=(n-1)!\{n^2-(n-1)\}$$

이므로 $g(n)=n^2-n+1$이고, $g(6)=31$입니다. 따라서, $f(7)+g(6)=38$이 됩니다.

18. [낯설게 하기]

sol)

주머니에서 $1, 2, 3$이 적힌 구슬을 하나 뽑을 확률은 각각 $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{5}{8}$가 됩니다. 그리고, 구슬을 꺼내어 확인한 후 다시 넣는 복원 추출의 상황에서 두 번의 시행을 통한 구슬에 적힌 눈의 평균이 2가 되는 경우는 다음과 같이 세 가지가 가능합니다.

X_1 \ X_2	1	2	3
1	1	1.5	2
2	1.5	2	2.5
3	2	2.5	3

순서대로 $2, 2$가 적힌 구슬을 뽑는 사건과 달리 $1, 3$이 적힌 구슬을 뽑는 사건에 대해서는 $1, 3$순으로 뽑는 경우와 $3, 1$순으로 뽑는 것을 구분해줘야 합니다. 혹은 표에서처럼 근원사건의 개수가 다르기 때문에 확률의 가중치를 고려해야 한다고 볼 수도 있습니다. 어차피 이걸 고려 안하고 구한 답은 보기에 없어서 이상함을 느끼고 다시 생각하게 되지만요. 따라서,

$$P(\overline{X}=2)=P(X=1)P(X=1)+\{P(X=2)\}^2+P(X=3)P(X=1)$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5+4+5}{64}=\frac{7}{32}$$

이 답이 됩니다. 여기서 약분은 맨 마지막에 해도 충분하므로, 계산의 편의를 위해 항상 기약분수를 가지고서 계산할 필요는 없겠죠?

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 13번]

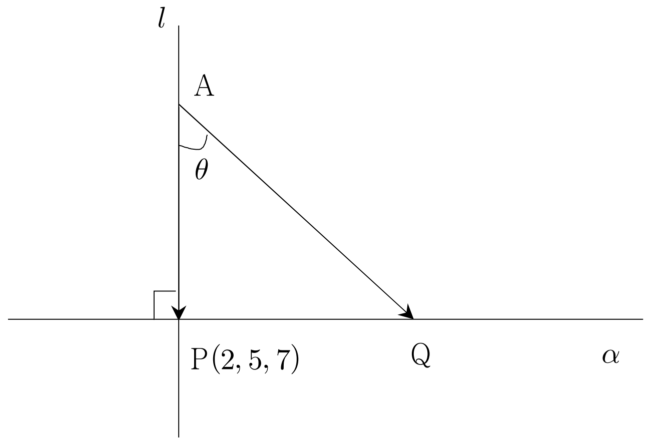
13. 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고, 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S였을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

19. [벡터의 내적 계산법]

sol)

두 벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 계산할 때, 각 벡터를 좌표로 나타내어 동일 성분 곱들의 합으로 표현할 수 있는 방법이 있고, 혹은 크기의 곱에다 사잇각에 대한 코사인 값을 곱하는 방법이 있습니다. 지금은 후자의 방법이 더 유용합니다.

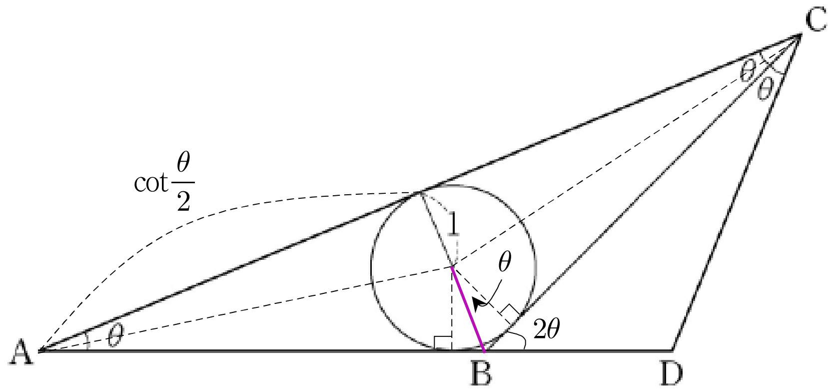


$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|^2=6$이 되고, 직선 l의 방향벡터 $(2, -1, 1)$의 크기가 이미 $\sqrt{6}$이기 때문에 $A(4, 4, 8)$임이 뻔히 보이지만, 직선 l 위의 점 A를 매개변수 t로 나타내면 $A(2+2t, 5-t, 7+t)$이고, $|\overrightarrow{AP}|^2=6=4t^2+t^2+t^2=6t^2$에서 $t=\pm1$이고, $a>0$ 조건에서 $t=1$을 취하면 $A(4, 4, 8)$이 되어 $a+b+c=16$이 나옵니다.

