입시를 준비하면서 “프랙탈(fractal)”이란 말은 몇 번이고 들었을 만합니다.

한 번 엔하위키[1]에서 찾아보니 다음과 같이 소개하고 있네요.

프랙탈 이론

Contents

1. 개요 ¶

[가edit]

흔히 말하는 차원의 개념을 뒤엎은 이론이다.

이전까지 알려지던 차원의 정의가 좌표축의 개수(2차원은 x,y, 3차원은 x,y,z라는 접근방식)이라면, 프랙탈 이론에서 말하는 차원은 자기복제를 하는데 필요한 도형의 숫자로 정의된다.

수식(...)을 동원하면, 어느 도형의 길이를 x배 크게 만들었을 때 그 도형의 면적(혹은 부피)이 n배 증가한다고 가정하면, $log(n)/log(x)$ 가 그 도형의 차원인 것이다.[1] 예를 들면, 정사각형을 모아서 길이가 두 배인 정사각형을 만들면 정사각형의 면적이 4배로 증가한다. 고로 정사각형의 차원을 수식으로 구하려면 4 = 2의 d제곱 -> 따라서 2차원이라고 할 수 있다.

몇 가지 예를 더 들면,

정사각형의 길이를 3배로 만들면 면적은 9배가 되기 때문에 9 = 3의 d제곱 -> 역시 2차원
정육면체의 한 변의 길이를 2배 크게 만들면 부피는 8배가 되기 때문에 8 = 2의 d제곱 -> d=3이므로 3차원
직선을 5배 크게(=길게) 만들면 길이는 5배가 되기 때문에 5 = 5의 d제곱 -> 1차원

...이와 같이 정의된다.

그렇다고 이 자리를 빌어 진짜 이러한 프랙탈 이론을 소개하려는 것은 아닙니다 ^^;;;;;

프랙탈도 따지고 보면 ‘일정한 비율로 줄어드는 도형들’에 관한 것이므로

바로 고등학교 입시 수학에 등장하는 “도형과 결합한 무한급수” 문제가 이에 해당하죠.

~~제목을 좀 짤막하게 하려고 프랙탈이라 한 것도 있습니다.~~

2016학년도 대수능까지는 교육과정상 수학Ⅰ의 수열의 극한 단원에 해당하는 내용이며,

2017학년도 대수능부터는 교육과정상 미적분Ⅰ의 수열의 극한 단원에 해당하는 내용입니다.

그간 너무 많이 나왔기에 앞으로 교육과정이 바뀌고도

이 문제가 현재의 위상을 유지할지는 미지수이나

1) https://mirror.enha.kr/wiki/%ED%94%84%EB%9E%99%ED%83%88%20%EC%9D%B4%EB%A1%A0

2004년부터 시작된 제7차 교육과정부터 지금의 교육과정에 이르기까지

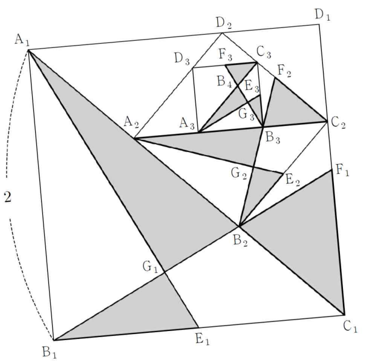
오랫동안 축적되어 온 문제들을 놓고 보면

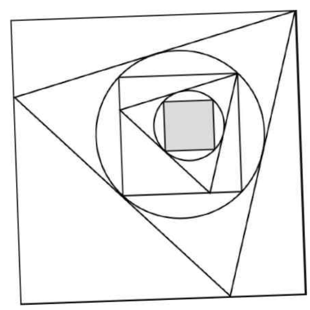
수험생들을 꾸준하게 괴롭혀 온 문항이었음은 분명합니다.

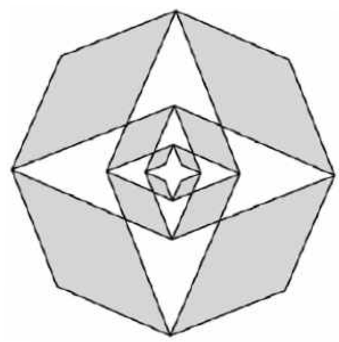
기본적인 해법은 도형들 속에서

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

꼴의 무한등비급수를 찾아 계산하여 값을 구하면 되는 것인데,







이제는 수많은 기출들에서 걷잡을 수 없을 만큼 다양하고 독특한 방식으로 변주 되어버려서

많은 수험생들이 어려워하는 문제 중에 하나입니다.

물론 잘 푸는 사람들은 이런 글을 안 보더라도 뚝딱뚝딱 또이또이하게 풀어 냅니다.

그래서 문제들을 최대한 “잘” 다루어 보려고 합니다.

처음 이 개념을 공부하는 학생들에게는 다소 버거울 수 있습니다만

누구에게나 시작은 어려웠기 마련이고,

여러분이 열정과 끈기를 갖고 하다 보면 어느 순간

수학적 그 무언가가 곁에 와 있을 겁니다!

정상적으로 고등학교 교육과정을 이수한 고등학생이 풀 수 있는 무한급수의 종류에는

의외로 몇 가지 안 됩니다. 시험에 등장한 것들만 놓고 보자면

① $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \quad (|r| < 1)$

② $\left(\dfrac{1}{a_1} \cancel{- \dfrac{1}{a_2}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{1}{a_2}} \cancel{- \dfrac{1}{a_3}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{1}{a_3}} \cancel{- \dfrac{1}{a_4}}\right) + \cdots$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$?

정도가 있습니다. ③의 경우 구경하기가 힘든데, 관련 문제를 보자면

[2009년 03월 교육청 수리(가형) 14번]

14. 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, <보기>의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\{S_n\}$

ㄴ. $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$

ㄷ. $\left\{\dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{n}\right\}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

여기서 ㄷ을 해결할 때 편의상 $T_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$이라 두고서

T_n을 다시 $n = 2m-1$일 때와 $n = 2m$일 때로 경우를 나누어

$$\lim_{m\to\infty} \frac{T_{2m-1}}{2m-1} = \lim_{m\to\infty} \frac{T_{2m}}{2m} \ ?$$

인지를 판단할 수 있습니다. 그러면

$\{S_n\}$: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$

$\{T_n\}$: $1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots$

에서 $T_{2m-1} = T_{2m} = m$이기 때문에

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n} = \lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{2m-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{T_{2m}}{2m} = \frac{1}{2}$$

으로 주어진 수열은 수렴함을 알 수 있습니다. 이는 사실

「수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면 $\{a_n\}$의 모든 부분수열 $\{a_{n_k}\}$도 같은 극한 α에 수렴한다」

는 고급 미적분학인 해석학(Analysis)에 등장하는 하나의 정리(Theorem)라서

이런 식의 아이디어를 일반적인 고등학생이 떠올리기가 어려우며,

특히 수능이 아닌 기타 시험에서 가뭄에 콩 나듯이 나오는 유형이라

일부 학생은 억지로 해법을 외워버리곤 합니다.

그리고 ②의 경우도, 차라리 부분분수만을 물어봤던 적은 많이 있었어도

도형과 결합한 꼴로서 부분분수 형태의 문제는 허니버터칩보다 영접하기가 힘듭니다.

[2009년 04월 교육청 수리(가형) 23번]

23. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}(5, 0)$과 1보다 큰 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 1 : n$을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$들의 집합을 T_n이라 하자. 집합 T_n의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 $M(n)$이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

여기서 아폴로니우스의 원등을 이용하여 $M(n)$을 구한 다음 $\dfrac{10M(n)}{n}$ 꼴을 정리해보면 결국

$$\frac{10M(n)}{n}=50\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이 되어 상쇄가 됩니다. 그 다음은 계산만 해주면 되겠죠?

하지만, 지금껏 언급한 ②, ③ 을 제외한 99.99% 가

①에 속한다고 보아도 과언이 아닙니다.

앞으로 펼쳐질 문제들은 ① 중에서 다시 유형이 세분화되는 방식인거죠.

그럼 이제 본격적으로 기출을 하나씩 풀어가며 "도형과 결합한 무한급수"

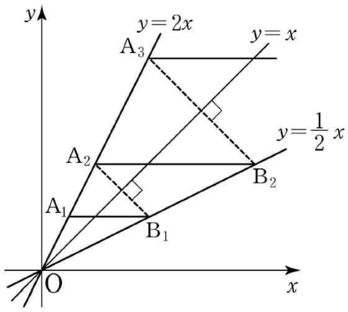
바로 프랙탈 문제가 어떤 식으로 등장하는지 살펴보고,

곳곳에 숨겨진 수학적인 아이디어들을 캐치해보도록 하겠습니다.

[2003년 12월 평가원 수리(나형) 12번]

12. 그림과 같이 두 직선 $y=2x$와 $y=\frac{1}{2}x$가 있다.

$y=2x$ 위의 점 $A_1(1, 2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_1이라 하자. B_1을 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 A_2라 하자. A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_2라 하자. 이와 같은 방법으로 점 $A_3, B_3, A_4, B_4, \cdots, A_n, B_n, \cdots$을 정할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{A_nB_n}}$의 합은? [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ 2

why?

그림을 잘 살펴보자면 $\overline{A_nB_n}$가 닮음비를 유지하며 점점 증가하고 있습니다.

만약 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nB_n}$을 구하라고 했다면 길이들의 공비가 1보다 크므로 발산해버리기 때문에

문제에선 그 역수의 합으로 대신 물어보고 있겠죠?

그리고 등차수열의 역수가 조화수열을 이루는 것과 달리,

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots \rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \frac{1}{ar^3}, \cdots$$

에서처럼 등비수열은 역수를 취하여도 여전히 등비수열이 됩니다.

즉, $\frac{1}{\overline{A_nB_n}}$이 등비수열을 이룬다는 말입니다.

그렇다면 수열 $\left\{\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}\right\}$는 하나의 등비수열로서

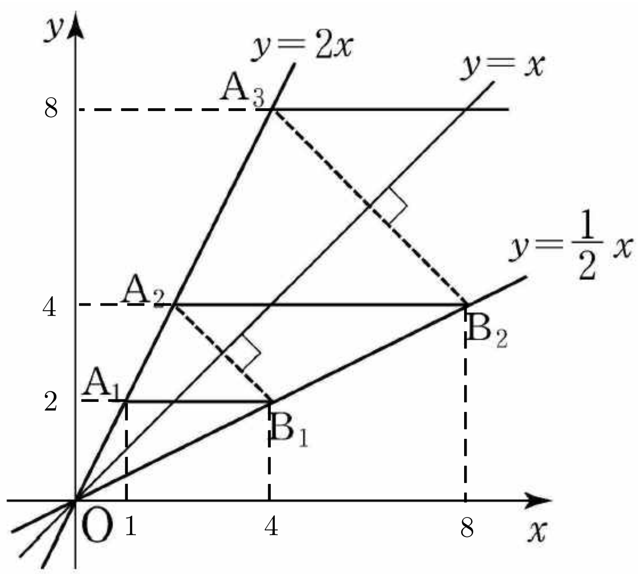
$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

과 같은 모습을 띠게 될 것이고,

답을 구하기 위해 우리는 초항인 a, 즉 $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}$과

공비인 r을 구해서 $\dfrac{a}{1-r}$에 넣어서 계산하면 됩니다.

따라서, 주어진 그림을 이용하여 수열 $\left\{\dfrac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}\right\}$을 구해보도록 하겠습니다.



그러면

$$\left\{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right\} \ : \ 3, 6, 12, \cdots$$

$$\left\{\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}\right\} \ : \ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \cdots$$

로서 주어진 무한급수의 초항 $\frac{1}{3}$과 공비 $\frac{1}{2}$을 모두 구한 셈입니다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

이라 계산이 가능합니다.

만약 문제를 읽고서 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$ 꼴의 상황[2)]임이 확신이 선다면

초항과 공비 두 가지를 각각 구해서 계산만 하면 되겠죠?

재차 강조하건데, 대개의 문제들에선 초항과 공비! 딱 두 가지만 구하면 됩니다.

보통은 여기서 초항을 구하기 귀찮게 내거나, 공비를 구하기 어렵게 묻는 경우가 많습니다.

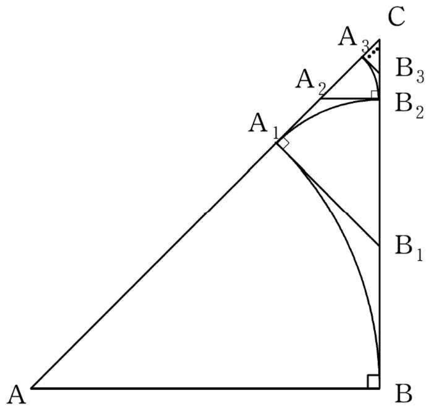
특히나 요즘 추세는 초항을 구하기 어렵게 하는 문제들이 자주 나옵니다.

그런데 이 문제는 요즘 문제들 수준에 비해 초항과 공비 모두 구하기 쉬운 편에 속하네요.

2) 아무 말 없더라도 r은 무한등비급수에서의 공비, 내지는 도형에서의 닮음비를 의미한다 하겠습니다.

[2004년 04월 교육청 수리(가형) 12번]

12. 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 꼭지점 A를 중심, $\overline{AB}$를 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1, $\overline{AC} \perp \overline{A_1B_1}$이면서 $\overline{BC}$ 위에 있는 점을 B_1, 다시 꼭지점 B_1을 중심, $\overline{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{CB_1}$과 만나는 점을 B_2, $\overline{CB_1} \perp \overline{A_2B_2}$이면서 $\overline{A_1C}$ 위에 있는 점을 A_2라고 정하기로 한다.



위와 같은 과정을 계속 반복해 나갈 때,
$\overline{AB} + \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \cdots$ 의 값은? (단, $\overline{AB} = 2$) [4점]

① $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
② $4 - \sqrt{2}$
③ $2\sqrt{2}$
④ $2 + \sqrt{2}$
⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

이것도 이전 문제와 아주 유사합니다.

선분 길이의 무한 합을 물어보고 있고,

아마도 $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \cdots$ 는 공비가 1보다 작아서 수렴하는 등비수열을 이루겠죠?

이때 $\overline{AB} = 2$이고, $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1C} = \overline{AC} - \overline{AA_1} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$입니다.

$\sqrt{2} = 1.414\cdots$ 이므로 공비는

$$\frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}-1 = 0.414\cdots$$

가 되어 확실히 1보다 작죠? 그렇다면

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

의 꼴에서 $a = \overline{\mathrm{AB}} = 2$이고 $r = \dfrac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A_3B_3}}}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}} = \cdots = \sqrt{2}-1$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{A_1B_1}} + \overline{\mathrm{A_2B_2}} + \cdots$$

$$= 2 + 2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}-1)^2 + \cdots$$

$$= \frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

가 답이 됩니다.

이때 분수식 형태를 잘 정리해야 하는데, 지금은 난이도가 ★☆☆☆☆ 쯤 됩니다.

나중에 분수식 꼴이 ★★★★☆ 수준만 되어도

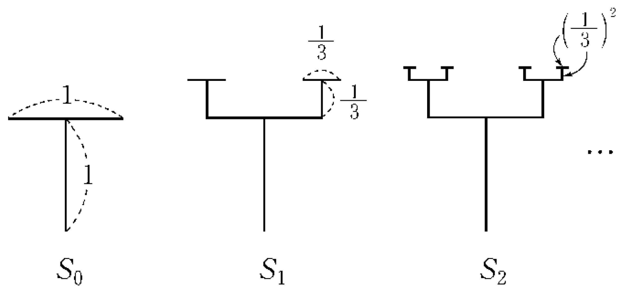
이 파트에서 자신이 없는 수험생들은

수식의 복잡함과 귀차니즘에게 압도되어 부들부들 하면서 손 놓아버립니다만,

그때나 지금이나 계산하는 원리는 같습니다.

[2004년 06월 평가원 수리(가형) 24번]

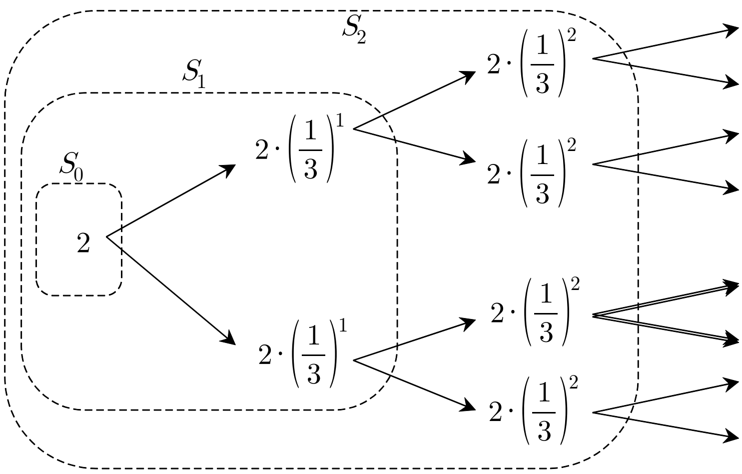
24. 그림과 같이 길이가 1인 선분 2개로 만든 ‘ T ’ 모양의 도형을 S_0이라 하자. 도형 S_0의 위쪽에 있는 선분의 양끝에 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분 2개로 만든 ‘ T ’ 모양의 도형을 붙여 도형 S_1을 만든다. 이와 같은 방법으로 도형 S_{n-1}의 가장 위쪽에 있는 각 선분의 양끝에 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$인 선분 2개로 만든 ‘ T ’ 모양의 도형을 붙여 도형 S_n을 만든다.
도형 S_n을 이루는 모든 선분의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오. [4점]



약간 난이도가 올라갔습니다.

단위가 되는 도형이 T 모양으로서 $S_0, S_1, S_2, \cdots$ 단계에서 새로이 추가되는 T들이

일정한 사이즈 $\frac{1}{3}$배씩 줄어들면서, 개수는 2배씩 늘어나고 있는 양상입니다. 즉,



그래서 도형 S_n 을 이루는 모든 선분의 길이의 합 l_n 을 단위가 되는 T의 길이의 합 위주로

$$l_0 = 2$$

$$l_1 = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2 = 2 + \frac{4}{3}$$

$$l_2 = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2^2 = 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

이런 식으로 나열할 수 있습니다.

이때 $l_0, l_1, l_2, \cdots$ 는 등비수열을 이루지 않습니다!

대신 매번 l_n 마다 추가되는 항들로 인해 수열 $\{l_n\}$ 은 등비수열의 합에 대한 수열이 됩니다.

어떤 식으로 요소들이 더해져서 등비수열을 이루는지 관찰 하는 안목을 길러야 합니다!

따라서 $n \to \infty$ 이면 l_n 은

$$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6$$

이라 할 수 있습니다.

이미 답은 나왔지만 문제를 조금 더 깊게 이해하기 위해 다시 살펴보도록 하겠습니다.

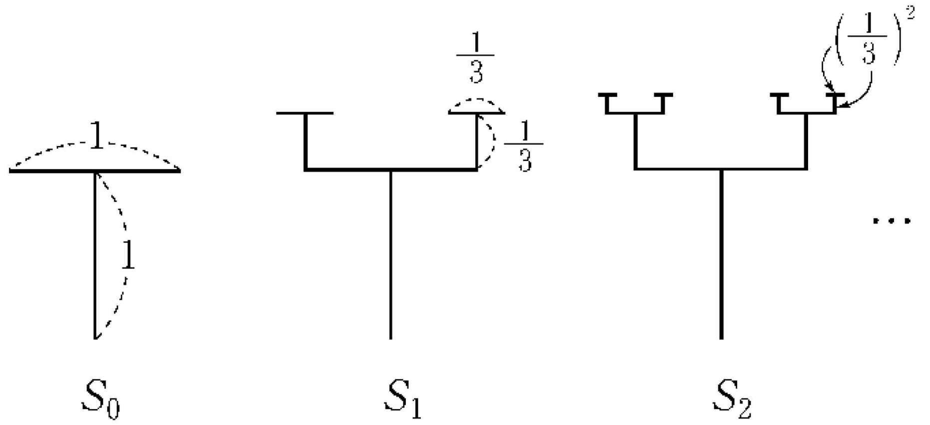
이 문제를 읽고서 무한등비수열 문제임을 파악하고,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

꼴일테니 $a = 2, r = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ 를 곧바로 적용하면 되겠죠?

각 S_n의 단계에서 추가되는 T의 개수에 대한 수열 $\{x_n\}$과 길이에 대한 수열 $\{y_n\}$을

따로따로 분석 해보면 $n=0$의 경우는 괄호로 표시한다고 할 때



$\{x_n\}$: $(1),\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$

$\{y_n\}$: $(2),\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2}{3^3},\ \cdots,\ \frac{2}{3^{n-1}},\ \cdots$

즉, $l_n = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n + \cdots$ 라는 등비수열의 합으로 나타납니다.

그리고 교과서에서는 여간해선 절대로 말 안 해주는 사실로서,

공차가 서로 다른 두 등차수열을 항별로 더한 수열은 여전히 등차수열이지만,

공차가 서로 다른 두 등차수열을 항별로 곱한 수열은 일반적으로 등차수열이 아니게 되며,

공비가 서로 다른 두 등비수열을 항별로 더한 수열은 일반적으로 등비수열이 아니게 되며,

공비가 서로 다른 두 등비수열을 항별로 곱한 수열은 여전히 등비수열

이라는 사실에 의하면,

위 문제에서와 같이 등비수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$의 공비가 다르더라도

항별로 곱하여 포개어버린 수열 $\{x_ny_n\}$은 여전히 등비수열이기에,

$l_n = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n + \cdots$ 은 등비수열의 합으로서 결국엔

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

꼴일테니 굳이 프랙탈을 이루는 각 요소들에 대한 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$을 따로따로 구하지 않아도

포개어진 상태로 $a = x_0y_0 = 2$와 $ar = \frac{4}{3}$ 정도만 구해내도,

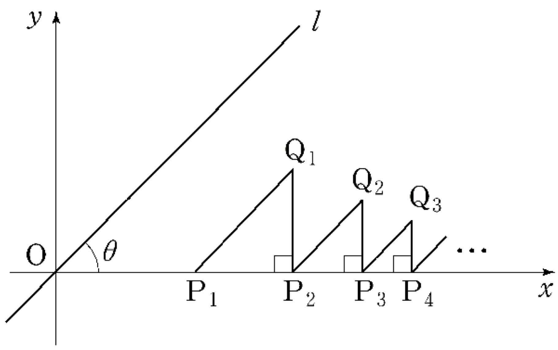
그러니까 초반에 더해지는 두 항만 구해도 바로 답을 낼 수 있습니다.

$$\therefore\ 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6$$

이라고 말이죠.