※ 기하학적 상황을 도시화할 때, 굳이 평면과 직선에 리얼리티를 가미해서 그릴 필요는 없습니다. 문제에서 묻고 있는 것을 찾기 위해 본질적인 요소들은 그대로 두고, 나머지 비본질적인 요소들은 제거해서 그려보면 평면과 직선을 두 개의 직선으로 묘사할 수 있습니다. 여기서 비록 그리는 건 두 직선이지만 우리가 인식하는 것은 평면과 직선이 되어야겠죠.

20. [차분하게 시키는 대로]

sol)



한번 거꾸로 생각해보도록 하겠습니다. $S(\theta)$, 즉 삼각형 BDC의 넓이를 구하기 위해서 밑변과 높이에 해당하는 성분 내지는, 두 변의 길이와 그 끼인각을 알면 충분합니다. 그런데 우리가 흔히 알고 있는 내접원의 반지름을 이용한 공식이라든가, 각의 이등분선에 대한 정리 등등 아무렇게나 막 써버리면 수식이 지나치게 복잡해질 수 있기 때문에 신중하게 판단하여야 합니다. 우선 삼각형 ABC의 내접원의 중심에서 각 변에 수선을 내려보면 $\overline{\mathrm{BC}} = \tan\theta + \cot\frac{\theta}{2}$이고 삼각형 BDC에 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\theta}$가 되어 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BC}}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$이므로

$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\sin 2\theta$에서

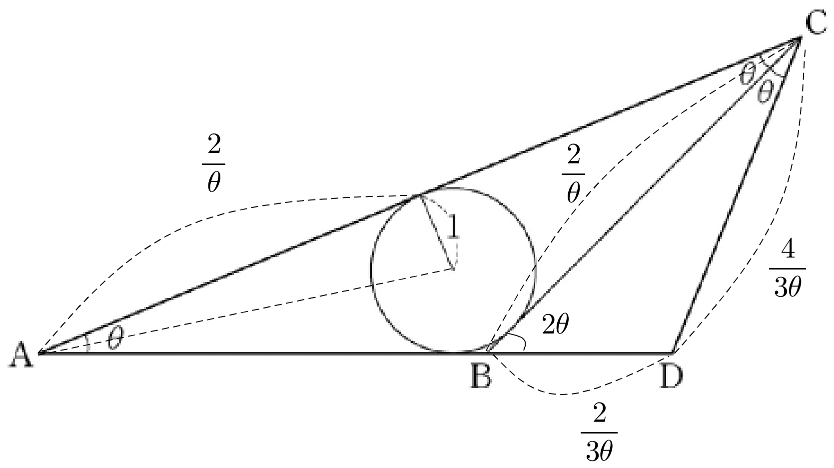
$$\lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}\left(\tan\theta + \cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$= \lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{2\sin 3\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot(0+2)^2 = \frac{4}{3}$$

가 답이 됩니다.

※ 별해로서 삼각함수의 테일러 전개에 의한 근사를 이용한 풀이입니다.



$\theta\to 0$일 때, 즉 θ가 무한소로 한없이 다가가는 극한 상황을 포착하면 $\sin\theta \simeq \theta, \tan\theta \simeq \theta$로 두고서 논리를 전개해 나갈 수 있습니다. 논리적 비약과 오류를 철저히 배제하고서 말이죠! 그러면

$S(\theta) \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\theta}\cdot\frac{2}{3\theta}\cdot 2\theta = \frac{4}{3\theta}$에서 답은 $\frac{4}{3}$.

21. [나열을 통한 발견적 추론]

sol)

직선 BC의 방정식은 $y - 0 = \frac{m}{2^m - 1}(x-1)$이므로 $\mathrm{D}\left(2^n, \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$

이라 할 수 있고, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(2^n-1)\cdot\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}$이고,

$$\frac{1}{2}\cdot(2^n-1)\cdot\frac{m(2^n-1)}{2^m-1} \le \frac{m}{2}$$

즉, $(2^n-1)^2 \le 2^m - 1$로 정리가 됩니다. 여기까지가 이번 9월 평가원 마지막 문제와 유사하죠!

다음으로 $n=1$일 때, $1 \le 2^m - 1$에서 $a_1 = 1$이고,

$n=2$일 때, $9 \le 2^m - 1$에서 $a_2 = 4$이고,

$n=3$일 때, $49 \le 2^m - 1$에서 $a_3 = 6$이고,

$n=4$일 때, $225 \le 2^m - 1$에서 $a_4 = 8$이고,

$\vdots$

이러한 과정을 반복하면

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 1 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 20 = 2\times 55 - 1 = 109$가 나옵니다. 맨 앞에 1이 등차수열의 경향성에서 벗어나는데 이정도는 여러분들도 충분히 보정해서 계산할 수 있겠죠?

22. [계산!]

sol)

$x + 6 = 2^5$에서 $x = 32 - 6 = 26$입니다. 문제가 쉽다고 해서 설렁설렁 풀다가 이런 곳에서 계산 실수 할 수도 있으니 항상 긴장감을 늦추어선 안 됩니다!

23. [미분계수]

sol)

$f'(x) = -\sin x + 8e^{2x}$에서 $f'(0) = 0 + 8 = 8$이 답입니다. 간단한 미분 공식이니 외우고 계시리라 보고 넘어가겠습니다. 그런데 문제가 정말 열심히 공부한 수험생들 김 새게 하네요.

24. [그래프를 가미한 방부등식 문제는 어디에]

sol)

$\sqrt{x^2-6x-1}=t\geq 0$로 치환하면 준 식은 $t^2+1-t=3$, 즉 $t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$에서 $t=\sqrt{x^2-6x-1}=2$가 되어 $x^2-6x-5=0$으로 모든 실근의 곱 $k=-5$가 됩니다. 따라서 $k^2=25$가 답입니다.

25. [작년엔 그런대로 어려웠는데]

sol)

$P_A=20\log 255-10\log E_A$에서 $P_B=20\log 255-10\log E_B$를 빼면 $P_A-P_B=10\log\dfrac{E_B}{E_A}=10\log 100=20$이 답이 됩니다.

26. [헐헐헐]

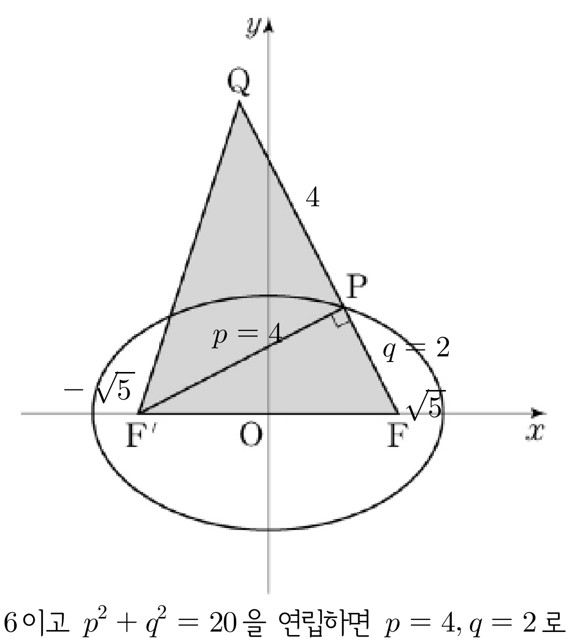
sol)

(가) 조건을 만족하려면 a,b,c 모두 홀수여야 합니다. 그리고 (나) 조건에 의해 a,b,c는 곧 $1,3,5,\cdots,19$의 총 10개의 홀수 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑는 경우의 수가 됩니다. 이때 ${}_{10}H_3$인지 ${}_3H_{10}$인지가 특히 헷갈릴 수 있는데 간단한 경우를 통해 올바른 공식을 사용하면 됩니다!