[2005년 09월 평가원 수리(가형) 17번]

17. 그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다.
점 $P_1(1, 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1} = \overline{P_1Q_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자.
점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2Q_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자.
점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고, 점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3Q_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n에 대하여 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\text{이다.}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

역시 초항과 공비를 구하면 되는 문제입니다.

초항으로는 $a_1 = \overline{P_1Q_1} = \overline{OP_1} = 1$이고,

공비는, 바로 구하기 보다는 $a_2 = \overline{P_2Q_2} = \overline{P_1P_2} = \cos\theta$로부터

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos\theta}{1} = \cos\theta$$

이라 알 수 있습니다.

왜냐하면 문제에서 장장 13줄에 걸쳐서 묘사하고 있는 닮음 관계로부터

결국엔 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$으로 나타내는 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

두 개의 항만 구해내면 수열 전체를 파악할 수 있게 되는 셈이고,

기왕이면 a_1, a_2를 구하는 편이 시간도 절약하고 계산이 간단해지기 때문입니다.

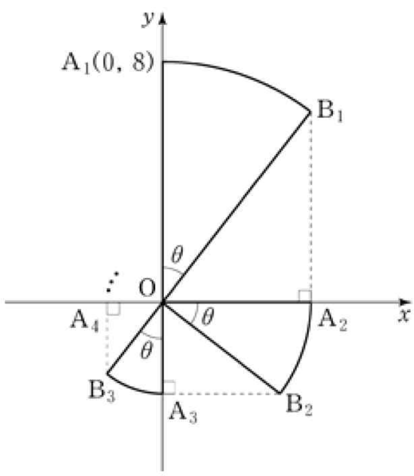
그래서 구하고자 하는 값은

$$1 + \cos\theta + \cos^2\theta + \cdots = \frac{1}{1-\cos\theta} = 4$$

에서 $\cos\theta = \frac{3}{4}$가 나옵니다.

[2005년 11월 대수능 수리(가형) 15번]

15. 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0,\ 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다.
점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다.
점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다.
이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



① $\frac{1}{7}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

방금 전에 풀었던 9월 평가원 문제가 나오고 몇 달 뒤 수능에 등장한 꼴입니다.

풀이가 대동소이한데, 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이 l_n에 대하여

why?

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$로서 무한등비급수가 수렴하고 있으니

수열 $\{l_n\}$은 공비가 1보다 작은 양수인 등비수열을 이룰테고,

따라서 무한급수가 더해지는 양상을 관찰해보면

$$8\theta + 8\theta \cdot \sin\theta + 8\theta \cdot \sin^2\theta + \cdots = \frac{8\theta}{1-\sin\theta} = 12\theta$$

가 되어 $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$임을 알 수 있습니다.

혹시나, 만약에나, 그런 일은 안 일어났겠지만

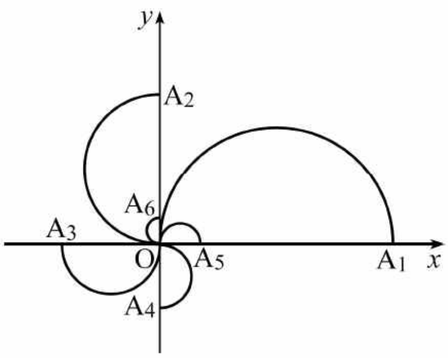
$$\overline{\mathrm{OA_2}} = 8\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 8\sin\theta$$

부터 막혀서 머릿속이 물음표로 가득한 분들은

이런 이상한 글 보다는 삼각함수 단원부터 먼저 보셔야 합니다. ㅠㅠ

[2006년 03월 교육청 수리(가형) 29번]

29. 그림과 같이 x축 위의 점 $A_1(6\pi-12,\ 0)$에 대하여 $\overline{OA_1}$을 지름으로 하는 반원을 제 1 사분면에 그리고, $\overline{OA_1} = \overset{\frown}{OA_2}$인 점 A_2를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_2}$를 지름으로 하는 반원을 제 2 사분면에 그린다. 또, $\overline{OA_2} = \overset{\frown}{OA_3}$인 점 A_3를 x축 위에 잡아 $\overline{OA_3}$를 지름으로 하는 반원을 제 3 사분면에 그리고, $\overline{OA_3} = \overset{\frown}{OA_4}$인 점 A_4를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_4}$를 지름으로 하는 반원을 제 4 사분면에 그린다. 같은 방법으로 제 1 사분면, 제 2 사분면, … 에 반원을 계속하여 그려나갈 때, 반원들의 호의 길이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\frown}{OA_n}$의 값은?(단, $\overset{\frown}{OA_n}$은 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 호이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$이다.) [4 점]



① 9π ② $8\pi+1$ ③ π^2+10
④ $2\pi^2+3$ ⑤ $3\pi^2$

딱 봐도 호의 길이 $\overset{\frown}{OA_n}$이 등비수열을 이루니까 첫 두 항만 구하면 끝날 것 같네요!

그래도 지금은 연습이니까,

마치 국어 문제 푸는데 아는 지문이 나와서 독해 속도가 더 빨라졌을 때처럼

한번 읽어 보도록 하겠습니다. ~~여러분은 지금 수학 공부 중입니다.~~

그러면 특정 부분에서 힙합에서의 라임 같은 운율을 느낄 수 있습니다.

29. 그림과 같이 x축 위의 점 $A_1(6\pi-12,\ 0)$에 대하여 $\overline{OA_1}$을 지름으로 하는 반원을 제1사분면에 그리고, $\overline{OA_1}=\overset{\frown}{OA_2}$인 점 A_2를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_2}$를 지름으로 하는 반원을 제2사분면에 그린다. 또, $\overline{OA_2}=\overset{\frown}{OA_3}$인 점 A_3를 x축 위에 잡아 $\overline{OA_3}$를 지름으로 하는 반원을 제3사분면에 그리고, $\overline{OA_3}=\overset{\frown}{OA_4}$인 점 A_4를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_4}$를 지름으로 하는 반원을 제4사분면에 그린다. 같은 방법으로 제1사분면, 제2사분면, … 에 반원을 계속하여 그려나갈 때, 반원들의 호의 길이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}\overset{\frown}{OA_n}$의 값은?(단, $\overset{\frown}{OA_n}$은 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 호이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$이다.) [4점]

출제자 입장에서도 타이핑을 할 때 표현을 맞춰주려고 했겠죠?

이러한 발화 형태를 고수하는 한 어떠한 '규칙'이 안 생길래야 안 생길 수가 없습니다.

그리고 지금 그 규칙이란 것은 일정한 비율로 줄어들고 있음을 통해

공비를 간접적으로 말하고 있는 셈이구요.

따라서, 지금도 첫 두 항만 구하면 끝나는 문제입니다.

편의상 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 반지름을 r_n이라 한다면

$2r_1=6\pi-12$에서 $r_1=3\pi-6=3(\pi-2)$이고,

$6\pi-12=r_2\pi$에서 $r_2=6-\dfrac{12}{\pi}=\dfrac{6}{\pi}(\pi-2)$이므로

수열 $\{\overset{\frown}{OA_n}\}$은 어차피 $\overset{\frown}{OA_n}=r_n\pi$에서 $\{r_n\}$과 공비를 공유하므로,

공비가 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{3.14\cdots}<1$인 등비수열을 이룹니다. 고로, 주어진 무한등비급수는

$$\frac{r_1\pi}{1-\frac{r_2}{r_1}} = \frac{3(\pi-2)\pi}{1-\frac{2}{\pi}} = \frac{3(\pi-2)\pi^2}{\pi-2} = 3\pi^2$$

가 답이 됩니다.

여기서 두 가지 짚고 넘어가야 할 내용이 있는데,

하나는 일부러 $3(\pi-2), \frac{6}{\pi}(\pi-2)$처럼 이미 다 구해서 알고 있는 수치를

굳이 r_1, r_2 등의 변수로 고려하여 계산하였다는 점입니다.

급한 마음에 $\frac{r_1\pi}{1-\frac{r_2}{r_1}}$ 대신 $3(\pi-2), \frac{6}{\pi}(\pi-2)$ 등을 넣었다면

계산하기에도 귀찮고, 자칫 계산 실수 해 버릴 수도 있습니다.

이런 문제의 경우 특히나, 예쁘지 않은 수치들이 빈번하게 등장하는데

지저분한 수치는 가급적 문자 형태로 두고서 최대한 계산을 이어가되

마지막에 마지못해 어쩔 수 없이 본디 수치를 투입해서 답을 얻어내면 됩니다.

이건 개인마다의 스타일 차이인데, 자신의 방법이 더 좋다 여겨지면 그대로 하시면 됩니다.

다음으로, 처음에 제시한 점 $\mathrm{A}_1(6\pi-12, 0)$의 비밀입니다.

$\pi = 3.1415\cdots$ 이니 $6\pi-12$는 어림잡아 $6.\cdots$ 쯤 되는 무리수인데,

왜 하필 초항이 지저분해지도록 $6\pi-12$를 $\overline{\mathrm{OA}_1}$으로 잡았을까 생각해봅시다.

만약 $\mathrm{A}_1(6,0)$이라고 깔끔한 수치로 주었다고 하면, 어느정도 계산이 쉬워질지 모르나

그에 따른 보기들은 일정한 닮음비 $\frac{6}{6\pi-12} = \frac{1}{\pi-2}$를 곱해버린 꼴로서

① $\dfrac{9\pi}{\pi-2}$ ② $\dfrac{8\pi+1}{\pi-2}$ ③ $\dfrac{\pi^2+10}{\pi-2}$

④ $\dfrac{2\pi^2+3}{\pi-2}$ ⑤ $\dfrac{3\pi^2}{\pi-2}$

로 답들이 지저분하게 바뀌게 됩니다. 물론 보기가 꼭 깔끔해야 한다는 법도 없습니다.

그래서 일부러 답을 딱 맞아떨어지게 하려고 $A_1(6\pi-12, 0)$이라 잡은 것입니다.

즉, 답이 맞아 떨어지게 나오도록 하기 위해 출제자가 의도적으로 조작한 수치로서

역으로 수험생의 입장에서는 이러한 사실이 하나의 안전벨트로 작용하게 됩니다.

초반에 $6\pi-12$라는 지저분한 수치가 등장하지만

계산을 하는 과정 중 $6\pi-12$에 대해 어느 정도 상쇄가 일어나서 깔끔하게 답이 나오면

아마도 잘 구한 것이라 보장할 수 있을 것이고,

아무리 계산해도 $6\pi-12$를, 특히 $\pi-2$만큼을 상쇄시키지 못하고 답도 이상하게 나온다면

잘못 푼 것이라 생각할 수 있다는 것이죠.

예를 들어서 다음 문제에서처럼

[2007년 08월 경찰대 수리 19번]

19. 넓이가 363인 정삼각형ABC에서 선분BC의 중점을 P_0라 하고, 선분P_0A를 121등분한 점과 끝점을 P_0로부터 차례로

$$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{120}, P_{121}=A$$

라 하자. 점P_k $(k=1,2,3,\cdots,120)$를 지나고 직선P_0A에 수직인 직선이 선분AB와 만나는 점을 B_k라 하고, 선분AC와 만나는 점을 C_k라 하자. 삼각형$P_{k-1}B_kC_k$ $(k=1,2,3,\cdots,120)$의 넓이를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{120} a_k$의 값은?

① 177 ② 178 ③ 179 ④ 180 ⑤ 181

363과 121, 그리고 120이란 수치 간의 비밀을 풀어내어야 답이 깔끔하게 나옵니다.

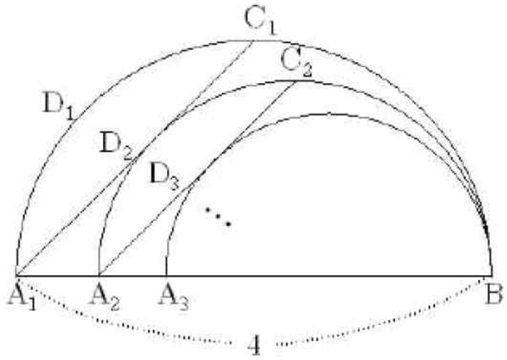
[2006년 04월 교육청 수리(가형) 11번]

11. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다.

호 A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자.

호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $2(1+\sqrt{2})\pi$
② $2(2+\sqrt{2})\pi$
③ $2(3+\sqrt{2})\pi$
④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$
⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

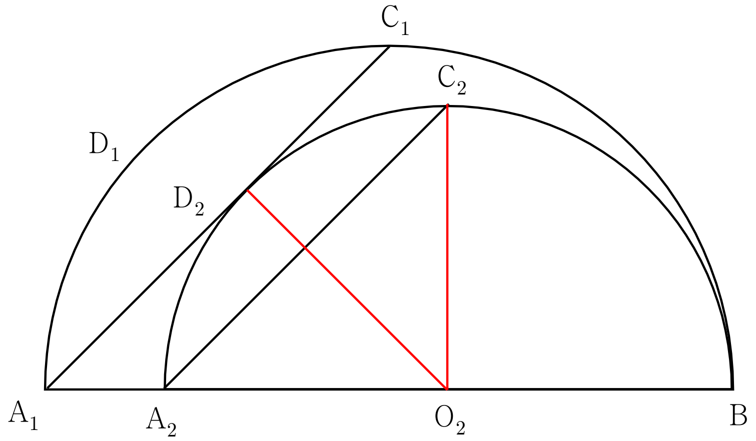
이 문제는 보조선이 핵심입니다.

추후에 다룰 대다수의 문제들이 보조선 몇 가닥을 그어보면 해결되는 문제들인데,

의외로 보조선을 찾기 힘들어하는 학생들이 많습니다.

그리고 평소에는 잘 찾더라도 시험 날의 컨디션에 따라 보조선이 안 보이기도 하구요.

이 문제에서의 핵심 보조선은 다음과 같습니다.



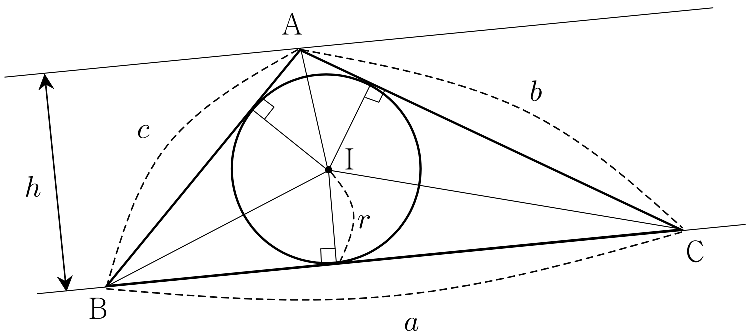
편의상 반원 $\mathrm{D_n}$의 반지름을 r_n라 하고,

반원 $\mathrm{D_2}$의 지름의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하겠습니다.

그리고 불필요한 곡선인 반원 $\mathrm{D_3}$ 이후부터는 걷어내고 바라보면

$\overline{\mathrm{A_1B}} = \overline{\mathrm{A_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2B}} = \sqrt{2}r_2 + r_2 = 4$가 되어 $r_2 = \dfrac{4}{\sqrt{2}+1} = 4(\sqrt{2}-1)$이 됩니다.

마치 삼각형 ABC에서 내심이 I이고, 내접원의 반지름이 r이라 할 때



삼각형 ABC의 넓이 S를 $S = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{a+b+c}{2} \times r$이라는 두 가지 관점에서의 식을 통해

$$r = \frac{ah}{a+b+c}$$

를 구해내는 것과 유사한 방식으로, 보조선을 이용해서 초기 항들에 관해 식을 세우는 거죠.

그리고 $r_1 = 2$가 자명하니까 l_n의 공비는 $\frac{r_2}{r_1} = 2(\sqrt{2}-1)$이 됩니다.

그러면 구하고자 하는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$은 $l = r\theta$를 상기하며!

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \pi\{2 + 4(\sqrt{2}-1) + \cdots\} = \frac{2}{1-2(\sqrt{2}-1)}\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3-2\sqrt{2}} = 2(3+2\sqrt{2})\pi$$

가 됩니다.

그리고 하나 더!

문제에서 물어보는 것은 반원 D_n의 호의 길이 l_n에 관한 무한등비급수의 합이니

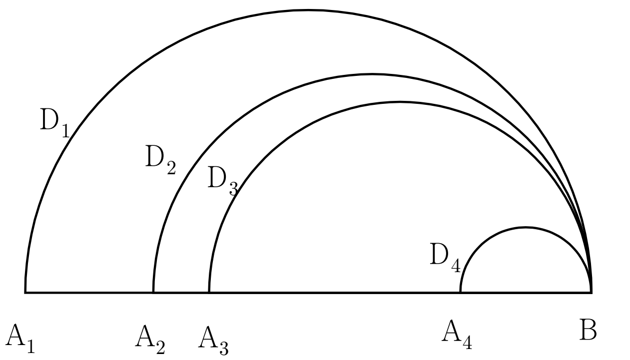
why? why?

반원만 그려도 될텐데(?!) 왜 하필 할선 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}$을 그렸는지에 대해서 생각해봅시다.

…

모든 반원은 합동이라고는 할 수 없어도 닮음이라고는 말 할 수 있습니다.

그렇다고 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}$ 없이 임의로 반원을, 점 B를 공유하도록 그리면 어떻게 될까요?



약간 과장이 들어가 있긴 하지만 보다시피 닮음비를 일정하게 유지하기가 힘들 것입니다.

따라서 할선인 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}$는 반원이 줄어드는 비율을 일정하게 잡아주고자,

실제 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$에 더해지는 꼴은 아니나

$$\mathrm{D}_1 \to \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1} \to \mathrm{D}_2 \to \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2} \to \mathrm{D}_3 \to \overline{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_3} \to \cdots$$

와 같이, 반원에서 유일하게 존재하는 호의 이등분과 관련된 할선과

다시 할선과 반원에 내접하는 유일한 그 다음 반원의 관계의

줄어드는 비율이 유지가 됩니다.

또, 할선은 반원의 닮음비를 일정하게 유지하도록 거들어 주는 역할 뿐만 아니라

반원의 닮음비와 할선들의 닮음비가 일치하기 때문에,

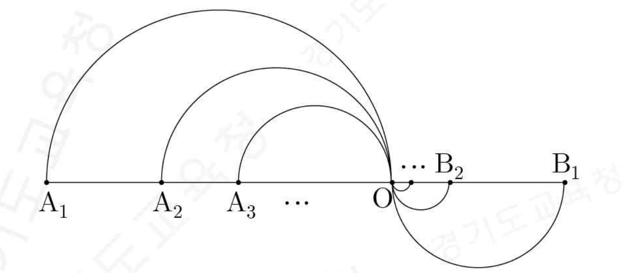
만약 반원의 수치로 공비를 구하기 귀찮다면 할선의 길이비로서 공비를 구할 수도 있습니다.

자세한 적용은 다음으로 미루고 일단 넘어가겠습니다.

[2006년 05월 교육청 수리(가형) 17번]

17. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$이고 점 O는 선분 A_1B_1을 $2:1$로 내분하는 점이다. 점 A_2는 선분 OA_1을 $2:1$로 내분하는 점, 점 A_3은 선분 OA_2를 $2:1$로 내분하는 점, ……, 점 A_{n+1}은 선분 OA_n을 $2:1$로 내분하는 점이다. 점 B_2는 선분 OB_1을 $1:2$로 내분하는 점, 점 B_3은 선분 OB_2를 $1:2$로 내분하는 점, ……, 점 B_{n+1}은 선분 OB_n을 $1:2$로 내분하는 점이다.

선분 OA_n을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 s_n, 선분 OB_n을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 t_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-t_n)$의 합은? [4점]



① $\frac{1}{4}\pi$

② $\frac{1}{3}\pi$

③ $\frac{1}{2}\pi$

④ $\frac{2}{3}\pi$

⑤ $\frac{3}{4}\pi$

아까와 유사한 문제인 것 같으나 문항의 복잡성도 높고, 낚시 요소도 포함하고 있습니다.

왼쪽 윗부분은 반원들이 $\frac{2}{3}$의 공비를 유지하며 줄어들고 있고,

오른쪽 아랫부분은 반원들이 $\frac{1}{3}$의 공비를 유지하며 줄어들고 있습니다.

당연히 등비수열들의 무한 합이므로 첫 두 항씩 정도만 구해도 충분합니다.

$$\{s_n\} \;:\; \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{9}\pi,\ \cdots$$

$$\{t_n\} \;:\; \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{18}\pi,\ \cdots$$

에서 수열 $\{s_n\}, \{t_n\}$ 각각의 무한 합이 수렴함이 자명하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n - \sum_{n=1}^{\infty} t_n$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi}{1-\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{6}\pi}{1-\frac{1}{3}} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi$$

가 답이 됩니다.

여기서 주의해야 할 사항으로, 앞서 언급하였듯

수열 $\{s_n\}, \{t_n\}$ 각각만 놓고 보자면 공비가 다른 등비수열을 이루지만

이것들을 포개어 구성한 수열 $\{s_n - t_n\}$은 더 이상 등비수열이 아니게 됩니다.

$$\{s_n\} \;:\; \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{27}\pi,\ \frac{8}{81}\pi,\ \cdots$$

$$\{t_n\} \;:\; \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{18}\pi,\ \frac{1}{54}\pi,\ \frac{1}{162}\pi,\ \cdots$$

로부터 약분을 최대한 자제하고, 규칙을 알아보기 쉽도록 나열해보면

$$\{s_n - t_n\} \;:\; \frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{18}\pi,\ \frac{7}{54}\pi,\ \frac{15}{162}\pi,\ \cdots$$

가 되는데,

'이건 무조건 무한등비급수 문제니까 첫 두 항인 $s_1 - t_1$과 $s_2 - t_2$만 찾아도 충분하겠어!'

하고는

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n) \cancel{=} \frac{s_1 - t_1}{1 - \dfrac{s_2 - t_2}{s_1 - t_1}} = \cdots$$

를 계산하고서 보기에서 찾으면 안 됩니다.

앞에서도 언급했듯이 두 등비수열을 서로 더한 수열은 일반적으로 등비수열이 되지 못하기에

$$\{s_n - t_n\} \ : \ \frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{18}\pi,\ \frac{7}{54}\pi,\ \frac{15}{162}\pi,\ \ \cdots,\ \frac{2^n - 1}{2\cdot 3^n}\pi,\ \ \cdots$$

와 같이 두 수열을 포개어서 구해도, 이를 계산하려면 다시 쪼개어야 합니다.

하지만 첫 두 항 정도만 구해서 바로 $\dfrac{a}{1-r}$ 공식에 넣어도 되는 문제인지,

지금처럼 그렇게 바로 해선 안 되는 문제인지는

문제를 읽어보면 금방(?!) 알 수 있으니 걱정하지 않아도 됩니다.