만약 $1,3$ 두 개의 홀수 중에서 중복해서 3개를 뽑는 경우를 헤아려 보면 $(1,1,1),(1,1,3),(1,3,3),(3,3,3)$의 네 경우가 있으므로 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이고 ${}_2H_3={}_4C_3=4$이므로 ${}_{10}H_3$로 계산 하는게 올바른 것임을 알 수 있습니다. 고로 ${}_{10}H_3={}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{6}=220$가 답이 됩니다.

27. [타원과 직각]

sol)



$p+q=6$이고 $p^2+q^2=20$을 연립하면 $p=4, q=2$로 잡을 수 있습니다. 이때 삼각형 $\mathrm{QF'F}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$입니다.

28. [더 이상 계산할 수 없는 수식 덩어리]

sol)

$f'(x)=(a-x)e^x$에서 $f(x)$의 극댓값이자 최댓값은 $x=a$에서 갖습니다.

그러면

$$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t dt=\left[(a+1-t)e^t\right]_0^a$$
$$=e^a-a-1=32$$

를 얻습니다. 여기서 a값을 구하려고 시도할 필요가 없죠!

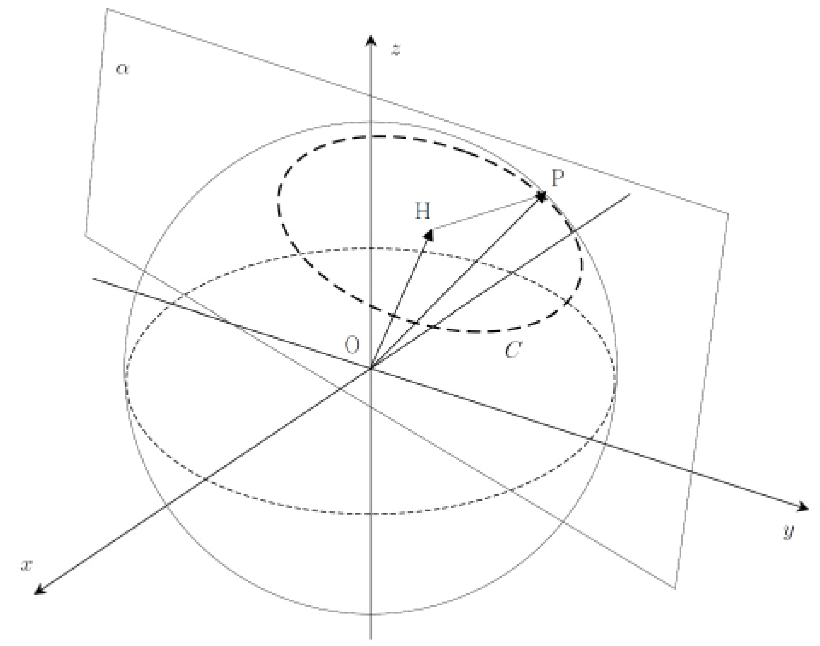
한편, 해당하는 부분의 넓이는

$$\int_0^a (3e^x-3)dx=3\left[(e^x-x)\right]_0^a=3(e^a-a-1)=96$$

이 됩니다.

29. [공간 감각]

sol.1)

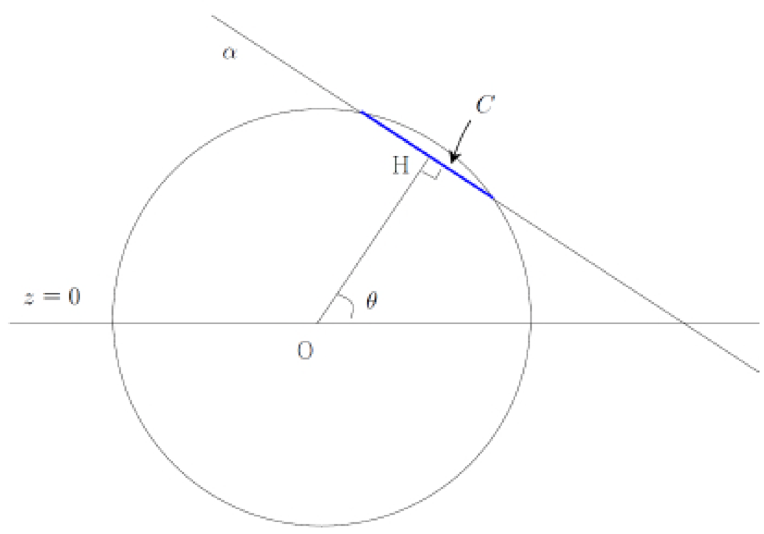


평면 α의 크기가 1인 법선벡터, 즉 단위법선벡터를 (a,b,c)라 하면, $a^2+b^2+c^2=1$이고, 최근 기출들을 통해 이러한 발상을 하는 것도 이제는 자연스러워 졌습니다.

$\alpha : a(x-0)+b(y-5)+c(z-5)=0$

즉, $\alpha : ax+by+cz=5b+5c$라 둘 수 있습니다.

그리고 평면 α와 구가 만나서 생기는 교원을 C라 하고, 그 중심을 H라 하겠습니다. 그러면 교원의 반지름으로서 $\overline{\mathrm{HP}}=1$이고,



$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{50-1} = 7$입니다.
한편, 원점과 평면 α 사이의 거리로부터

$$\frac{5b+5c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 5b+5c = 7$$

xy평면의 법선벡터와 α평면의 법선벡터가 이루는 예각 $\frac{\pi}{2}-\theta$에 대하여

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = c$$

이고, 교원 C의 xy평면 위로 정사영 넓이는
$\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \pi\sin\theta = c\pi$이므로 c의 최댓값을 구하면 됩니다.

정리하자면, $a^2+b^2+c^2=1$이고, $b+c=\frac{7}{5}$일 때 c의 최댓값을 구하는 문제로 환원한 셈 입니다. 이때 $b^2+c^2=1-a^2$에서 바로 $a=0$으로 두면 논리적 비약의 소지가 있으므로

$$(b+c)^2 = b^2+c^2+2bc = 1-a^2+2bc = \frac{49}{25}$$

로부터 $bc = \frac{12}{25}+\frac{a^2}{2}$이므로 근과 계수와의 관계를 통해 이차방정식

$$t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} + \frac{a^2}{2} = 0$$

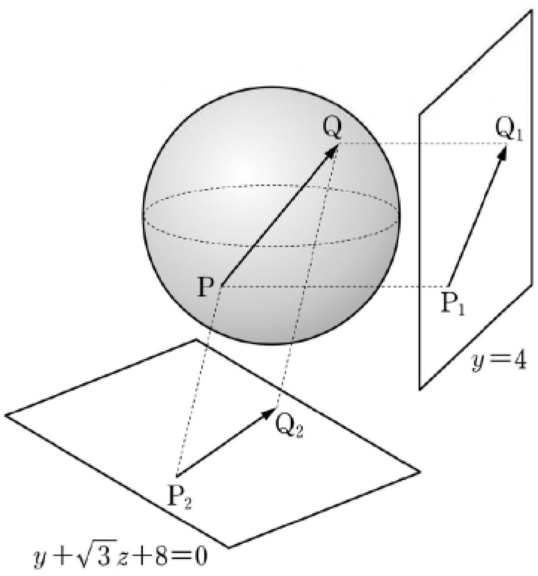
의 두 근을 b, c로 보고 근의 공식을 적절히 사용하면

$$c = \frac{\frac{7}{5}+\sqrt{\frac{49}{25}-4\left(\frac{12}{25}+\frac{a^2}{2}\right)}}{2} \le \frac{\frac{7}{5}+\sqrt{\frac{1}{25}}}{2} = \frac{4}{5}$$