[2006년 06월 평가원 수리(가형) 16번]

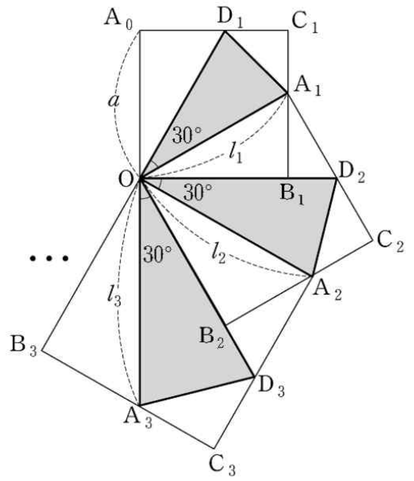
16. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다.

삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.

선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2, D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자.

선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \sqrt{3}$일 때, a의 값은? [4점]



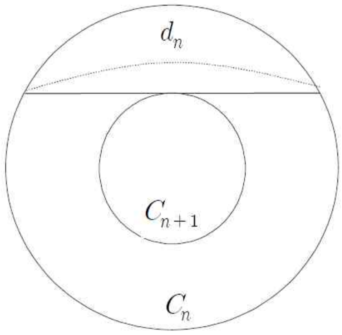
① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

수열 $\{l_n\}$이 증가하는 등비수열이므로 그 역수의 합을 물어보고 있습니다.

첫 두 항 정도를 구해서 역수를 취해 구해보면 $a = 2 + \sqrt{3}$이 나옵니다.

[2006년 08월 경찰대 수리 10번]

10. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2+y^2=(\frac{1}{4})^{n-1}$ 을 C_n 이라 하자. 원 C_{n+1} 의 한 접선에서 원 C_n 의 현에 해당되는 선분의 길이를 d_n 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 의 값은?

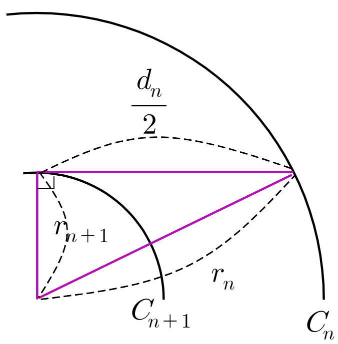


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{6}$

동심원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 들의 반지름 $r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이 점점 줄어들고 있고,

그러한 원들 사이에 접선이 되는 현을 그어가는 과정을 반복하고 있습니다.

이때 현들이 서로 평행해야 한다는 조건은 없습니다.



그러면 $r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $r_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ 이고, $\frac{d_n}{2}$ 과

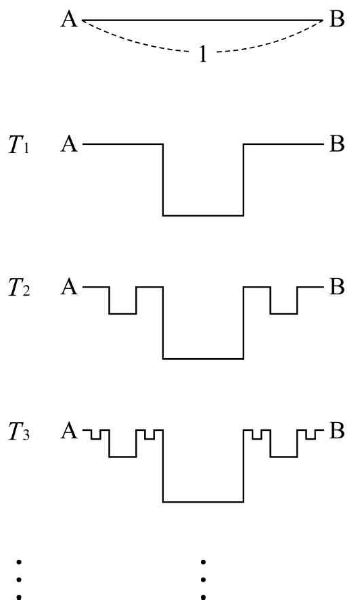
직각삼각형의 세 변의 길이에 대해 피타고라스 정리를 적용하면

$$\left(\frac{d_n}{2}\right)^2=(r_n)^2-(r_{n+1})^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

으로 $d_n=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 가 되어 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$ 이 나옵니다.

[2007년 03월 교육청 수리(가형) 29번]

29. 길이가 1인 선분 AB가 있다.



그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.

T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.

T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자.

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

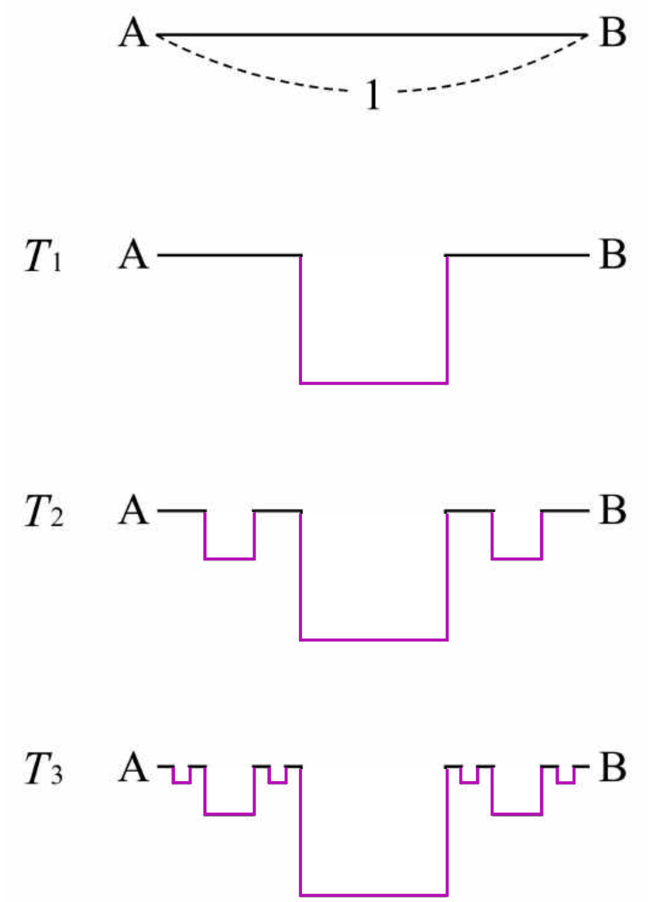
처음 이 문제를 보고 풀어 내기가 상당히 까다롭습니다.3)

T_n 단계에서의 모든 선분의 길이의 총합 a_n은

등비수열도 아니고, 등비수열의 합도 아니기 때문입니다!

3) 이전까지의 프랙탈 문제들에선 더하기만 했다면, 이 문제는 아래 칸토어 집합처럼 일부만을 취해가야 합니다.

마치 숨은 그림 찾기 할 때처럼 두 눈 크게 뜨고 봅시다.



문제에서 시키는 대로 과정을 반복해가면 $\sqcup$ 로 이루어진 프랙탈이 형성되겠죠?

이때 T_n 단계에서의 모든 선분의 길이 총합 a_n 을 구하자니

보라색 부분 이외의 연결부분 — 에 관한 식을 고려해야 하므로 쓸데없이 복잡해집니다.

따라서, 어차피 — 부분은 그 길이의 합이 0에 수렴하게 될테니

why?

a_n 대신 보라색 부분 $\sqcup$ 의 길이의 총합으로 생각해도 충분합니다.

그러면 T_n 단계에서 처음으로 더해지는 값들만 고려해보면

$$3 \cdot \frac{1}{3} + \left\{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} \cdot 2 + \left\{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} \cdot 2^2 + \left\{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4\right\} \cdot 2^3 + \cdots$$

가 되어 실질적인 무한등비급수에서의 초항은 1이고, 공비는 $\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$이니

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

이 답이 됩니다. 공비는 길이가 줄어드는 비율과 개수가 늘어나는 비율의 곱입니다!

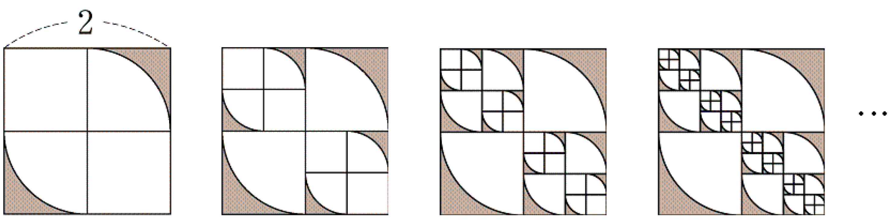
이런 식의, 그림에서 부분만을 취하는 아이디어는 그전 평가원 시험에 먼저 나왔었습니다.

[2006년 09월 평가원 수리(가형) 14번]

⋮

T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



T_1 T_2 T_3 T_4

⋮

사실 길이보다 넓이에 관한 문제들이 압도적으로 많은데,

나중에 한꺼번에 몰아서 설명하려고 잠시 건너 뛴 거니 기다려주세요~^^;

[2007년 04월 교육청 수리(가형) 17번]

17. 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.

원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,

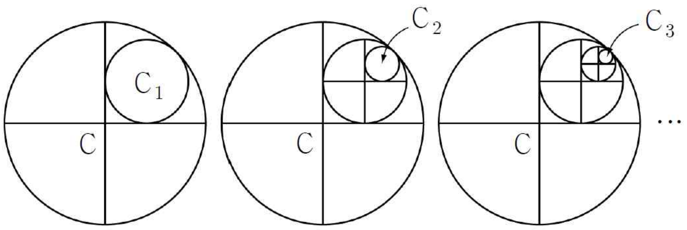
원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,

원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라

할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$

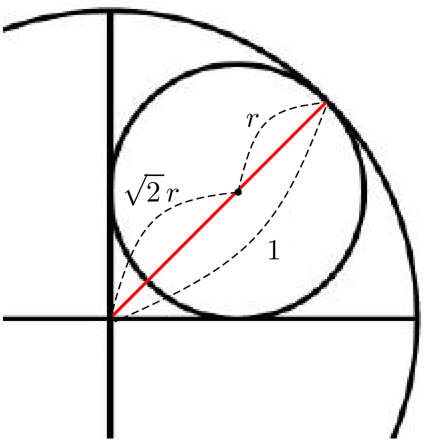
② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

⑤ 1

보조선을 잘 그어서 초항과 공비만 구하면 되는 문제입니다.



그러면 $r+\sqrt{2}r=1$에서 $r=\sqrt{2}-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

로 $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 답이 됩니다.

[2008년 06월 평가원 수리(가형) 14번]

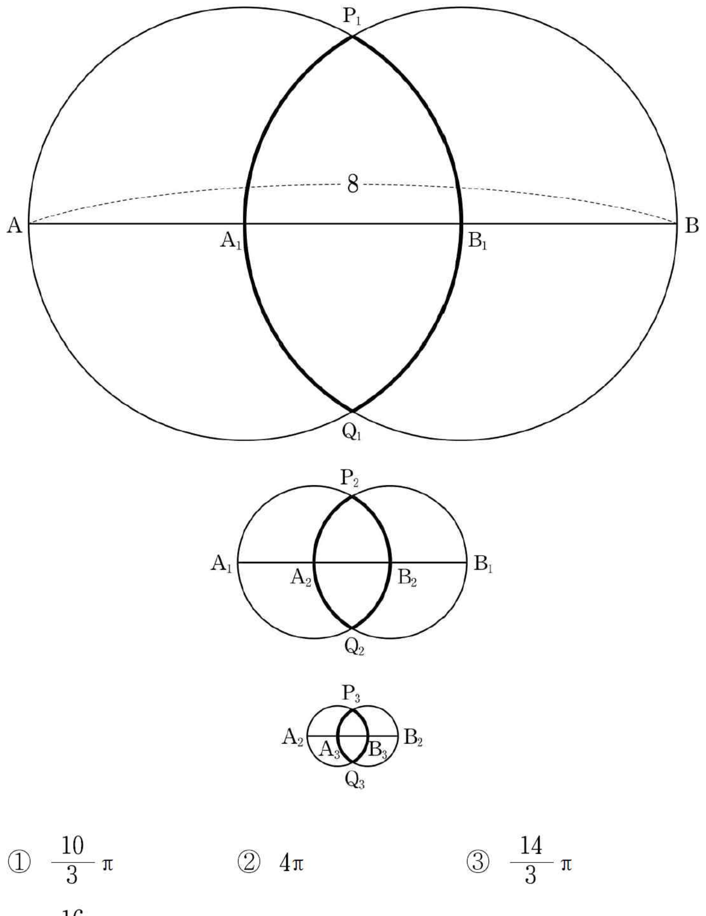
14. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.

선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1 이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2 라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3 이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



① $\frac{10}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{14}{3}\pi$

④ $\frac{16}{3}\pi$ ⑤ 6π

얼핏 보면 어려운 문제 같지만 간단한 3점 문항입니다.

독특한 점이 있다면 하나의 그림에 다 그려도 되지만

각 단계에서 추가되는 원들을

세로 줄을 맞춰서 친절하게 그려줬다는 것입니다.

어쨌든 대칭인 두 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n, \mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n$ 의 길이의 합 l_n 은

공비가 서로 같은 등비수열의 합으로서

$l_1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3}\pi, l_2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3}\pi$ 로부터 닮음비이자 공비가 $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{3}$ 으로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$$

가 답이 됩니다.

이 문제의 경우, 출제자가 과잉친절을 베풀어서 ~~제발 맞춰달라며~~ 그림을 떼어서 그려줬는데

사실 1등급 컷이 75점으로 다른 문제들은 아~주아주 어려운 시험이었습니다.

그림을 포갤 수 없어서 따로 그려야만 하는 문제들도 곧 있음 만나볼 수 있습니다.

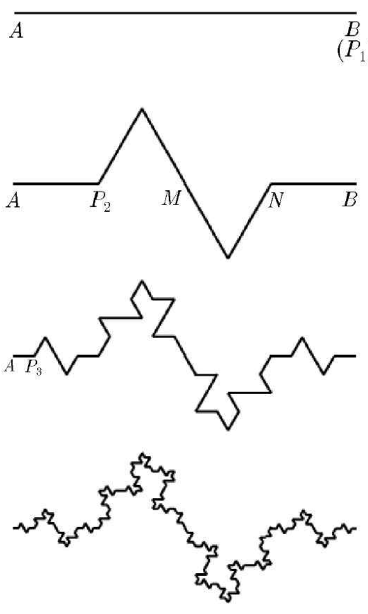
[2009년 06월 평가원 대비 포카칩 수리(가형) 12번]

12. 아래의 첫 번째 그림과 같이 길이가 1인 $\overline{AB}$가 있다. 선분 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점을 P_2, $3:1$로 내분하는 점을 N라 하자.

$\overline{P_2M}$을 아랫변으로 하는 정삼각형을 작도하고, $\overline{MN}$를 윗변으로 하는 정삼각형을 작도한 뒤, $\overline{P_2N}$를 지운 상태를 두 번째 그림이라 하자.

두 번째 그림의 6개의 선분을 위와 동일한 방법으로 모두 작도한 상태를 세 번째 그림이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그림의 선분의 길이의 총합을 a_n, 점 A를 지나는 선분의 끝점을 P_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $a_3 = \dfrac{9}{4}$

ㄴ. $\overline{AP_n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

ㄷ. a_n은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

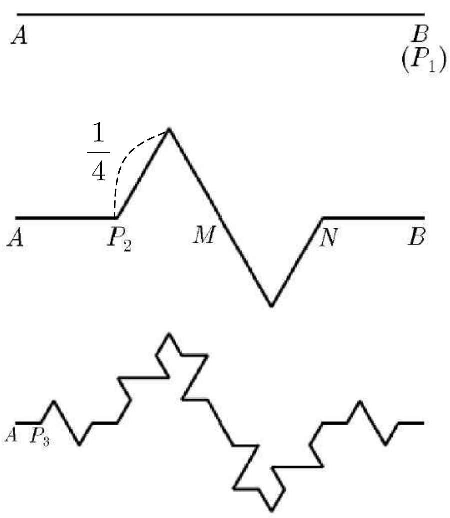
코흐 눈송이(Koch snowflake)[4]에서 아이디어를 가져와서 낸 문제입니다.

ㄱ, ㄴ 보기야 어렵지 않게 참임을 알 수 있는데

ㄷ이 참 발칙한 보기이죠.

4) http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake

n번째 단계에서 가장 짧은 길이의 단위 선분에 대하여



길이를 수열 $\{x_n\}$, 개수를 수열 $\{y_n\}$이라 하면

$$\{x_n\} \ : \ 1, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4^2}, \ \cdots$$

$$\{y_n\} \ : \ 1, \ 6, \ 6^2, \ \cdots$$

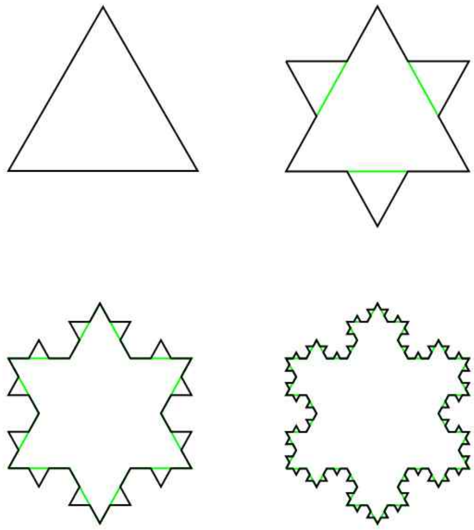
가 되어 $a_n = x_n y_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot 6^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$에서

수열 $\{x_n\}$에서 길이가 줄어드는 비율 $\frac{1}{4}$과

수열 $\{y_n\}$에서 개수가 늘어나는 비율 6을 곱한

실질적인 수열 $\{a_n\}$의 변화율은 $\frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2} > 1$로 늘어나게 됩니다.

따라서 ㄷ은 거짓이 됩니다. 배경지식으로서 코흐 눈송이를 잠깐 소개하자면



이런 식으로 반복하여 프랙탈을 얻을 수 있는데, 지금처럼 식을 세워 계산 해보면

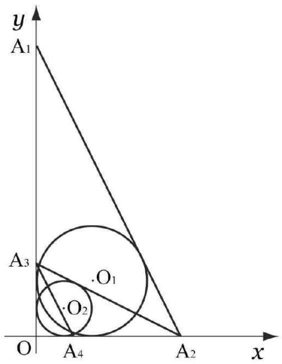
둘레 길이는 발산(?)하지만 내부의 넓이는 수렴(?!)하는 꼴이 됩니다.

[2009년 07월 교육청 수리(가형) 24번]

24. 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(0,\ 4)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_3\mathrm{A}_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



인접한 직각삼각형의 빗변의 기울기 곱이 일정함은 결국 등비수열을 내포함을 의미합니다.

이때 닮음비 $2:1$를 이용하면 수열 $\{r_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$임은 쉽게 알 수 있습니다.

다음으로 초항 r_1을 구하기 위해서는 삼각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$의 넓이에 관해

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = \frac{1}{2}\left(2+4+2\sqrt{5}\right)r_1$$

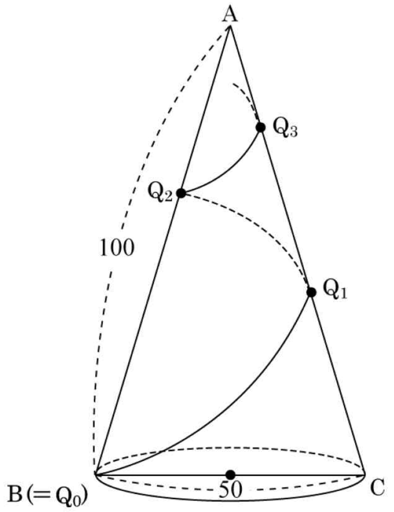
을 계산해서 r_1을 얻을 수 있고, 구하려는 무한급수의 값은

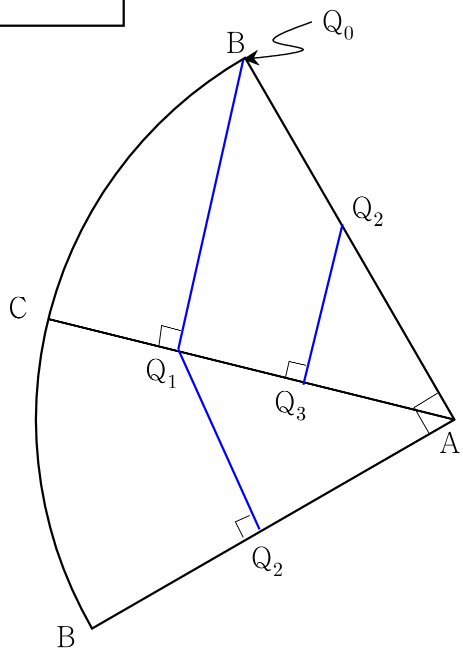
$$\frac{r}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{8}{6+2\sqrt{5}} = 2\left(3-\sqrt{5}\right) = 6-2\sqrt{5}$$

가 되어 $a+b=11$이 답이 됩니다.

[2010년 07월 교육청 수리(가형) 22번]

22. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{AB}=100$, $\overline{BC}=50$인 직원뿔이 있다. 모선 AC 위의 점 Q_1은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB 위의 점 Q_2는 점 Q_1에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n은 모선 AB 또는 AC 위의 점 Q_{n-1}에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n에 이르는 최단 거리를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, $B=Q_0$, a와 b는 유리수이다.) [4점]





전개도로 펼쳐 보겠습니다. 그러면

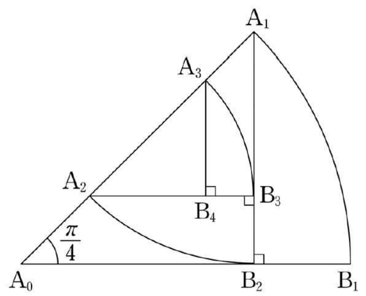
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{100}{\sqrt{2}} + \frac{100}{2} + \cdots = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{2}-1} = 100\left(\sqrt{2}+1\right)$$

로 $a+b=200$이 나옵니다.

[2010년 09월 평가원 수리(가형) 12번]

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $\mathrm{A_0A_1B_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{A_0B_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{A_0A_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{A_1B_2}} = \overline{\mathrm{A_1A_2}}$인 점 $\mathrm{A_2}$에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $\mathrm{A_1A_2B_2}$를 그린다.
점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_3}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1A_2}$ 위의 $\overline{\mathrm{A_2B_3}} = \overline{\mathrm{A_2A_3}}$인 점 $\mathrm{A_3}$에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $\mathrm{A_2A_3B_3}$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ 위의 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}} = \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$을 그린다.
부채꼴 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



① $(4-\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

부채꼴 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 반지름 r_n에 관해 초항과 공비를 구해서

매 부채꼴마다 $\frac{\pi}{4}$로 공통인 중심각을 고려해주면 됩니다.

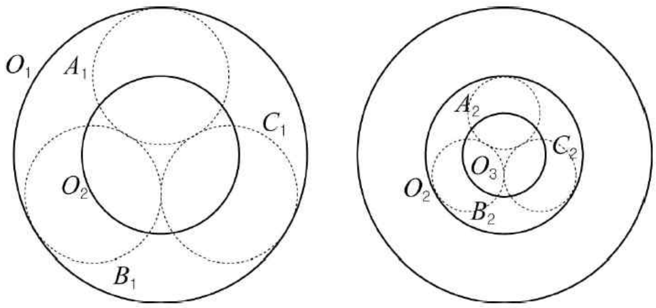
그러면 $r_1 = 4$이고 $r_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\pi = (2+\sqrt{2})\pi$$

[2011년 07월 교육청 수리(가형) 21번]

21. 반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

[4점]



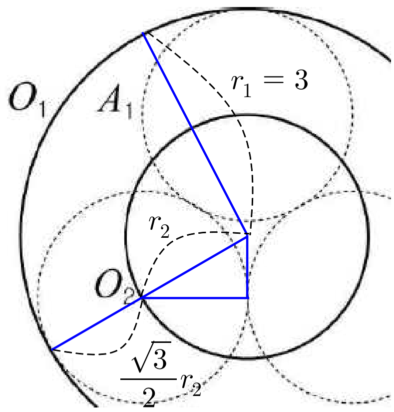
① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

원들이 참 많은데, A_n, B_n, C_n들은 원 O_n이 일정한 비율로 감소하도록

또, 작도의 편의를 위해 등장한 보조 도형이라 봐도 과언이 아닙니다.

지금도 역시 초항과 공비를 구하면 될 것 같은데, 공비를 구하기가 약간 까다롭습니다.

하지만 이마저도 보조선을 통해 해결하면 됩니다.



원 O_n의 반지름 r_n에 대하여 $r_1 = 3$이고,

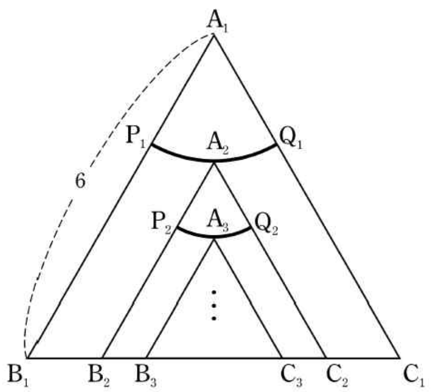
$$3 = r_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2 \rightarrow r_2 = \frac{3}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{2+\sqrt{3}}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{6\pi}{1-\frac{2}{2+\sqrt{3}}} = \frac{6(2+\sqrt{3})\pi}{(2+\sqrt{3})-2} = (6+4\sqrt{3})\pi$ 이 나옵니다.

[2011년 10월 교육청 수리(가형) 21번]

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 꼭짓점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 호 P_1Q_1을 이등분하는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다.

꼭짓점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 호 P_2Q_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하자. 점 A_3을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 P_nQ_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

호의 길이 l_n이 등비수열을 이루고 있으므로 초항과 공비만 구하면 됩니다.

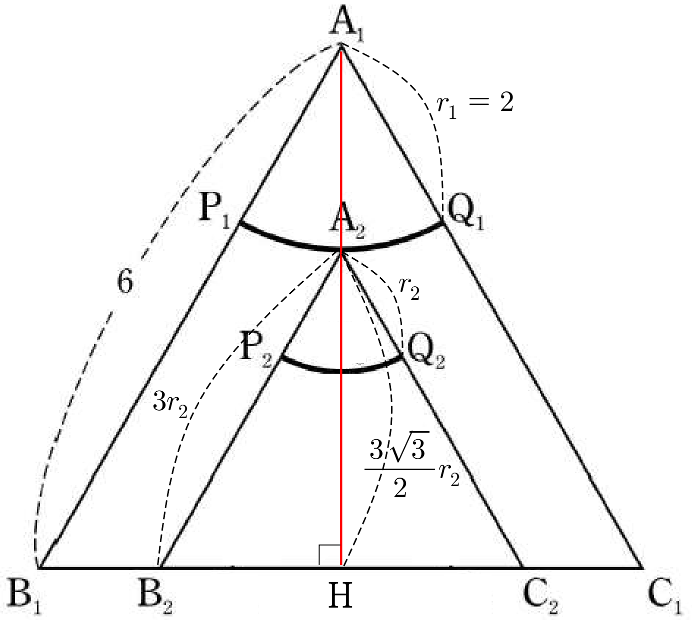
그리고 부채꼴의 반지름 길이 r_n에 대하여 $l_n = r_n \times \frac{\pi}{3}$이므로

r_n도 호의 길이 l_n과 공비를 공유하고 있으므로

r_1, r_2을 대신 구해서 l_1, l_2을 알 수 있겠죠?

그러면 $r_1 = \overline{\mathrm{A_1P_1}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{A_1B_1}} = 2$로서 초항은 금방 구했으나,

그 다음 항 r_2는 다음과 같은 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$에서 내린 수직 이등분선을 보조선으로 하여



$$\overline{\mathrm{A_1H}} = 3\sqrt{3} = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}r_2$$

로 등치해서 정리해보면 $r_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}-2\right)$임을 알 수 있습니다.

그러면 실질적인 수열 $\{l_n\}$의 공비는

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

이 되므로 $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \cdots = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \cdots)\theta$이니

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \left(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots\right)\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{1-\left(1-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}\cdot\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\pi$$

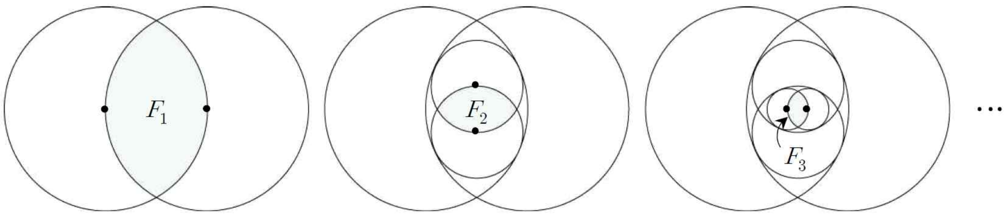
가 나옵니다. 상쇄 되어서 계산이 깔끔하게 정리 되는게 보이죠?

[2012년 08월 사관학교 수리(가형) 24번]

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.

F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.

F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자.

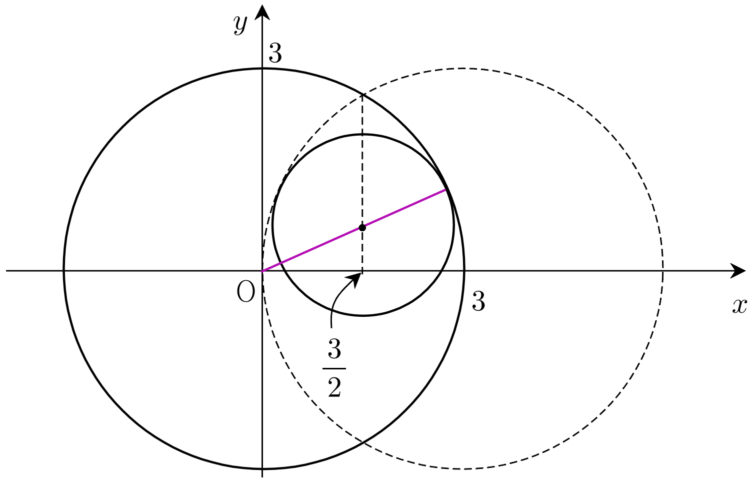
$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$ ③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

④ $2\pi(2+\sqrt{7})$ ⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

초항은 $l_1 = \left(3 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) \cdot 2 = 4\pi$로 금방 구할 수 있으니 공비만 구하면 됩니다.

그림도 언젠가 평가원에 나왔던 걸 약간 변형했을 뿐인데 구하기가 제법 까다로워졌네요.



시행착오를 거듭하며 한참을 생각해도 적당한 보조선이 잘 안 보이니

비장의 무기인 좌표를 도입하여 풀어보겠습니다.

두 번째로 큰 사이즈의 원의 방정식 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{r_2}{2}\right)^2=(r_2)^2$에 대하여

$$r_1=3=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{r_2}{2}\right)^2}+r_2$$

라 할 수 있고, 이를 쭉 계산해보면

$$(3-r_2)^2=\frac{9}{4}+\frac{{r_2}^2}{4} \rightarrow r_2=4-\sqrt{7} \qquad \because\ r_2<r_1=3$$

임을 알 수 있습니다.

그러므로 마저 계산해보면

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{4}{3}\pi r_1}{1-\frac{r_2}{r_1}}=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=\frac{12}{3-4+\sqrt{7}}\pi=2\pi\left(1+\sqrt{7}\right)$$

가 됩니다. 계산이 ★★★★☆ 정도로 복잡한 편에 속하는데,

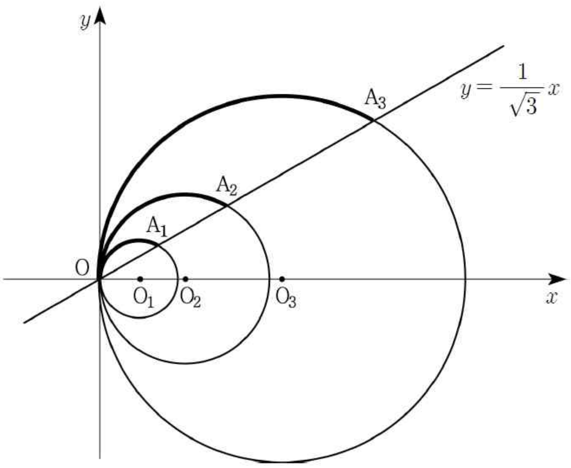
차분히 계산하다 보면 사실 별거 아니죠!

[2012년 07월 교육청 수리(가형) 21번]

21. 그림과 같이 중심이 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1이 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_1이라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.

중심이 $(l_1, 0)$이고 반지름의 길이가 l_1인 원 O_2를 그린다. 원 O_2가 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_2라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_2의 길이를 l_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{\pi-3}$　② $\frac{2}{\pi-3}$　③ $\frac{1}{2\pi-3}$
④ $\frac{2}{2\pi-3}$　⑤ $\frac{3}{2\pi-3}$

호를 이루는 부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$이고, 수열 $\{l_n\}$은 증가하고 있습니다.

$r_1=1, l_1=\frac{2}{3}\pi$에서 $r_2=l_1$이므로 $l_2=r_2\cdot\frac{2}{3}\pi=\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\frac{3}{2\pi}+\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}}=\frac{3}{2\pi-3}$$

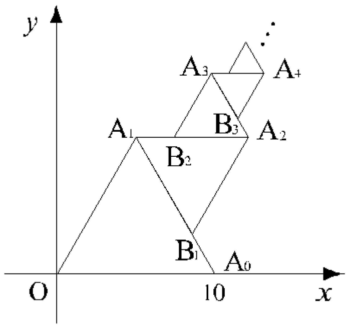
이것으로 길이에 관한 프랙탈들은 거의 다 끝났습니다.

그런데 본격적으로 넓이에 관한 프랙탈들을 다루기 전에

독특한 몇몇 문제들을 보고 넘어가도록 하겠습니다. 이건 진짜 몇 문제 안 됩니다.

[2004년 03월 교육청 수리(가형) 27번]

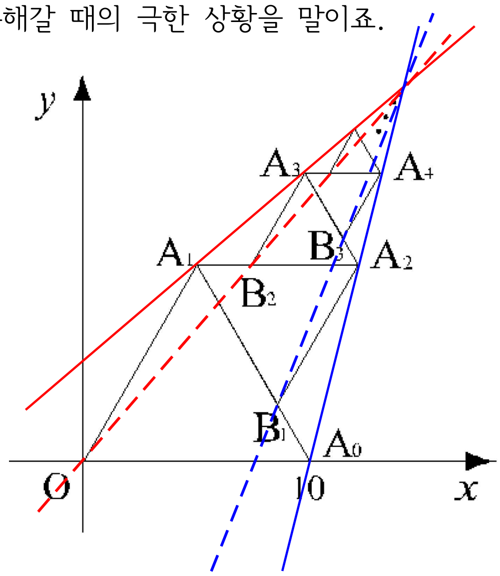
27. 오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 $A_0(10, 0)$에 대하여 제 1 사분면 위에 $\overline{OA_0}$를 한 변으로 하는 정삼각형 OA_0A_1을 만들고 $\overline{A_0A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 B_1이라 한다. 또 $\triangle OA_0A_1$밖에 $\overline{A_1B_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_1B_1A_2$를 만들고 $\overline{A_1A_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 B_2라 한다.
이와 같은 과정을 한없이 반복하면 점 A_n은 점 (a, b)에 한없이 가까워진다. 이때 a의 값을 구하시오. [4점]



위 문제에서는 닮음비가 $3:2$인 인접한 삼각형들이 교대로 생겨나고 있습니다.

이때 완성된 형태의 프랙탈을 생각 해봅시다.

즉, 시행을 무수히 반복해갈 때의 극한 상황을 말이죠.



그러면 정삼각형들 혹은 역삼각형들은 무한한 길이로 뻗어 나가질 못 하고

어느 지점에서 멈추게 됩니다.

위 그림에서처럼 정삼각형 혹은 역삼각형들의 같은 위치(위상)의 점들끼리 이은 직선들이

하나의 교점에서 만나는 데 바로 그 점에서 맺히게 되죠.

미술 시간에 배운 소실점도 극한 개념에 속한다고 볼 수 있겠네요!

어차피 지금 문제에선 좌표평면 위에 정삼각형들과 역삼각형들이 올려져 있으니

빨간 직선 혹은 파란 직선의 방정식을 두 개 세워서

연립한 교점의 위치가 바로 점 A_n의 극한값 (a, b)에 해당하게 됩니다.

그런데 지금은 a값만이 궁금하니까 굳이 이렇게 안 해도 됩니다. ~~귀찮으니까요.~~

그리고 이것은 어디까지나 직관에서 비롯된 짐작이자 푸는 사람의 희망사항이지

아직까진 수학적으로 엄밀하게 보장할 수 없기도 하구요!

대신에 등비수열의 관점에서 생각해 보도록 하겠습니다.

예컨대, 공비의 크기가 1보다 작은 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 있어서

$$\{a_n\} \ : \ a, \ ar, \ ar^2, \ ar^3, \ ar^4, \ \cdots$$

$$\{b_n\} \ : \ b, \ bs, \ bs^2, \ bs^3, \ bs^4, \ \cdots$$

에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴한다고 합시다. 그러면

$$(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots) + (b + bs + bs^2 + bs^3 + bs^4 + \cdots)$$

역시 수렴하면서, 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립하기에

$$(a+b)+(ar+bs)+\left(ar^2+bs^2\right)+\left(ar^3+bs^3\right)+\left(ar^4+bs^4\right)+\cdots$$

도 같은 값으로 수렴하겠죠?

마치 지퍼를 잠그면서 하나로 포개듯이, 수렴하는 무한등비급수의 각 항들을

사이사이에 끼워 넣어서 구성한 수열도 동일한 값으로 수렴하게 됩니다.

나아가, 수렴하는 무한등비급수를 세 종류, 네 종류, ⋯ 더 포개어도 상관없습니다.

보통은 지금처럼 두 종류의 무한등비급수를 포갠 형태로 나오지만요.

그래서 점 A_n의 x좌표 a_n을 나열해보면

a_n은 포개어진 등비급수 합으로 나타나므로 그 자체로는 등비수열이라 볼 수 없습니다.

$$a_1=10-\frac{1}{2}\cdot 10$$

$$a_2=10-\frac{1}{2}\cdot 10+10\cdot\frac{2}{3}$$

$$a_3=10-\frac{1}{2}\cdot 10+10\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=10-\frac{1}{2}\cdot 10+10\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\\&=10+\left\{10\cdot\frac{2}{3}+10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots\right\}\\&\qquad\qquad-\left\{\frac{1}{2}\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}\end{aligned}$$

$$= 10 + 10 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 10 + 12 - 9 = 13$$

따라서 $a = 13$이 됩니다.

이렇게 결과를 놓고 보면 점 A_n이 $\rightarrow$, $\nwarrow$, $\rightarrow$, $\nwarrow$, $\rightarrow$, $\nwarrow$, $\cdots$ 방향으로 찍히는 상황은

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$$

와 같은 평범한 무한등비급수 꼴이 아니라,

$$a + b + c + br + cs + br^2 + cs^2 + br^3 + cs^3 + \cdots$$

와 같은 모습을 이루고 있습니다.

그래서 이 문제는 꽤 난이도 있는 편이고,

실제 시험에서는 이렇게까진 잘 안 나오고

$$a + b + br + br^2 + br^3 + br^4 + \cdots$$

와 같이, 초항 정도만 등비수열의 경향성에서 벗어나게 한 문제들이 종종 등장합니다.

그러니 틀려놓고 낚였다고 말하기 싫다면

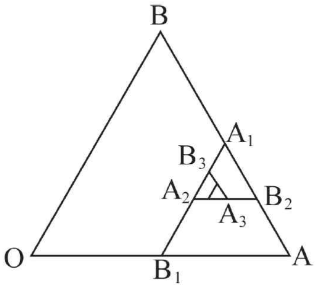
'무한등비급수 문제는 첫 두 항만 구하면 끝나지!'

라고 무작정 외우고 있어선 안 됩니다. N.A.V.E.R!

무한등비급수의 항들이 어떤 식으로 구성되는가는 파악해야 하죠.

[2004년 08월 사관학교 수리(나형) 22번]

22. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 OAB에서 $\overline{AB}, \overline{OA}$ 의 중점을 각각 A_1, B_1 이라 한다. 또 $\overline{A_1B_1}, \overline{AA_1}$ 의 중점을 각각 A_2, B_2 라 하고, $\overline{A_2B_2}, \overline{A_1A_2}$ 의 중점을 각각 A_3, B_3 이라 한다. 이와 같이 $\overline{A_nB_n}, \overline{A_{n-1}A_n}$ 의 중점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1} 로 정하는 과정을 한없이 계속할 때, $\lim_{n\to\infty} \tan(\angle AOA_n)$ 의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{5}$

문제를 잘 읽고서 삼각형이 어떠한 방식으로 생겨나는지 파악해야 합니다.

아까 전 문제와 비슷한 듯 다른 문제입니다.

지금은 $n\to\infty$일 때 점 A_n의 x, y좌표 모두가 필요합니다.

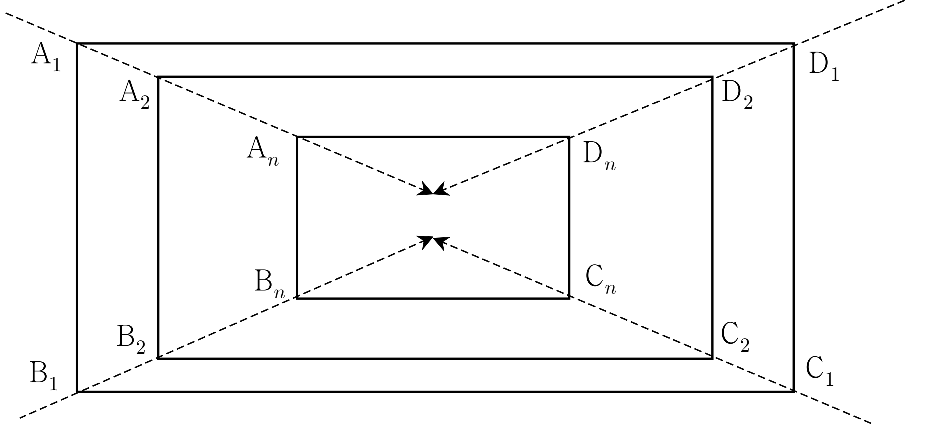
따라서, 수학적으로 엄밀하게 풀어내자면 x, y좌표 각각을

포개어진 무한등비급수의 합으로 해석해서 계산한 값으로 탄젠트 값을 구하면 되는데,

문제는 그렇게 했다간 시간이 너무 많이 걸린다는 것이 흠입니다.

고로, 이번에는 직관적으로 풀어 보겠습니다.

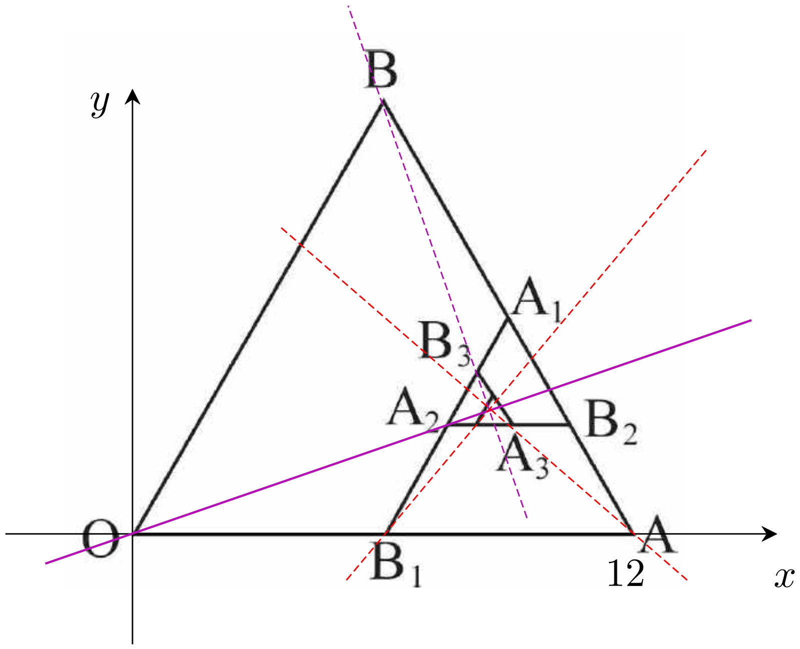
그러려면 '같은 위상'에 대한 인식이 선행되어야 합니다. 아래 그림은 소실점이 두 개임.



이렇게 닮음 도형들 간의 닮음이 대응 되는 점들끼리,

'위상이 같다'고 약속하겠습니다. 수학적으로 정의된 진짜 위상(topology)과는 다릅니다.

그래서 지금 약간 치우쳐진 삼각형들에도 적용해보자면



소실점에서 만나도록 같은 위상의 점들 간에 이어줄 수 있습니다.

마치 삼각형의 세 중선이 반드시 무게중심에서 만나듯,

지금도 직선들이 한 점에서 만나는가 여부에 상관없이

그러면 점 A_n은 삼각형 경로로 움직이다 직선 OA_2상의 어느 지점에 맺혀서,

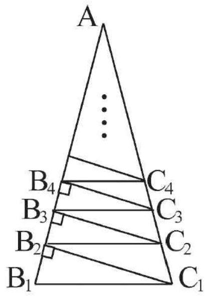
$$\lim_{n\to\infty}\tan(\angle \mathrm{AOA}_n)=\tan(\angle \mathrm{AOA}_2)$$

가 되어 점 A_2의 좌표 (p,q)에 대하여 $\tan(\angle \mathrm{AOA}_2)=\dfrac{q}{p}$가 됩니다.

마저 좌표를 찾아보면 $p=\dfrac{15}{2}, q=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 구하고자 하는 값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$이 되겠네요.