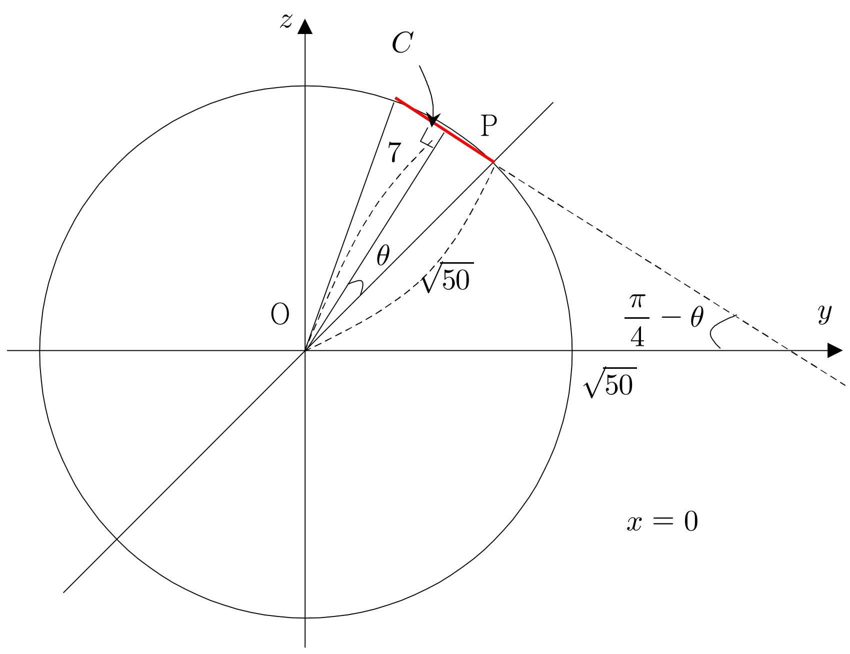
가 되어 구하고자 하는 교원 C의 xy평면 위로 정사영 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{5}\pi$가 나옵니다. 따라서 $p+q=9$가 됩니다.

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번]

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



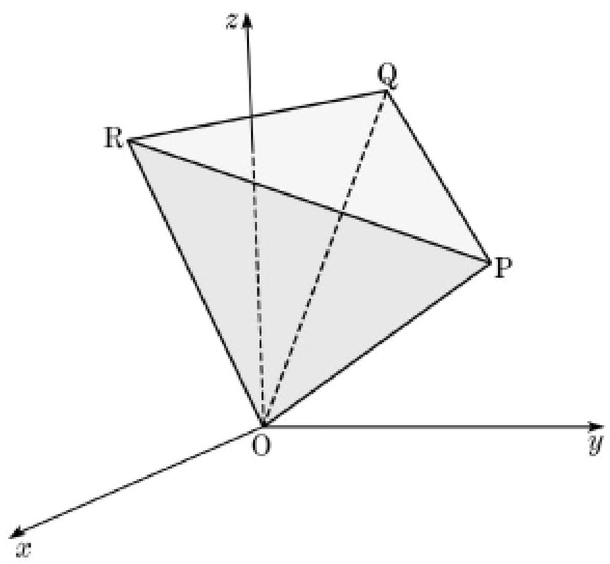
*sol.*2)
수치들을 보니 출제자분들의 배려가 팍팍 느껴지네요. 교원 C가 어떤 식으로 존재해야 하는지 그 상황이 바로 보이므로 단면화 해보겠습니다.



$\tan\theta = \frac{1}{7}$이고 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{50}}$이며, 구하고자 하는 값은
$\pi\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right) = \frac{4}{5}\pi$로부터 $p+q=9$가 됩니다. 사실 이 문제를 가장 적중했다고 볼 수 있는 문항은 수능 며칠 전 10월 교육청에 나왔었죠!

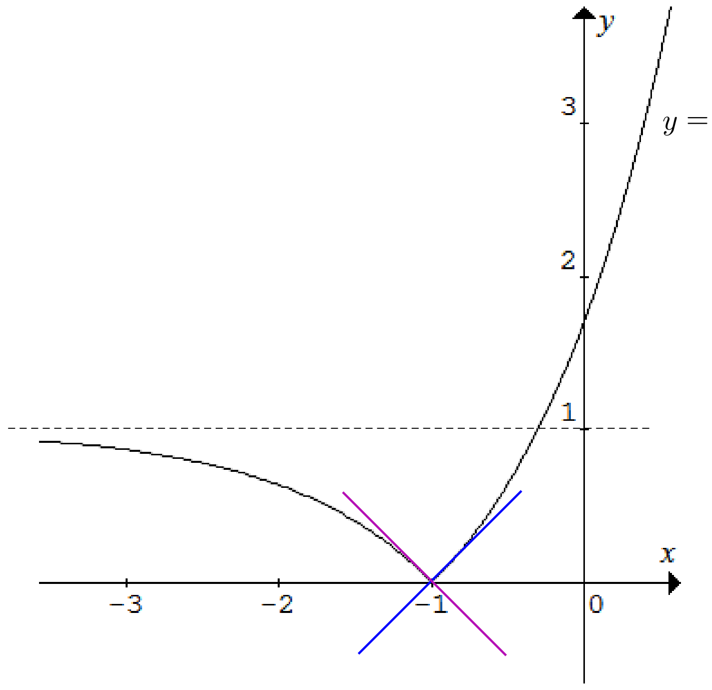
[2014년 10월 교육청 수학 영역(B형) 30번]