[2004년 08월 사관학교 수리(가형) 14번]

14. $\overline{\mathrm{AB_1}} = \overline{\mathrm{AC_1}} = 10$인 이등변삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{C_1}$에서 변 $\mathrm{AB_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_2}$, 점 $\mathrm{B_2}$에서 변 $\mathrm{B_1C_1}$과 평행한 선분을 그어 변 $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 한다. 이와 같은 방법으로 변 $\mathrm{AB_1}$과 변 $\mathrm{AC_1}$위에 점을 잡아서 각 점을 $\mathrm{B_3, C_3, B_4, C_4}, \cdots$ 라 하자. $\overline{\mathrm{B_1B_2}}$의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$의 길이의 $\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}$의 값은 ? [3점]



① 40　　② 35　　③ 30　　④ 25　　⑤ 20

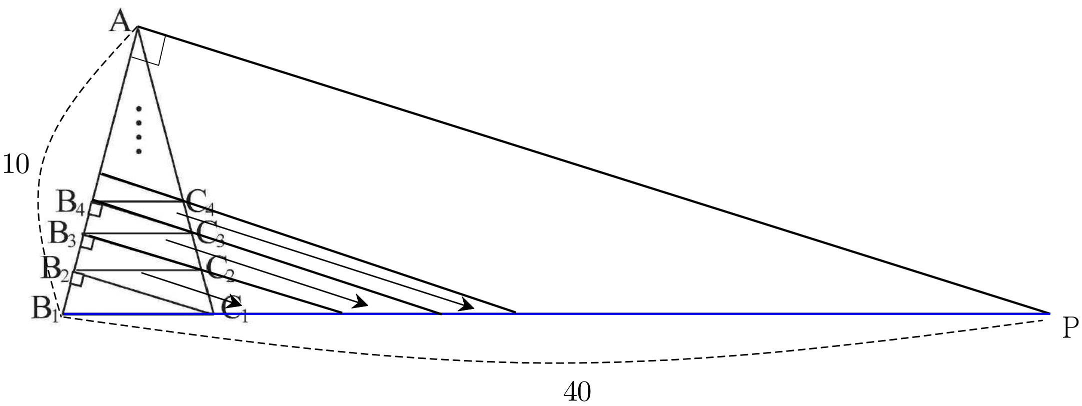
$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$을 빗변으로 갖는 직각삼각형들이 $\frac{1}{4}$이라는 삼각비를 공유하기에

닮음을 유지하며 반복되고 있고, 따라서 무한등비급수 문제로 볼 수 있습니다.

하지만 그 풀이는 프로 수험생이 된 여러분들께는 어렵지 않을테니,

약간 독특한 방법을 통해 풀어 보겠습니다.

핵심 아이디어는 평행이동입니다.

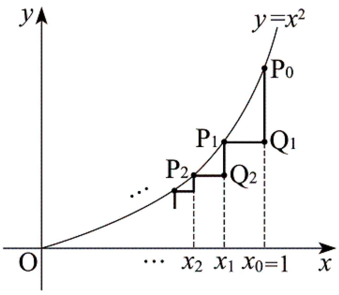


위와 같이 변 $\mathrm{B_1C_1}$을 연장한 직선과, 점 A를 지나면서 $\overline{\mathrm{B_2C_1}}$에 평행한 직선과의 교점을

점 P라 하면 $\frac{1}{4} = \frac{\overline{\mathrm{B_1B_2}}}{\overline{\mathrm{B_1C_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{B_1A}}}{\overline{\mathrm{B_1P}}} = \frac{10}{\overline{\mathrm{B_1P}}}$이 되어 $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k} = \overline{\mathrm{B_1P}} = 40$이 됩니다.

[2005년 03월 교육청 수리(가형) 22번]

22. $x_0=1,\ x_1=\dfrac{3}{4},\ x_2=\dfrac{5}{8},\ \cdots,$ $x_n=\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$ 에 대하여 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}_0(1,1)$과 $\mathrm{P}_n(x_n, x_n{}^2)$, $\mathrm{Q}_n(x_{n-1}, x_n{}^2)\,(n=1,2,3,\cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 무한급수



$$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_3}+\cdots$$

의 합을 S라 할 때 $100S$의 값을 구하시오. [4점]

호락호락하지 않은 출제자들은 문제를 조금씩 조금씩 바꾸어 내거나

혹은 완전 새로운 패러다임의 문제를 제시합니다.

따라서 도형과 결합한 무한등비급수 문제에서도,

그것이 항상 무한등비급수가 아닐 수도 있으며

어느 타이밍에 어느 부분에서 낚시 요소를 가미했을지 모르니

문제를 읽고서 풀이 전략에 대해 확신을 얻어야 합니다.

이 문제에서도 스윽 읽고서 이전 문제처럼 단순히 평행이동만 하여서

$S=1+1=2$라 하기 쉬운데,

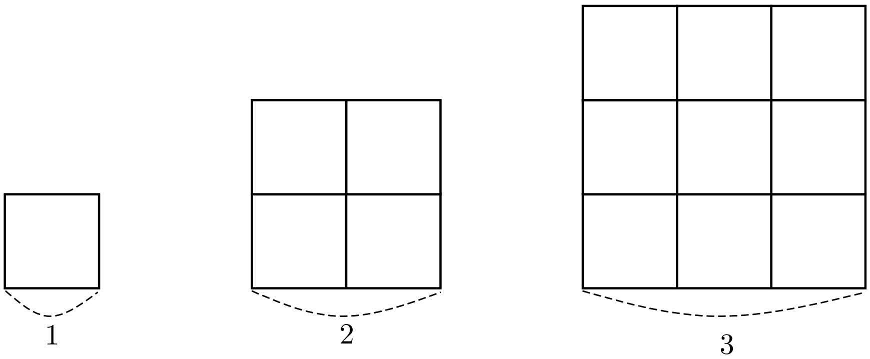
자세히 보면 $\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$로서 점 P_n의 극한값은 원점 $(0,0)$이 아니라

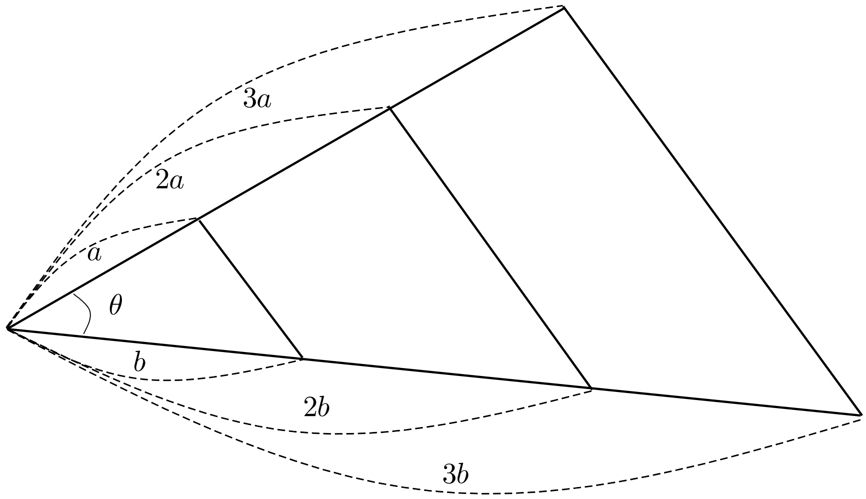
점 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$이 되어서 $S=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$가 되고,

따라서 $100S=125$가 답이 됩니다.

이제 본격적으로 넓이에 대한 무한등비급수 문제를 다루어 보겠습니다.

임의의의 닮은 도형들에 대해서 (닮음비)^2 = (넓이비)가 되는 이유는





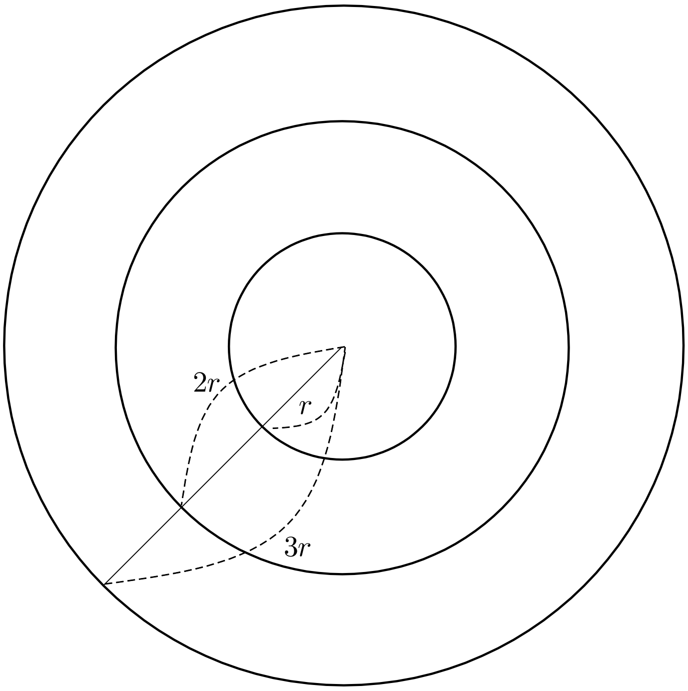
사각형과 삼각형들에 대해서는 자명하고,

선분으로 둘러싸인 임의의 다각형들도 적당하게 삼각형으로 분할할 수 있으니

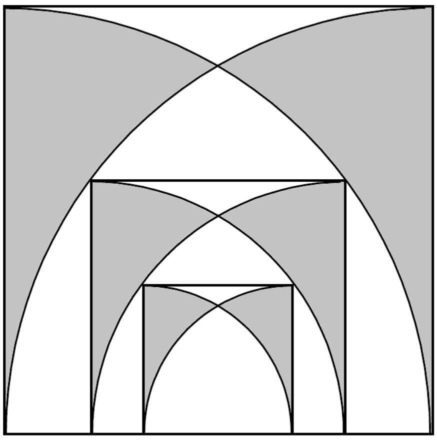
닮음 다각형들에서도 (닮음비)^2 = (넓이비)라 할 수 있습니다.

여기서 닮음비는 대응 되는 변들, 즉 위상이 같은 변들 간의 길이비이기도 합니다.

그리고 대개가 원의 일부인 호를 포함하는 곡선 모양의 닮음 도형들에 대해서는,



원 넓이가 반지름의 제곱에 비례하기 때문에



원의 일부로 이루어진 닮음 도형들[5]도 결국

최대한 닮음비의 사용을 자제하면서 각 단계 도형들의 넓이를 구하려 하다보면

닮음비의 제곱이 비례상수로서 곱해져 가기 때문에.

(닮음비)^2 = (넓이비)라 할 수 있는 것입니다.

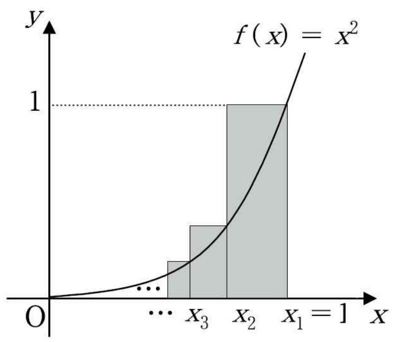
5) 원의 일부가 아닌 다른 곡선들로 이루어진 닮음 도형들의 경우는 거의 출제된 적이 없습니다.

[2004년 05월 교육청 수리(가형) 17번]

17. 이차함수 $f(x)=x^2$ 에서

$x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{4}{9},\ \cdots,\ x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \cdots$을 그림과 같이 정할 때, x_n-x_{n+1}을 밑변의 길이, $f(x_n)$을 높이로 하는 직사각형의 넓이를 A_n이라 하자.

이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$은? [4점]



① $\frac{5}{19}$

② $\frac{6}{19}$

③ $\frac{7}{19}$

④ $\frac{8}{19}$

⑤ $\frac{9}{19}$

아쉽게도 위 그림에 등장하는 직사각형들은 닮음이 아닙니다.

왜냐하면 n번째 직사각형을 구성하는

가로 길이는 $x_n - x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ 이고,

세로 길이는 $(x_n)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ 이므로,

가로, 세로 길이간의 닮음비가 서로 다르기 때문입니다.[6)]

고로, 이 문제에서는 가로 길이의 공비나, 세로 길이의 공비 하나 만을 그대로 제곱하면

직사각형들의 넓이비가 되질 못하고,

가로, 세로 길이의 공비를 곱해야 비로소 넓이비가 됩니다. 즉,

$$A_n = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{9}{8}\left(\frac{8}{27}\right)^n$$

이 되어 실질적인 공비는 $\frac{8}{27}$이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{27}}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{27-8} = \frac{9}{19}$$

가 됩니다.

약간 위험하지만 어찌 됐든 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$은 적어도 부분분수 상쇄형 같은 무한급수가 아니라

결국엔 무한등비급수가 될 테니, 첫 두 항인 $A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{8}{81}$을 이용해서 곧바로

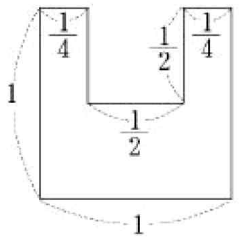
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{27-8} = \frac{9}{19}$$

라 할 수도 있습니다.

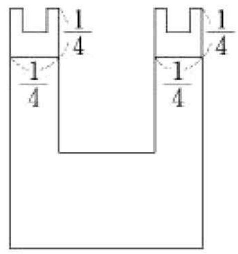
6) 그리고 몇 년 뒤 평가원 시험에 이 문제가 재림하게 됩니다.

[2004년 11월 대수능 수리(가형) 25번]

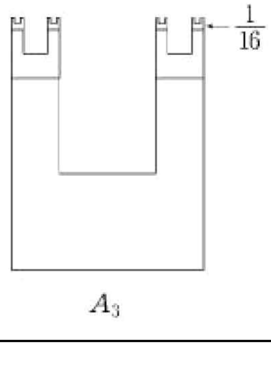
25. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형을 A_1이라 하자.
한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자.
한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자.
$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



A_1



A_2



A_3

닮음 도형은 凹 인데, 닮음비는 길이비의 제곱으로서 $\left(\frac{1}{4}\right)^2$배로 일정하게 줄어들고 있고,

개수비는 2배로 일정하게 늘어나고 있습니다.

고로, 초항이 $S_1 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ 이고,

넓이가 줄어드는 공비와 개수가 늘어나는 공비를 곱한 실질적인 공비는

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{8}$$

이므로

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

이 되어 $p + q = 13$ 이 답입니다.

여기선 닮음 도형들 凹 간의 길이비를 따질 때,

가장 긴 변의 길이간의 비로 구하여도 되고,

가장 짧은 변의 길이간의 비로 구하여도 되고,

가장 긴 대각선 길이간의 비로 구하여도 되는데,

골자는 연이은 닮은 도형 凹 간의 닮음에 대응하는 변끼리의 길이비를

비교하기만 하면 된다는 것입니다.

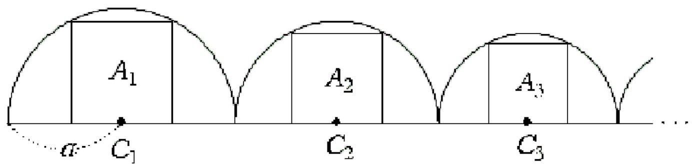
또, 넓이가 줄어드는 비율보다 개수가 늘어나는 비율이 더 영향력이 적기 때문에

실질적인 공비가 0 과 1 사이 양수가 되어 무한등비급수가 수렴하는 것이고,

만약 공비가 1 보다 커져 버리면 코흐 눈송이처럼 값이 발산하게 되는 것이구요.

[2005년 04월 교육청 수리(가형) 11번]

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은? [4점]



① a^2
② $2a^2$
③ $3a^2$
④ $4a^2$
⑤ $5a^2$

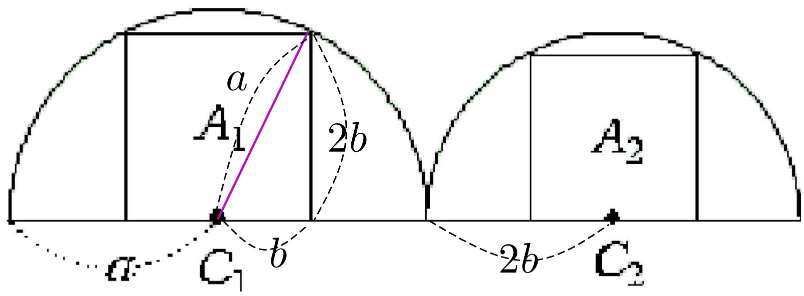
$C_1, C_2, C_3, \cdots$ 마다 정사각형은 하나씩 존재하므로 개수비는 딱히 고려하지 않아도 됩니다.

대신 닮음비의 제곱인 넓이비가 그대로 공비로 적용이 되는데,

적당한 보조선을 통해 닮음비를 구하는 것이 관건입니다.

요즘 등장하는 대부분의 문제들은 적당한 보조선 등을 도입하여야 하는 것들이구요.

지금도 한 번 보조선을 그어보도록 하겠습니다.



지금은 세 변의 길이비가 $1:2:\sqrt{5}$ 인 직각삼각형이 등장하므로

$$b=\frac{1}{\sqrt{5}}a \;\rightarrow\; 2b=\frac{2}{\sqrt{5}}a$$

가 되어, 정사각형 A_n 들의 길이비이자 닮음비는 $2:\sqrt{5}$ 이고,

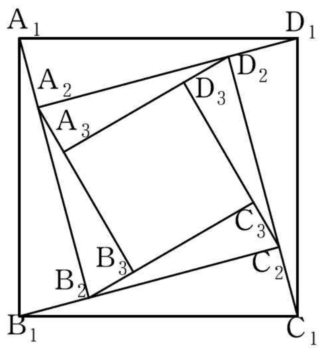
실질적인 공비는 닮음비의 제곱으로서 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$ 가 됩니다. 따라서,

$$\frac{(2b)^2}{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=5\left(4b^2\right)=20\cdot\frac{a^2}{5}=4a^2$$

가 나옵니다.

[2005년 05월 교육청 수리(가형) 14번]

14. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 합동인 4개의 직각삼각형의 넓이의 합과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이가 같도록 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 같은 방법으로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 만들어진 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은? [3점]



① 2

② $\frac{9}{4}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$

⑤ 3

독특한게 있다면, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$들이 반시계 방향으로 회전해 간다는 것이고,

정사각형들의 대각선의 교점을 중심이라 보았을 때,

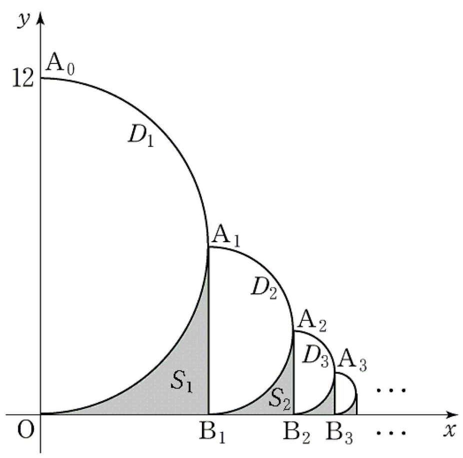
중심이 고정된 채 각 단계마다 넓이가 절반이 되게끔 포개어지고 있습니다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$가 됩니다.

[2005년 06월 평가원 수리(가형) 17번]

17. 그림과 같이 원점과 점 $\mathrm{A}_0(0,\ 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_1이라 하자. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$을 지름으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_2라 하자. 점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $9(4-\pi)$ ② $12(4-\pi)$ ③ $15(4-\pi)$
④ $4(8-\pi)$ ⑤ $6(8-\pi)$

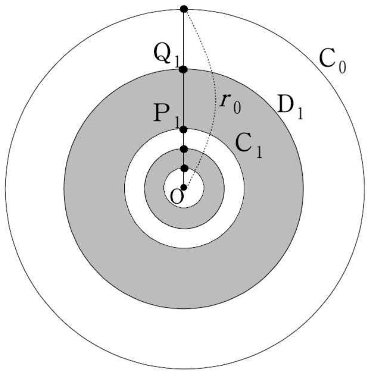
길이비의 제곱, 즉 닮음비의 제곱이 넓이비로서 공비가 되고, 한 큐에 쓰자면

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{36 - \frac{1}{2}\cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}(36-9\pi) = 12(4-\pi)$$

[2005년 08월 사관학교 수리(나형) 24번]

24. 다음 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 r_0 인 원 C_0가 있다. 원 C_0의 반지름을 3 등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 P_1, Q_1이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$ 으로 하는 원을 각각 C_1, D_1이라 하자. 같은 방법으로 원 C_1의 반지름 $\overline{OP_1}$ 을 3 등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 P_2, Q_2이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_2}$, $\overline{OQ_2}$ 으로 하는 원을 각각 C_2, D_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 C_n, D_n(단, $n=1, 2, 3, \cdots$)을 만든다.

이 때, 원 D_n의 넓이에서 원 C_n의 넓이를 뺀 값을 s_n이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3}{4}\pi r_0^2$

② $\frac{3}{8}\pi r_0^2$

③ $\frac{5}{8}\pi r_0^2$

④ $\frac{9}{16}\pi r_0^2$

⑤ $\frac{9}{64}\pi r_0^2$

문제 속에 스며있는 무한등비급수를 찾아봅시다.

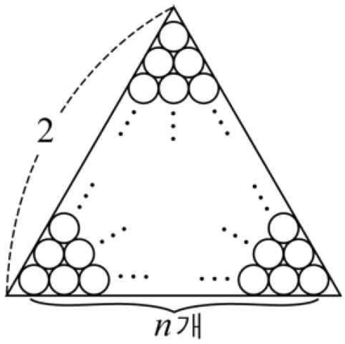
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \pi\left(\frac{2}{3}r_0\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{3}r_0\right)^2 + \pi\left(\frac{2}{3^2}r_0\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{3^2}r_0\right)^2 + \cdots$$

$$= \pi {r_0}^2\left[\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{2}{3^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3^2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{2}{3^3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3^3}\right)^2\right\} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\frac{4-1}{9}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\pi {r_0}^2 = \frac{3}{8}\pi {r_0}^2$$

[2005년 10월 교육청 수리(가형) 16번]

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, $\cdots$, n 개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.



자연수 n 의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]

① $\sqrt{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{5}\pi$

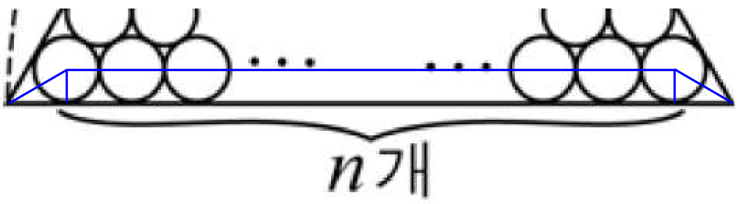
⑤ $\frac{\pi}{2}$

분석할 것이 참 많고, 앞으로 프랙탈을 바라보는 여러분의 시선을 달라지게 할 문제입니다.

일단 원은, 모든 원들은 닮음입니다.

하지만 위 그림에서 $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ 로 등차수열적으로 증가할 때,

각 원들의 반지름 길이라든가, 각 원들의 총 개수들은 등비수열적으로 증가하지 않습니다.



각 원의 반지름 길이 r_n에 대하여 위 그림과 같이 보조선을 그어서

$$r_n\{\sqrt{3} + 1 + 2(n-2) + 1 + \sqrt{3}\} = 2$$

라 하면

$$r_n = \frac{1}{n-1+\sqrt{3}} \rightarrow \pi(r_n)^2 = \frac{\pi}{(n-1+\sqrt{3})^2}$$

이 되고, n번째 단계에서 정삼각형 내부의 작은 원들의 총 개수는

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

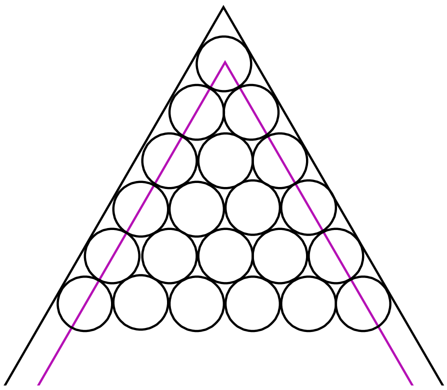
이므로

$$\lim_{n\to\infty}\pi(r_n)^2 \times \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\pi}{2(n-1+\sqrt{3})^2} = \frac{\pi}{2}$$

가 됩니다.

그러므로 이 문제는 지금껏 풀어온 무한등비급수 문제는 아닙니다!

이제, n이 무한히 커지고 있는 극한 상황을 상상해봅시다.



그러면 정삼각형 내부를 원들이 빼곡하게 채우고 있겠죠?

이때 정삼각형의 각 변에 접하는 원들의 중심을 이어서

커다란 정삼각형 바로 안쪽의 보라색 정삼각형을 생각해봅시다.

규칙을 파악하기 위해 이러한 작업을 하는 거죠!

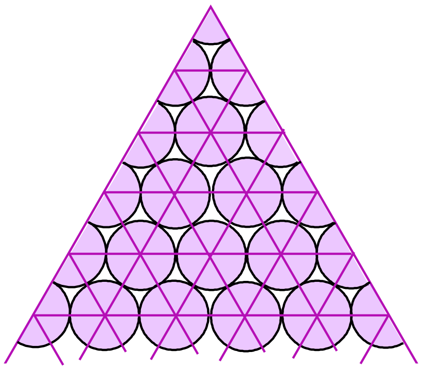
그리고 마치 카스테라 빵의 종이를 뜯어내 버리듯,

아이스크림 콘의 껍질에 묻은 건 무시하고 버리듯,

요플레의 껍질에 묻은 것들은 무시하고(?!) 통에 담긴 요플레만 떠 먹듯이

why?

보라색 정삼각형 밖의 영역은 과감하게 무시하겠습니다.



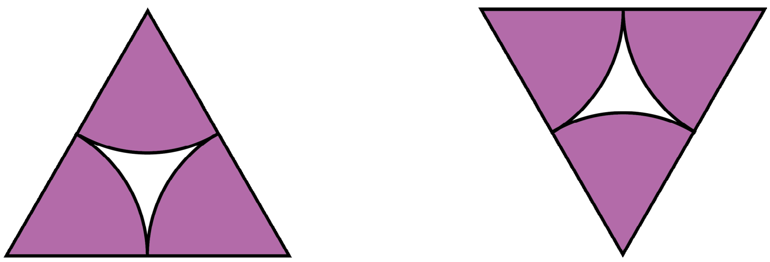
다시 보라색 정삼각형 안쪽에 보조선을 그어서 작은 삼각형들로 쪼개어 보면

정삼각형의 내부에 부채꼴 세 개가 그려진 모습이네요.

화학Ⅱ에 등장하기도 하는 결정 구조 개념이 맞습니다. 그리고 화Ⅱ는 사랑입니다.

혹은 거리에서 흔히 볼 수 있는 바닥의 타일링/테셀레이션(쪽매맞춤)과도 비슷합니다.

즉, 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부를

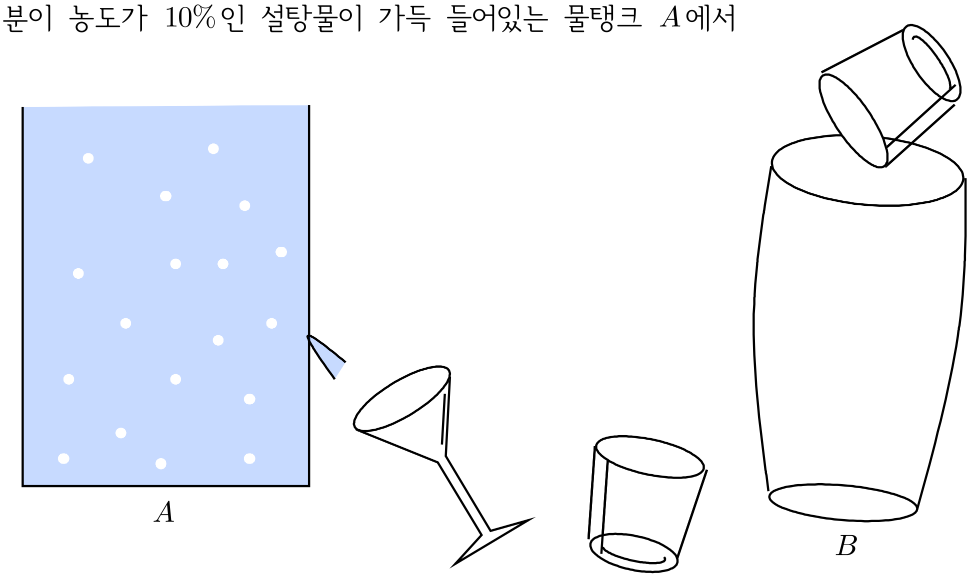


이러한 “단위도형”으로 원래의 정삼각형을 가득 메운다고 할 때, 아까 과감하게 버렸었던

테두리 부분은 넓이의 극한값에 영향을 미치지 않으니 부채꼴 부분들의 총합이 답이 됩니다.

여기서 이해를 돕기 위해 임의로 “농도” 개념을 도입해보도록 하겠습니다.

만약 여러분이 농도가 10%인 설탕물이 가득 들어있는 물탱크 A에서



각양각색의 컵들에 가득 따랐다고 합시다.

그리고 그 컵들을 빈 그릇 B에 옮겨 담는다면 B에 담긴 설탕물의 농도는 몇 %일까요?

…

당연히 10%겠죠? 바로 이 원리입니다!

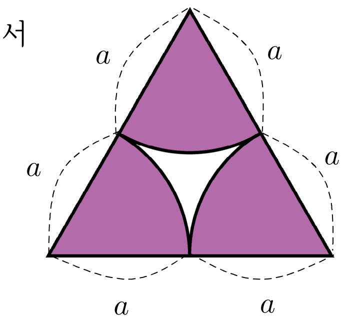
이런 식으로 문제를 풀려거든, 프랙탈을 우선 단위도형으로 쪼갭니다.

이때 껍질 부분을 무시해야 하는 문제가 있는가 하면, 그럴 필요가 없는 문제도 있습니다만

이는 실제 문제풀이를 통해 다시 보면 “A ㅏ~!” 할 수 있을 겁니다.

그래서 단위도형에서의 해당하는 부분인 비율 혹은 농도를 구해서

기존 도형의 넓이에 $\boxed{\text{농도}}$를 곱해주면 되는 것입니다.



따라서, 우리 문제에서는 $\sqrt{3} \times \boxed{\dfrac{\frac{\pi}{2}a^2}{\sqrt{3}\,a^2}} = \dfrac{\pi}{2}$ 이 답이 됩니다.

[2006년 08월 사관학교 수리(가형) 24번]

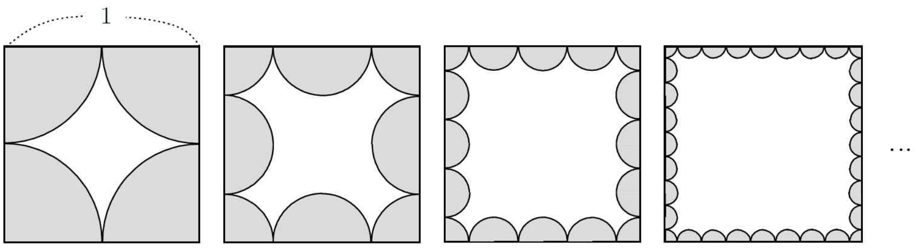
24. 한 변의 길이가 1 인 정사각형을 R라 하자.

R의 각 변을 2등분 한 후 [그림1]과 같이 각 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

R의 각 변을 4등분 한 후 [그림2]와 같이 각 꼭지점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2 라 하자.

R의 각 변을 8등분 한 후 [그림3]과 같이 각 꼭지점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$ 을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{7}{9}\pi$

④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

방금 전 문제와 비슷한데 결론부터 말하자면

이 문제는 전체도형이라고 볼 만한 것이 없어서

그냥 푸는 수 밖에 = 출제자가 원하는 대로 풀 수 밖에 없습니다.

각 단계의 그림마다 반원과 사분원이 등장하는데,

편의상 [그림 n]에서 사분원 하나의 넓이를 s_n이라 하고,

사분원들의 개수를 t_n이라 한다면 $S_n = s_n \times t_n$이 됩니다.

그리고 수열 $\{s_n\}$과 $\{t_n\}$을 관찰해보면

$$\{s_n\} \ : \ \frac{\pi}{16},\ \frac{\pi}{64},\ \frac{\pi}{256},\ \cdots,\ \frac{\pi}{4^{n+1}},\ \cdots$$

$$\{t_n\} \ : \ 4,\quad 12,\quad 28,\ \cdots,\ 4(2^n-1),\ \cdots$$

에서 등비수열과 등비수열이 아닌 수열의 곱으로서 포개어진 수열 $\{S_n\}$은

$$S_n = \frac{4(2^n-1)}{4^{n+1}}\pi = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)\pi$$

이 되어

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)\pi = \left(1-\frac{1}{3}\right)\pi = \frac{2}{3}\pi$$

가 나옵니다.

만약 이 문제를 보고 결국엔 무한등비수열일테니 S_1, S_2만 구하고서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \neq \frac{S_1}{1-\frac{S_2}{S_1}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \pi$$

라 하면 안 되겠죠?

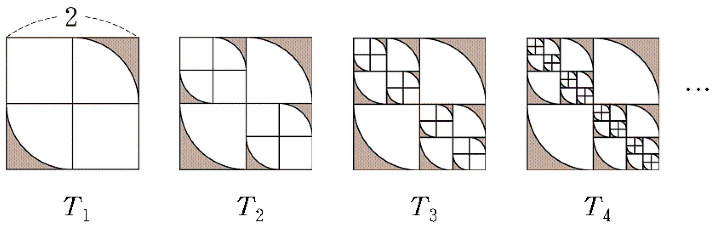
그러니 이처럼 도형과 결합한 무한급수, 즉 프랙탈 문제를 풀어내려면

문제 속에 숨어있는 무한급수 관계를 수식으로 뽑아낼 수 있어야 합니다.

평소와 다름을 인지할 수 있는 센스도 갖추면 좋구요.

[2006년 09월 평가원 수리(가형) 14번]

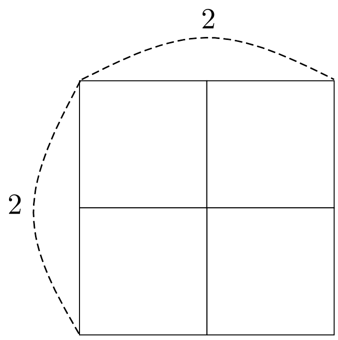
14. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자.
T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자.
T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



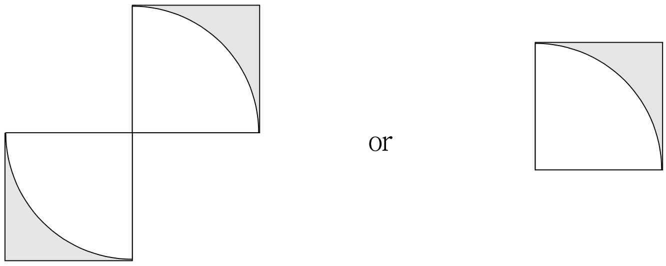
① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$
④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

이 문제도 때마침 “단위도형”으로 접근이 가능합니다.

설탕물을 붓는 그릇에 해당하는 전체 도형은 다음과 같고,



단위도형은 설탕과 물로 이루어진 설탕물로서



와 같은 모양입니다. 즉, 단위도형은 유일하지 않을 수도 있겠군요!

그리고 단위도형의 농도는 $\dfrac{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}}{1+1}=\dfrac{\pi}{4}$ 혹은 $\dfrac{\pi/4}{1}=\dfrac{\pi}{4}$ 가 됩니다.

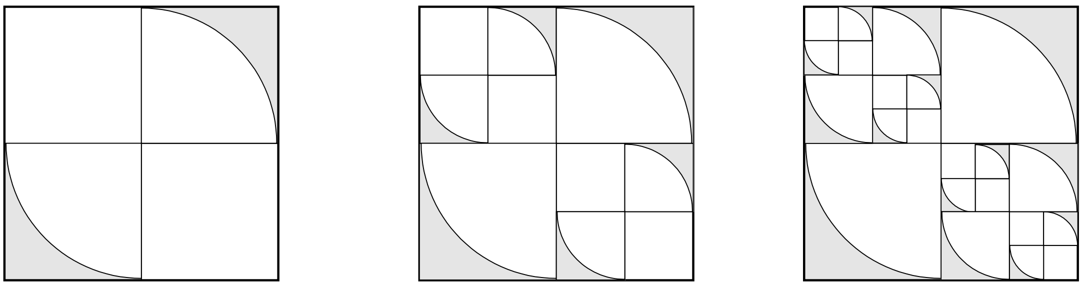
즉, 넓이가 $2\times2=4$짜리 정사각형 모양의 전체 그릇에

농도가 $\dfrac{\pi}{4}$인 설탕물을 그릇 한 가득 채웠을 때,

그릇 속의 설탕의 양을 구하라는 것이 문제이고,

$$4\times\frac{\pi}{4}=\pi$$

가 답이 됩니다.



그림으로 나타내자면 이런 식으로 반복해서 프랙탈을 형성해 나가는 것이라 볼 수 있구요.

이것 말고도 단위도형 문제는 자주 등장하니까 되도록이면 그때마다 언급 하겠습니다.

물론, 이렇게 풀지 않고도 일반적인 무한등비급수 문제로 볼 수 있습니다.

단, 어두운 부분이 아니라 흰 부분 넓이의 총합을 구하라고 하는데, 가령 T_1 단계에서

두 개의 흰 부채꼴과 두 개의 흰 정사각형 넓이를 모두 고려하기 시작하면

식이 불필요하게 복잡해지게 됩니다.

각 T_n 단계에서 흰 정사각형 부분은 무시한 채 부채꼴 부분만 취해가도 상관없는 까닭은

T_n 단계에서 흰색 정사각형 넓이의 합이

$$2 \to 1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \cdots$$

와 같이 $n \to \infty$ 일 때 0 으로 수렴하기 때문입니다.

그렇다면 S_n 자체는 등비수열의 합이 되지 못하겠죠?

따라서, T_n 단계에서 새로이 추가되는 흰 부채꼴 부분의 넓이만을 고려해보면

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^2 + \cdots = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2} = \pi$$

가 됩니다.

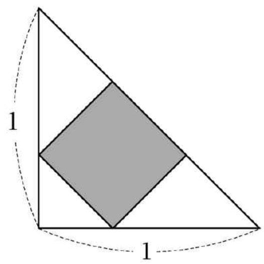
[2006년 11월 대수능 수리(가형) 17번]

17. 아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

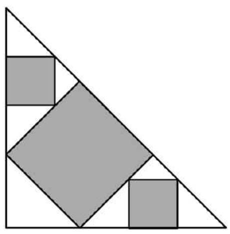
그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

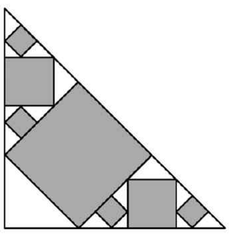
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



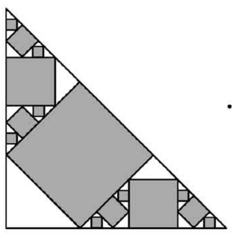
R_1



R_2



R_3



R_4

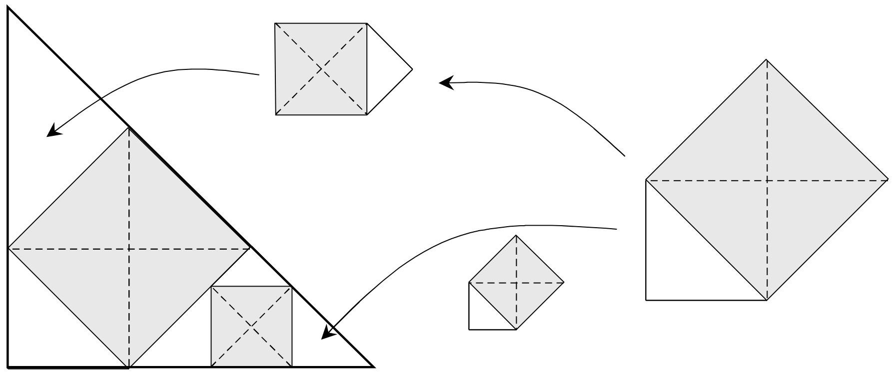
…

① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

말 안 해도 여러분들은 미리 문제 풀어보고 계시죠^^?

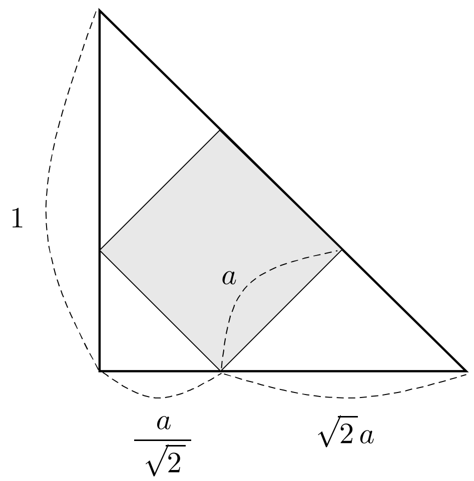
이 문제는 단위도형으로 접근하는 것이 많이 유리한 문제입니다.



전체도형의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이고, 단위도형에서 색칠한 부분의 농도가 $\frac{4}{5}$ 이므로

프랙탈을 완성하였을 때 색칠한 부분의 총량은 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ 가 됩니다.

일반적인 무한등비급수로 접근을 하여도 아래와 같이



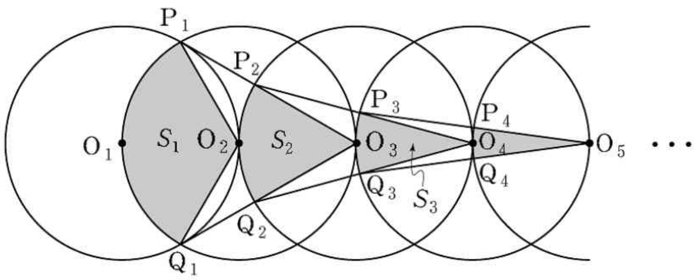
직각삼각형 변의 길이에 대해 식을 세워 $a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = 1 \to a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 를 얻고,

닮음비가 $1 : a = \sqrt{3} : 2$ 로서, 공비는 넓이비와 개수비를 동시에 고려하면

$$\therefore \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot 2} = \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{5}$$

[2007년 06월 평가원 수리(가형) 15번]

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O_1, O_2, O_3, $\cdots$인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{O_nO_{n+1}}=1(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.
두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $O_2P_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $O_3P_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.
두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $O_4P_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $O_{n+1}P_nQ_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{5}{6}\pi$　④ π　⑤ $\frac{7}{6}\pi$

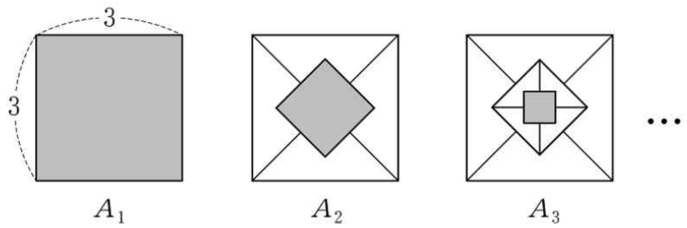
넓이에 관한 무한등비급수지만, 실제로는 부채꼴들이 닮음을 이루고 있는 것이 아니라

각이 등비수열적으로 감소하고 있으므로 길이에 관한 무한등비급수문제라 볼 수 있습니다.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\pi$$

[2007년 09월 평가원 수리(가형) 13번]

13. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. 정사각형 A_1에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 같은 방법으로 정사각형 A_2에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_3, 그 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $(n-1)$번째 얻은 정사각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

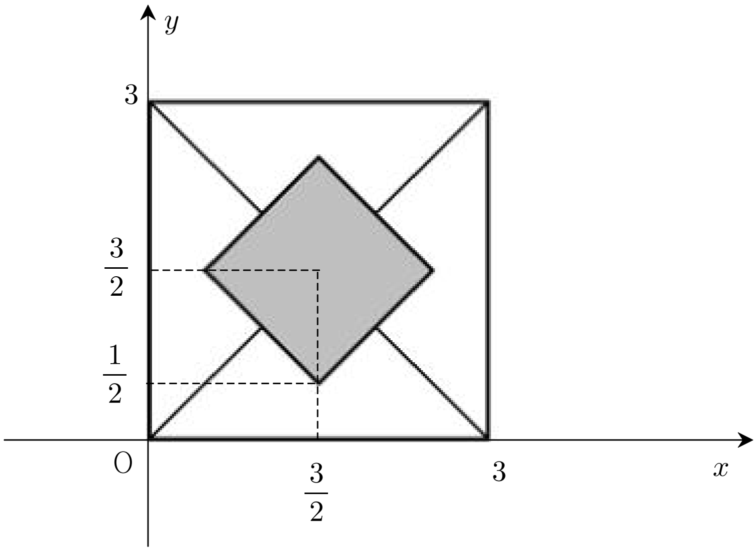


① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{72}{7}$ ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{81}{7}$

초항은 $3\times3=9$로 바로 보이는데, 공비가 관건이네요.

대신 $\{S_n\}$이 무한등비급수를 이루고 있음이 자명하므로 S_2를 구해도 되겠죠?

여러 방법이 있겠지만 지금은 좌표를 잡아서 정사각형들의 대각선 길이비를 구해봅시다.



그러면 첫 번째와 두 번째 정사각형에서의 대각선 길이가 $3\sqrt{2}$ 에서 2 로 줄어 들었으므로

공비는 길이비의 제곱으로서 $\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$ 가 됩니다.