30. 그림과 같이 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 OPQR의 한 면 PQR가 z축과 만난다. 면 PQR의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S의 최솟값은 k이다. $160k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



30. [막힐 때면 정의로 돌아갈 것]

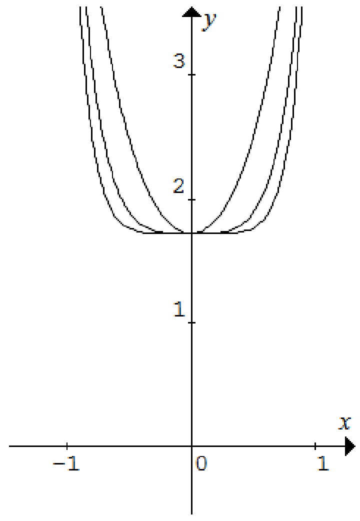
sol)
먼저 $f(x)$ 부터 그려보면 다음과 같습니다.

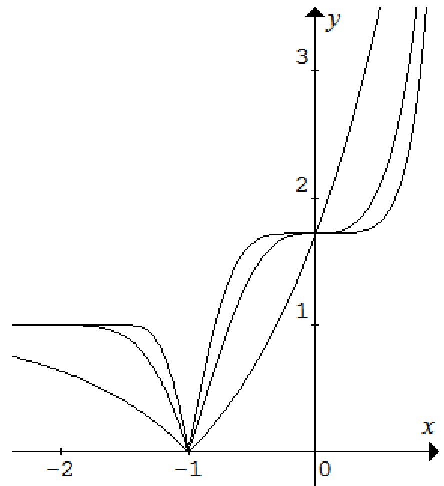


즉, $y=f(x)$는 모든 실수에서 연속이고, $x=-1$을 제외한 모든 실수에서 미분 가능합니다. 다음으로 $g(x)$를 어떻게 구성하고 있는가 보니

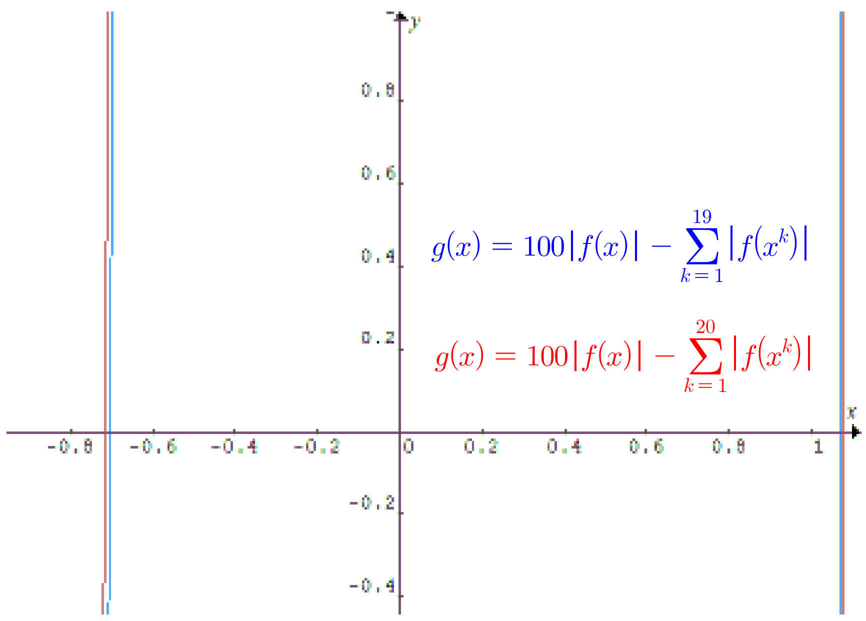
$$g(x)=100|f(x)|-|f(x)|-|f(x^2)|-|f(x^3)|-\cdots-|f(x^n)|$$