따라서, 주어진 무한급수를 계산해보면

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 9 + 2 + \cdots = \frac{9}{1-\dfrac{2}{9}} = \frac{81}{7}$$

이 나옵니다.

이 문제는 특이한 점이 있다면 각 단계마다 정사각형들이

$$\blacksquare \to \blacklozenge \to \blacksquare \to \blacklozenge \to \blacksquare \to \blacklozenge \to \cdots$$

모양을 반복하고 있으며

하나의 정사각형 안에 그림을 다 포개어 놓지 않고

각 단계마다 사각형들을 쪼개어 제시했다는 것입니다.

그래서 전체도형이란 개념이 성립하지 않기 때문에

“단위도형”으로 접근이 불가능한 문제이기도 합니다.

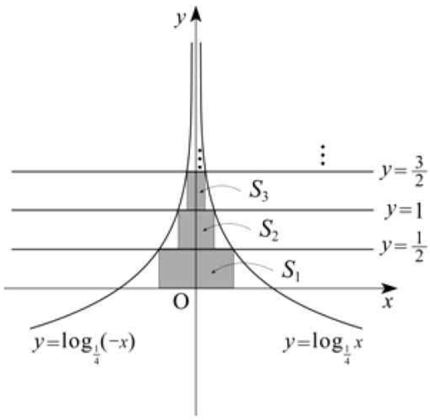
[2007년 10월 교육청 수리(가형) 14번]

14. 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자.

두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자.

두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자.

위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{8}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{7}{8}$　④ 1　⑤ $\frac{9}{8}$

각 단계마다 발생하는 직사각형들을 관찰해보면 세로 길이가 항상 $\frac{1}{2}$이지만

가로 길이는 등비수열적으로 감소하고 있으므로 닮음 관계가 아닙니다.

고로, 실질적으로는 길이에 대한 무한등비수열 문제라고 볼 수 있겠네요.

그러면 $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$$

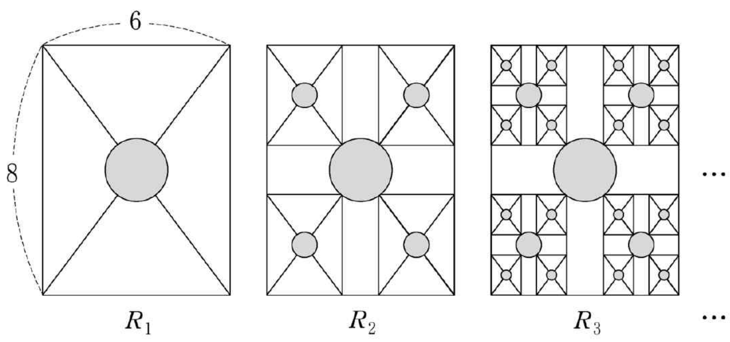
[2007년 11월 대수능 수리(가형) 17번]

17. 아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.) [4점]

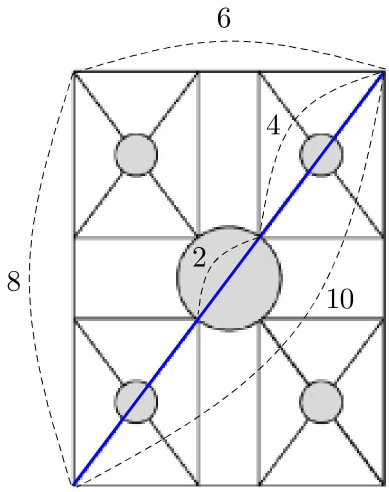


① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$

④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

단위도형으로 접근이 가능하기는 하나, 그냥 푸는게 더 빠른 문제입니다.

평범하게 먼저 풀자면, 초항으로 한 가운데 원 넓이가 π이고,

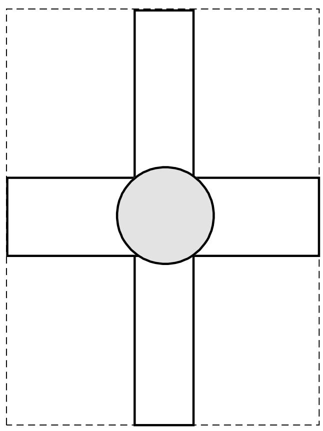


직사각형들의 대각선 길이비로 닮음비를 따지자면 $10:4=5:2$가 되는데,

실질적인 공비는, 각 단계마다 개수가 4배로 늘어나므로 답은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 4} = \frac{25}{9}\pi$$

그리고 단위도형은 십자가 모양 안에 들어간 원 모양으로서



전체도형인 직사각형의 넓이 48에,

단위도형이 되는 십자가 모양에서의 색칠한 부분의 비율을

곱하여도 동일한 결과를 얻을 수 있습니다.

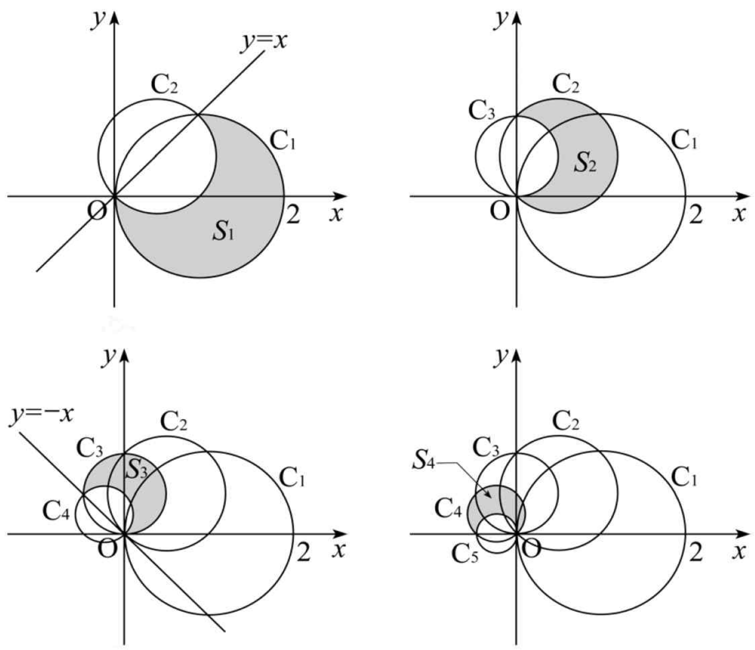
$$48 \times \frac{\pi}{48 - \frac{16}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot 4} = \frac{25}{9}\pi$$

이런 경우, 단위도형으로 접근한다고 해도 큰 메리트가 없습니다.

~~오히려 서술형 평가에서 이런 식으로 풀었다간 0점 받을 수도 있습니다!~~

[2008년 03월 교육청 수리(가형) 17번]

17. 그림과 같이 원점 O와 점 $(2,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, $\cdots$ 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n\ (n=1,2,3,\cdots)$이라 하자.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $\pi+1$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

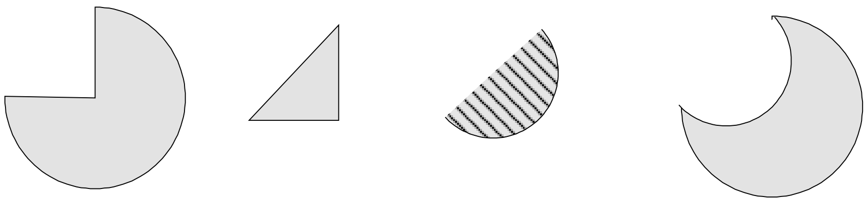
초항과 공비만 구하면 되는 일반적인 무한등비급수 문제입니다.

공비로서, 초승달(?!) 모양을 품는 원의 지름 길이의 제곱으로 잡으면 충분하나,

초항이 되는 초승달 모양의 넓이를 구하는 것이 까다롭네요.

하지만, 부채꼴 넓이, 삼각형 넓이, 원 넓이만 구할 수 있어도 초항을 계산할 수 있습니다.

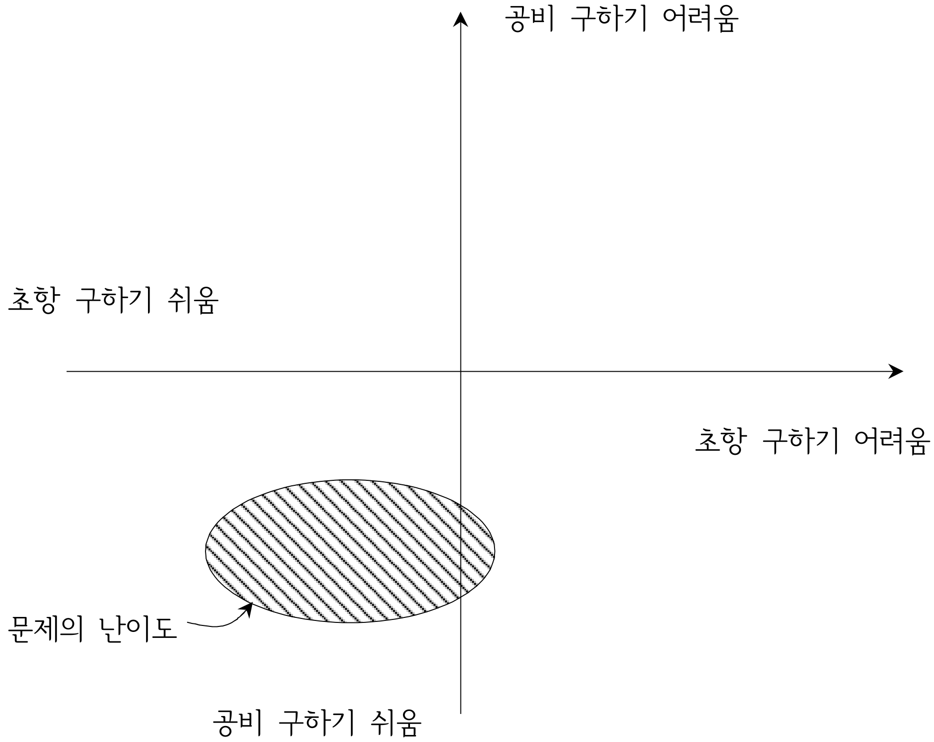
$$S_1 \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{3\pi}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad - \quad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\pi \quad = \quad \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$$



그리고 원 C_1의 지름이 2이고, 원 C_2의 지름이 $\sqrt{2}$이므로

공비는 길이비의 제곱으로서 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이 됩니다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}(\pi+1)}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pi + 1$$

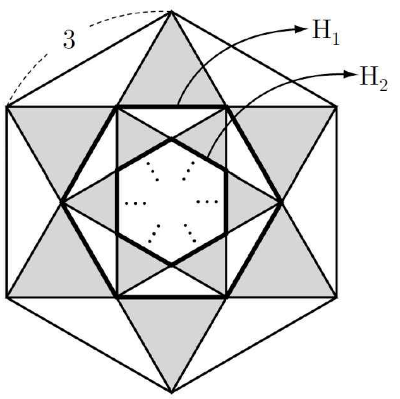


[2008년 04월 교육청 수리(가형) 17번]

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1 이라 하고, H_1 의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

H_1 의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2 라 하고, H_2 의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은? [4점]



① $\frac{19}{4}\sqrt{3}$

② $\frac{21}{4}\sqrt{3}$

③ $\frac{23}{4}\sqrt{3}$

④ $\frac{25}{4}\sqrt{3}$

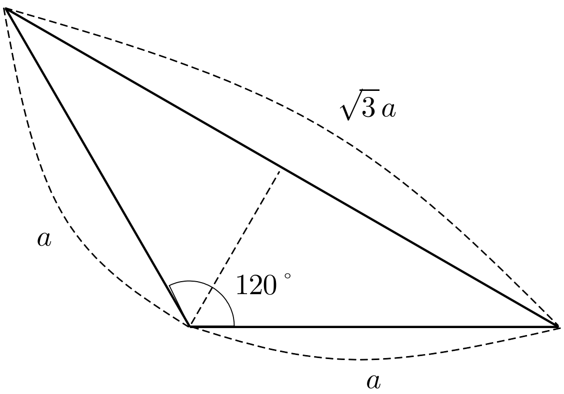
⑤ $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

정육각형도 보이고, 정삼각형도 보이고, 이등변삼각형도 보이는데,

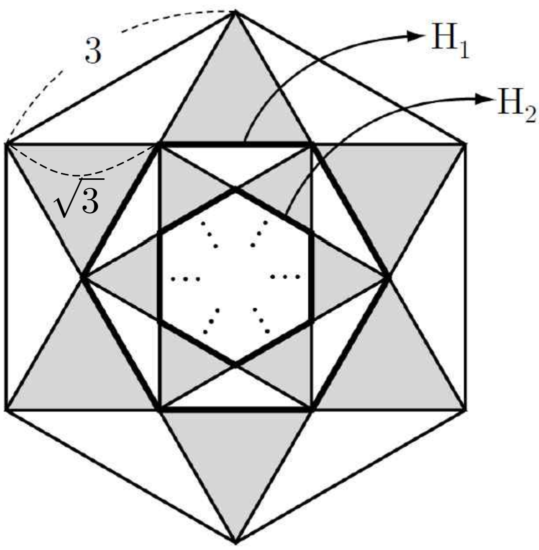
공비를 구하기 위해 정육각형들의 한 변의 길이비를 이용하면 무난합니다.

팁이 있다면, 빈출하는 직각삼각형 길이비로서 $3:4:5$나 $5:12:13$

그리고 $1:1:\sqrt{2}$ 와 $1:2:\sqrt{3}$ 뿐만 아니라



$1:1:\sqrt{3}$ 길이비도 외워두고 있으면 편하다는 것입니다.



따라서 정육각형의 한 변의 길이비로서 $3:\sqrt{3}$ 을 얻고,

실질적인 공비는 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}$ 이 됩니다.

그리고 초항으로서 어둡게 칠해진 가장 큰 정삼각형 여섯 개의 합으로서

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right\}\times 6=\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

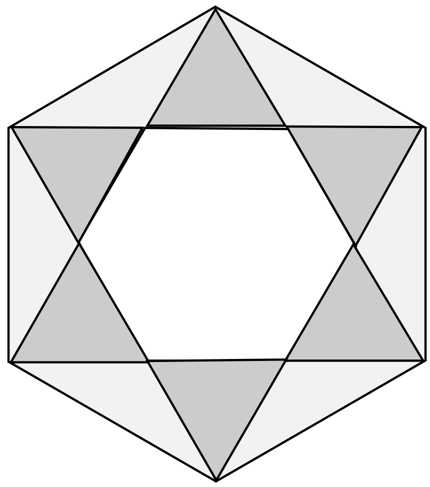
이라 하면 구하고자 하는 값은 $\dfrac{\dfrac{9}{2}\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{27}{4}\sqrt{3}$ 이 됩니다.

사실 이 문제는 이렇게 푸나 저렇게 푸나 쉽게 답에 이를 수 있는 문제이지만,

단위도형으로 접근하면 많이 쉬워지는 심지어 암산으로도 풀리는 문제가 됩니다.

전체도형은 한 변의 길이가 3인 정육각형으로 잡고,

단위도형은 가운데 육각형 모양의 도넛 모양으로서 혹은 너트 모양



다시 세모난 모양의 크림이 올라가 있는 모습이라 볼 수 있습니다.

이때 단위도형에서 더 어둡게 칠해진 부분의 농도 내지는 비율은 $\frac{1}{2}$이 되기에,

전체도형인 정육각형의 넓이에다가 $\frac{1}{2}$만을 곱해주면 답이 됩니다.

그리고, 정육각형 넓이 공식은 따로 배운 적이 없으나

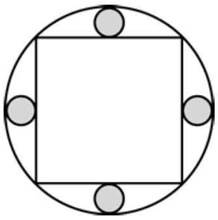
정육각형을 정삼각형 여섯 개로 쪼갤 수 있으니

실제로는 한 변의 길이가 3인 정삼각형 여섯 개 중 절반인 세 개의 넓이에

더 어둡게 칠해진 부분이 해당하므로 답은 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2\right)\times 3 = \frac{27}{4}\sqrt{3}$으로 똑같이 나옵니다.

[2008년 05월 교육청 수리(가형) 17번]

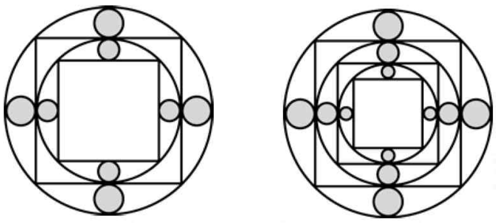
17. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형을 그린다. 원의 내부와 정사각형의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.



여기에 아래의 과정을 반복한다.

> [과정]
> Ⅰ. 안에 있는 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 원에 내접하는 정사각형을 그린다.
> Ⅱ. 새로 그려진 원의 내부와 정사각형 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.

정사각형의 개수가 모두 n일 때, 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



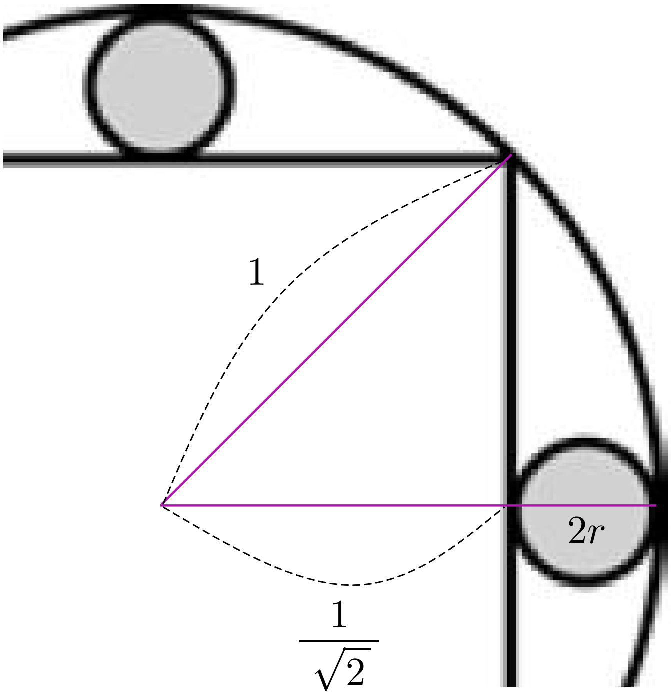
[$n=2$일 때] [$n=3$일 때]

① $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})\pi$
② $(2\sqrt{3}-\sqrt{11})\pi$
③ $(\sqrt{11}-\sqrt{10})\pi$
④ $(\sqrt{10}-3)\pi$
⑤ $(3-2\sqrt{2})\pi$

무한등비급수를 이루는 초항으로서 어둡게 칠해진 가장 큰 원 네 개의 넓이 합을,

공비로는 반지름이 1인 원과, 바로 안 쪽 원의 반지름 길이비의 제곱으로 잡으면 되는데,

이를 위해 적절한 보조선의 도입이 시급합니다.



그러면 $1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2r \rightarrow r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이고, 초항은 $4\pi r^2$이고,

공비는 색칠되지 않은 원들의 반지름 길이비의 제곱으로서 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$이 됩니다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4\pi r^2}{1 - \frac{1}{2}} = 8\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = (3 - 2\sqrt{2})\pi$$

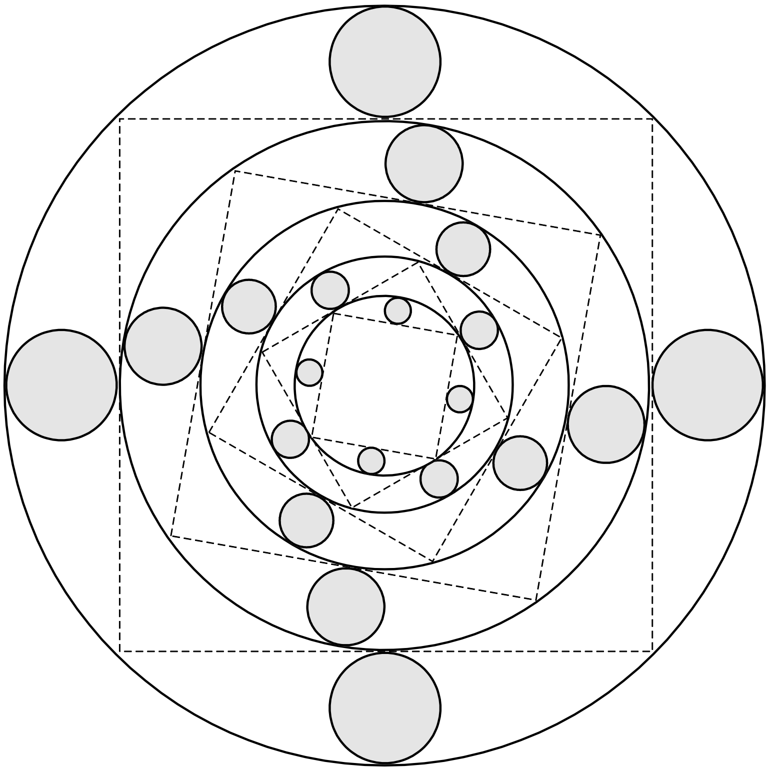
이때 문제에서 물어보는 것은 어두운 부분의 넓이 총합의 극한값인데,

굳이 원과 원 사이에 정사각형을 그려넣은 까닭은, 아시겠죠^^?

그리고 색칠한 원들의 중심이 두 직선 위에 존재하는데,

색칠한 원들을 전화번호 다이얼 돌리듯이 돌려도 답은 달라지지 않습니다.

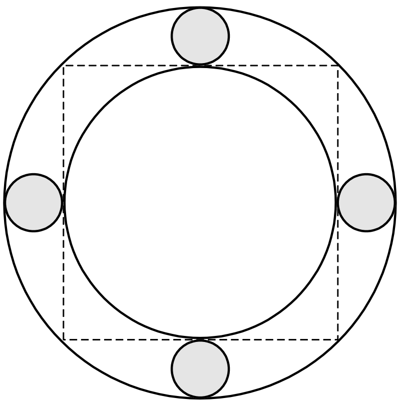
그림으로 살펴보자면,



어차피 n번째 원에 내접하는 정사각형에 다시 내접하는 $(n+1)$번째 원이란 사실은

변함이 없기 때문에 이런 발상이 가능하죠!

그리고 지금 이 문제에서의 단위도형은



도넛 모양에 동그란 크림이 네 개 올려진 모습으로

어두운 부분의 비율은

$$\frac{\pi r^2 \times 4}{\pi\{1^2-(1-2r)^2\}} = \cdots = \frac{r}{1-r}\pi$$

가 되어, 그냥 구하는 것에 비해 계산이 딱히

간단해지는 것이 없네요.

문제를 읽어보고 단위도형이 빠르고 정확할 것 같으면 그렇게 하는게 맞지만,

자신이 생각하기에 다른 최적의 풀이 있다면 그것을 택하면 됩니다!