와 같은 모습이네요. 그러므로 $|f(x^2)|, |f(x^3)|, |f(x^4)|$ 등의 미분 불가능 지점을 살펴보아야 합니다.
사실 $f(x^k)$만 놓고 보면 모든 실수에서 연속이고 미분 가능입니다. 하지만 $|f(x^k)|$로 만드는 과정, 즉 x축 아랫부분을 위로 접어 올리는 과정에서 잘 하면 미분 불가능한 지점이 발생할 수도 있겠지만, 그 외의 미분 불가능한 지점은 생각해줄 수 없겠네요! $g(x)$가 모든 실수에서 미분 가능하다고 하였으니 $100|f(x)|$가 $x=-1$에서 미분 불가능했던 것들을 $\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$가 해결해주면 될테니, $|f(x^k)|$ 각각을 살펴보도록 하겠습니다.
이때, 미분 불가능 지점이 발생할 수 있는 가능성이 있는 지점은 $f(x^k)=e^{x^k+1}-1=0$인 순간인데, $x^k+1=0$이 되어야 하고, k가 짝수면 $x^k+1\ge 1>0$이 되어 항상 $|f(x^k)|$가 모든 실수에서 미분 가능하게 됩니다. 즉, 불필요하죠. 필요하다면 언제든 더해도 상관 없습니다.
하지만 k가 홀수면 상황이 달라지죠! $x^k+1=0$를 만족하는 $x=-1$에서 미분이 불가능 하게 됩니다. 만약 $f(x^k)=e^{x^k+1}-1$에서 k가 홀수일 때 $x=-1$에서의 미분계수가 m이라면 $|f(x^k)|=|e^{x^k+1}-1|$에서 $x=-1$에서의 우미분계수는 m이 되고, 좌미분계수는 $-m$이 되어 $m=0$이 아닌 이상 $x=-1$에서 $|f(x^k)|$는 미분 불가능하게 됩니다.
가령, $y=|x|-|x|=0$과 같이 어떤 점에서 미분 불가능한 두 함수끼리 더하거나 빼게 되면 기존의 미분 불가능한 지점에서 미분 가능하게 될 수도 있고, 지금 문제에서도 이와 같은 효과를 기대하고 있습니다.
$y=100|f(x)|$의 $x=1$에서의 좌, 우미분계수는 각각 $-100, 100$이고,
$y=|f(x)|$의 $x=1$에서의 좌, 우미분계수는 각각 $-1, 1$이고,
$y=|f(x^3)|$의 $x=1$에서의 좌, 우미분계수는 각각 $-3, 3$이고,
$y=|f(x^5)|$의 $x=1$에서의 좌, 우미분계수는 각각 $-5, 5$이고,
이런 식으로 $g(x)$가 모든 실수에서 미분 가능한 함수가 되려면 필요한 $|f(x^k)|$는 $|f(x^{19})|$까지가 됩니다. 마침 $100=1+3+5+\cdots+19$라는 관계가 성립하기 때문이죠. 그러면 $\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$라는 형태에서 볼 수 있듯 $k=1, 2, 3, \cdots, n$이 대입되는 양상이므로 가능한 n의 값으로는 $19, 20$이 있습니다. 따라서, 만족하는 n값의 합은 $19+20=39$가 됩니다.
※ 실제 $y=|f(x^{2m})|$과 $y=|f(x^{2m-1})|$의 그래프는 다음과 같습니다.





그리고 $n=1, 2, 3, 4, 5$일 때와 $n=19, 20$일 때 $g(x)$의 그래프를 보여드리려 하니까, 함숫값이 너무 급격하게 변화하는 바람에 미분 가능한지 불가능한지도 구분이 안 갈 정도로 별 감흥없는 작대기 몇 가닥으로 밖에 안 보이네요.



[2013년 04월 교육청 수학 영역(B형) 30번]

30. 함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-k| \quad (k\text{는 } 0<k<6\pi\text{인 상수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]