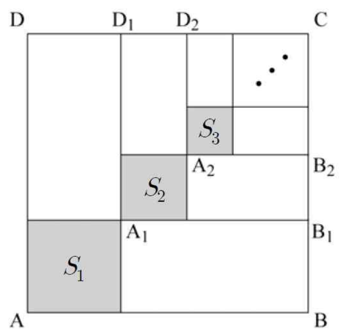
[2008년 07월 교육청 수리(가형) 23번]

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자.

다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다.

m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n 은 서로소인 자연수) [4 점]



잠시 난만한님 빙의해서 한완수 식으로 풀어보겠습니다.

[수능적 해법]

변수에 대한 이해가 중요하다. 적당한 직선이 선분 AB 를 $m:n$으로 내분한다고 해서

$\overline{DD_1} = m, \overline{DC} = n$을 의미하는 것이 아니므로

$$\overline{DD_1} = \frac{m}{m+n}, \overline{DC} = \frac{n}{m+n}$$

이라 하여야 한다.

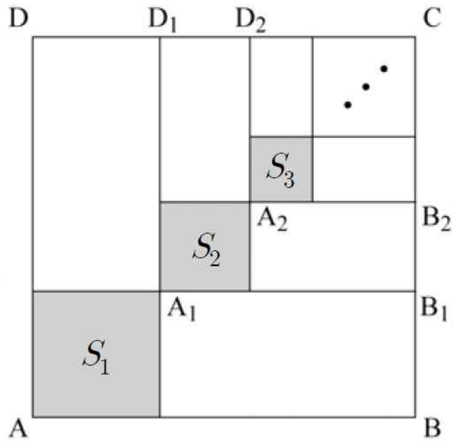
이때 초항으로서 $S_1 = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2$이고, 공비는 $\left(\frac{n}{m+n}\right)^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}{1-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2} = \frac{m^2}{(m+n)^2-n^2} = \frac{m}{m+2n} = \frac{1}{7}$$

에서 $7m = m+2n \rightarrow 3m = n$이 되고, 이를 만족하는 가장 간단한 자연수로

$m=1, n=3$이다. 따라서 $m^2+n^2=10$이 답이다.

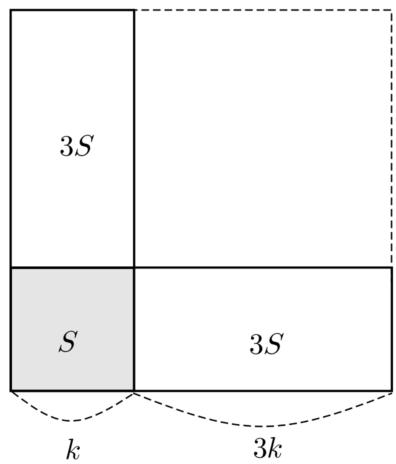
[스피드 해법]



단위도형으로 접근하자면 전체도형의 넓이가 1이므로,

단위도형에서 색칠한 부분의 비율이 $\frac{1}{7}$이 되어야 함을 알 수 있다.

그리고 단위도형은 ㄴ자 부분에 정사각형 부분이 색칠된 모습으로



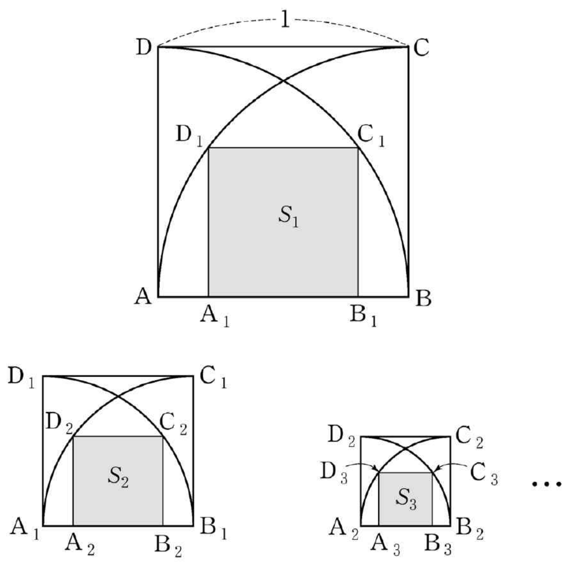
$7=3+1+3$으로 분할해보면

왼쪽과 같은 모습이 되어 $m:n=1:3$

따라서 $m^2+n^2=10$이다.

[2008년 09월 평가원 수리(가형) 17번]

17. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

그림을 포개어서 하나의 커다란 정사각형 내부에 모든 그림을 그리지 않은 까닭은,

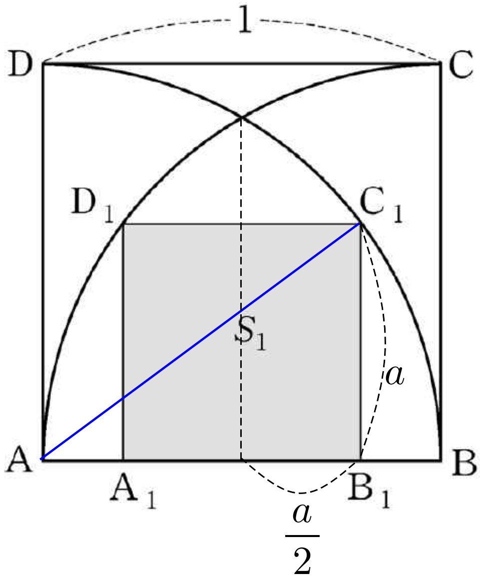
무한등비급수를 이루는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 들이 중복되기 때문입니다.

그리고 지금은 전체도형이 사각형 ABCD 가 아니라

매 단계마다 계속 생성되고 있으므로 단위도형으로 접근할 수 없습니다.

초항이든 공비든 뭐를 하나 구해야 하는데, 정 안 보인다면 좌표계라도 잡아야겠지만

지금은 다음과 같은 보조선 두 가닥으로 충분히 해결이 가능합니다.



정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하였을 때

직각삼각형 AB_1C_1에 피타고라스 정리를 적용하면

$$1^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow a = \frac{3}{5}$$

가 됩니다.

그러면 초항이 $S_1 = a^2$이고, 공비는 $\left(\frac{a}{1}\right)^2 = a^2$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a^2}{1-a^2} = \frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{9}{16}$$

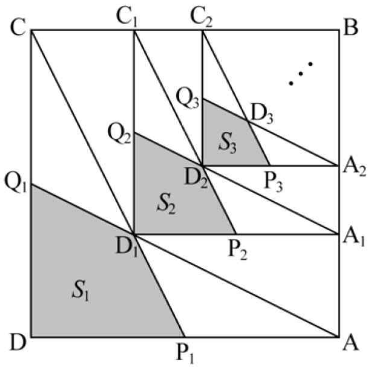
[2008년 10월 교육청 수리(가형) 15번]

15. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

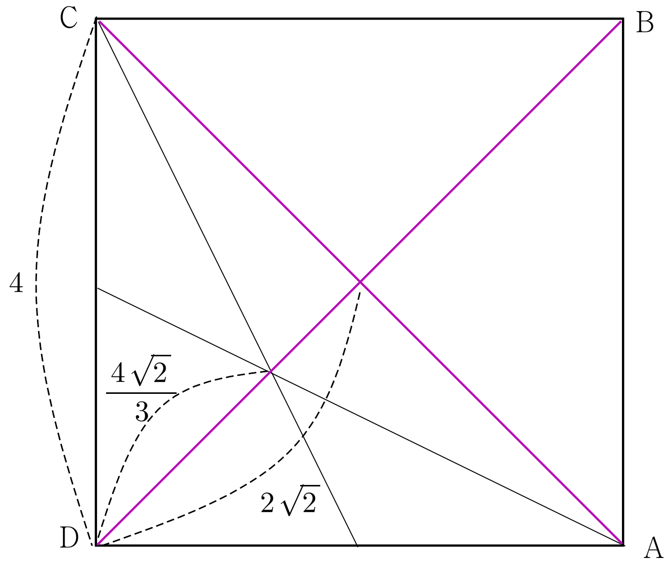
삼각형의 무게중심을 어떻게 작도하는지 알고 있다면 좀 더 쉽게 풀 수 있는 문제입니다.

삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점으로서 사각형 $D_1P_1DQ_1$의 넓이는

직각삼각형 ADC 넓이의 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$에 해당하므로

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\right)\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

그리고 공비를 구하기 위해 여러 방법이 있겠지만 다음과 같이 대각선을 그어보면

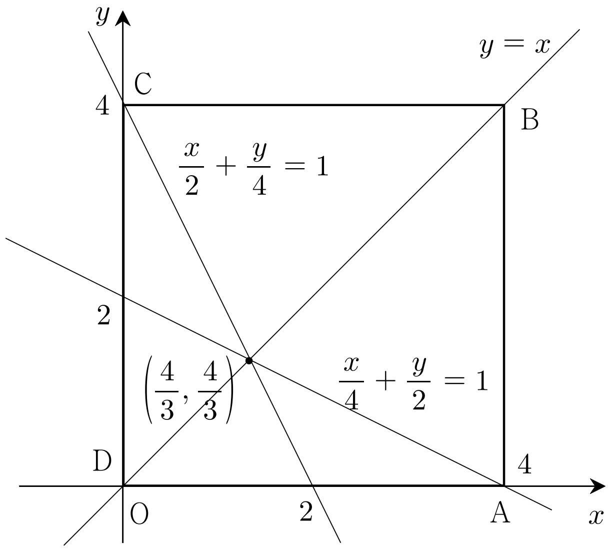


정사각형 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$의 대각선 길이비가 $4\sqrt{2} : \left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 3 : 2$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{5}\cdot\frac{8}{3} = \frac{24}{5}$$

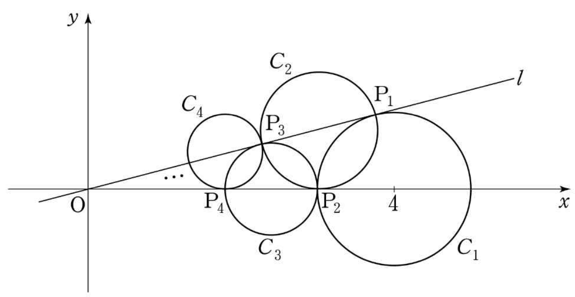
만약 삼각형의 무게중심 작도에 관한 아이디어가 생각나지 않더라도

좌표를 통해 답을 구할 수 있습니다. 자세한 계산은 여러분께 맡기겠습니다 ^^;



[2008년 11월 대수능 수리(가형) 14번]

14. 좌표평면에 원 $C_1: (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.
중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

원들의 닮음비를 유지하기 위한 도구로서

두 직선 x축과 직선 l을 이용하여 프랙탈을 묘사하고 있습니다.

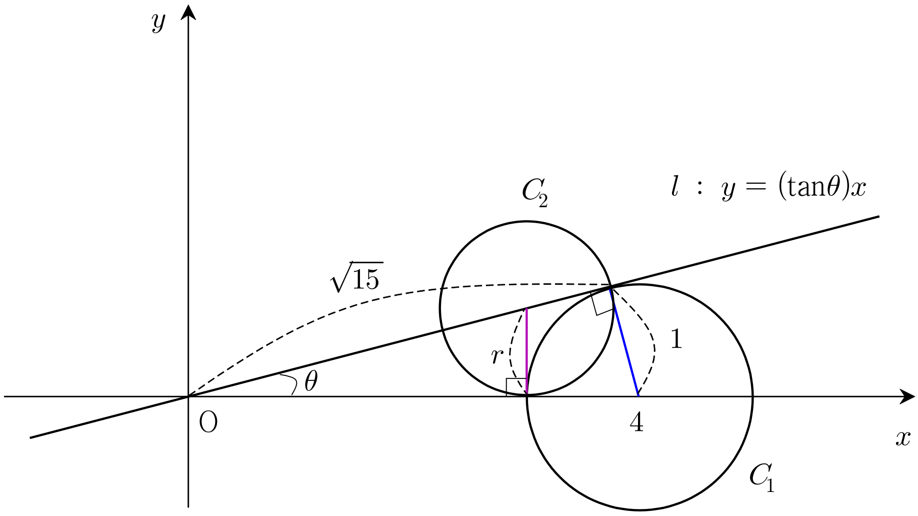
그리고 원 $C_1, C_2, C_3, C_4, \cdots$ 의 중심들이 x축과 직선 l 위에 교대로 존재하는데

이러한 상황을 조금 더 잘 파악하기 위해서

원 $C_1, C_2, C_3, C_4, \cdots$ 들의 중심에서 x축 혹은 직선 l 위로 수선을 내려 보겠습니다.

그렇다고 진짜 무수히 많은 수선을 내릴 필요는 없고,

규칙을 파악할 정도로 몇 개만 그어도 충분합니다.



그러면 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{r}{4-1} \ \rightarrow r = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 가 되어서

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \pi\left(1 + \frac{3}{5} + \cdots\right) = \frac{5}{2}\pi$$

만약 이 문제가 어려웠다면,

① 원 $C_1, C_2, C_3, C_4, \cdots$ 들이 서로 포개어지는 상황이라서

② 원 $C_1, C_2, C_3, C_4, \cdots$ 들의 중심이 하나의 직선이 아닌 두 직선 상에 교대로 발생해서

일 확률이 높습니다.

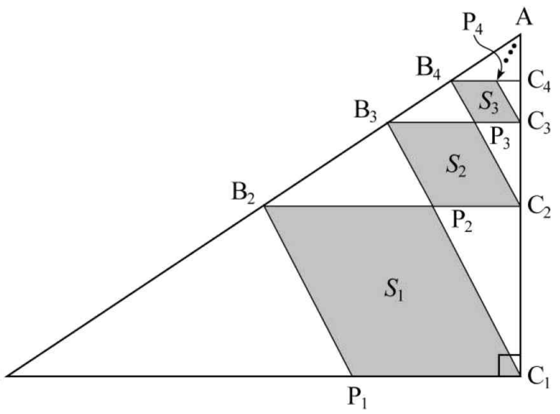
하지만 상황을 잘 캐치하고서 적당한 보조선과 삼각비를 이용하면

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

꼴의 무한등비급수 문제에 불과하게 되죠.

[2009년 03월 교육청 수리(가형) 11번]

11. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B_1 = 30^\circ$, $\overline{AC_1} = 6$인 직각삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자.
두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_2P_1C_1P_2$를 만든다.
두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_3P_2C_2P_3$을 만든다.
두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 B_4C_4를 $2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_4P_3C_3P_4$를 만든다.
이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $B_{n+1}P_nC_nP_{n+1}$의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]

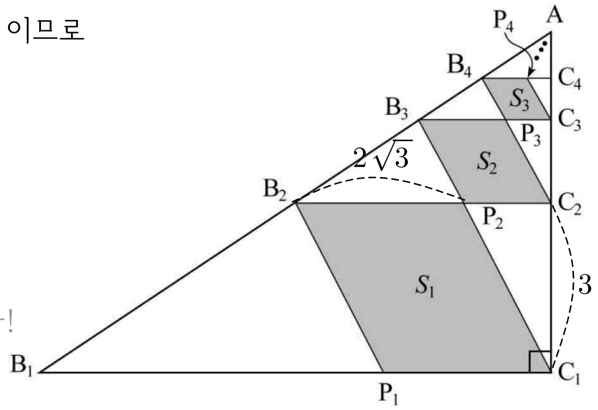


① $8\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

초항 $S_1 = 6\sqrt{3}$이고, 공비는 $\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = 8\sqrt{3}$$

단위도형은 평행사변형이 색칠된 사다리꼴!



[2009년 05월 교육청 수리(가형) 17번]

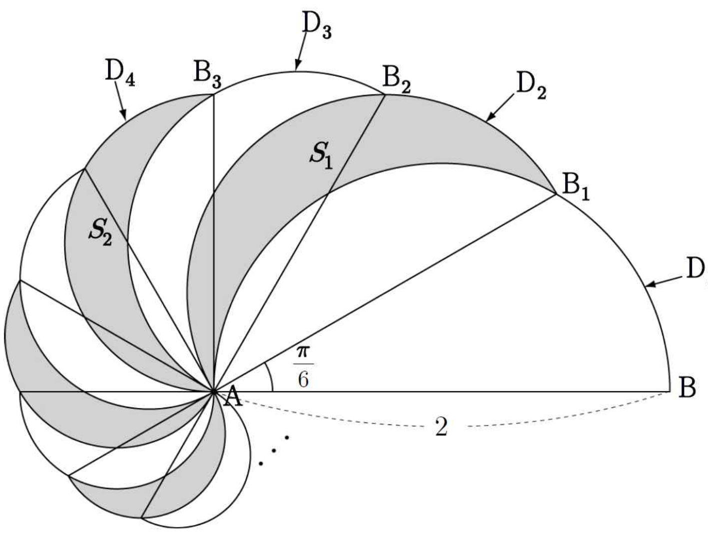
17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle \mathrm{BAB}_1=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점 B_1을 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원 D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AB}_2=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{\mathrm{AB}_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle \mathrm{B}_2\mathrm{AB}_3=\dfrac{\pi}{6}$ 가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{b}{a}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]

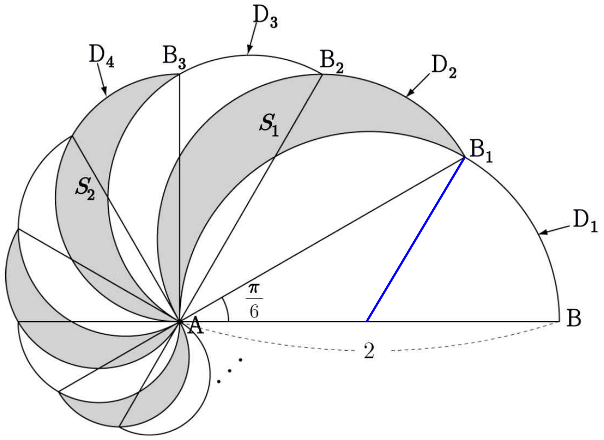


① 7
② 8
③ 9
④ 10
⑤ 11

반원 $D_1, D_2, D_3, \cdots$ 들이 조금씩 중복되면서 초승달과 같은 모양을 만들어내고 있습니다.

초항은 초항대로 구하기 까다로운 = 귀찮은 편이고

공비도 약간 구하기 힘들 수 있습니다.



초항을 구하기 위해 필요한 보조선은, 점 B_1에서 변 AB의 중점을 이은 선분으로

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$$

가 되고, 닮음비는 $\overline{AB} : \overline{AB_2}$ 혹은 $\overline{AB_1} : \overline{AB_3}$ 등을 이용해 구하자면

$$\overline{AB} : \overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 2 : \sqrt{3} : \frac{3}{2}$$

에서 $\overline{AB} : \overline{AB_2} = 4 : 3$이 되므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{7}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) = \frac{4}{7}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$$

따라서 $a+b = 7+4 = 11$이 답이 됩니다.

여담이지만 이 해 6, 9월 평가원 문제보다 훨씬 수능 문제에 유사 했었습니다!

지금은 안 보는 5월 경기도 학력평가이지만 풀어볼 만하다는 얘기.

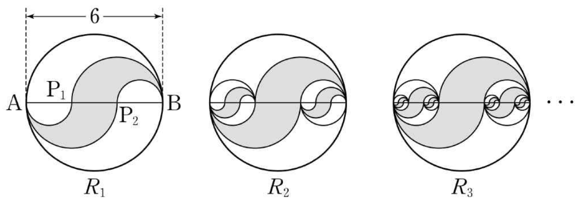
[2009년 06월 평가원 수리(가형)]

12. 그림과 같이 길이가 6 인 선분 AB 를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB 의 3 등분점을 각각 P_1, P_2 라 하고 선분 AP_1 을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2 를 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{B}$ 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 AP_1, $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ 를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 두 선분 AP_1, $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ 위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

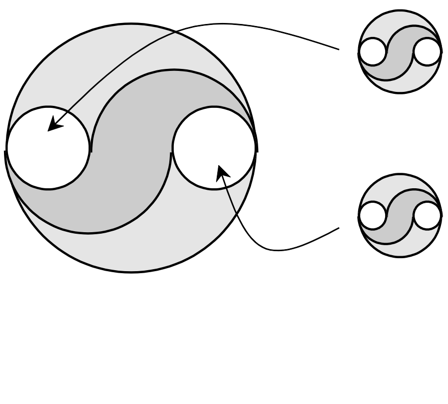
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



① $\frac{25}{7}\pi$ ② $\frac{27}{7}\pi$ ③ $\frac{29}{7}\pi$ ④ $\frac{31}{7}\pi$ ⑤ $\frac{33}{7}\pi$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4\pi - \pi}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2} = \frac{27}{7}\pi$$ 로 금방 나옵니다.

단위도형은 구멍 두 개 있고, 가운데 색칠된 단추 모양입니다.



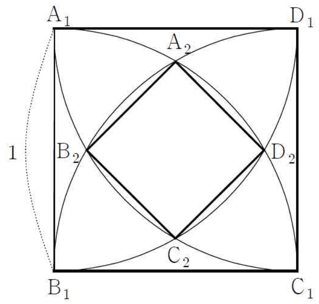
굳이 단위도형으로 풀어도 같은 값이 나옵니다.

$$\therefore\ 9\pi \times \frac{4\pi - \pi}{9\pi - 2\pi} = \frac{27}{7}\pi$$

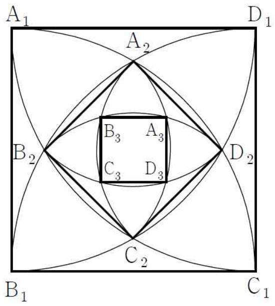
[2009년 08월 사관학교 수리(가형) 19번]

19. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3이라 하자.

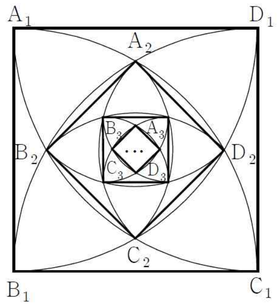
이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_nB_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림1]



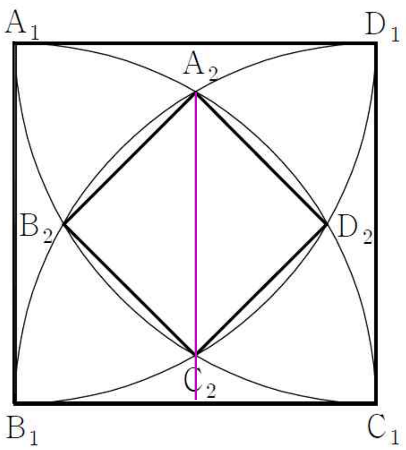
[그림2]



① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$　　⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

초항 $S_1 = 1^2 = 1$이고, 공비만 구해주면 되겠네요. $\overline{A_1C_1} = \sqrt{2}$이고



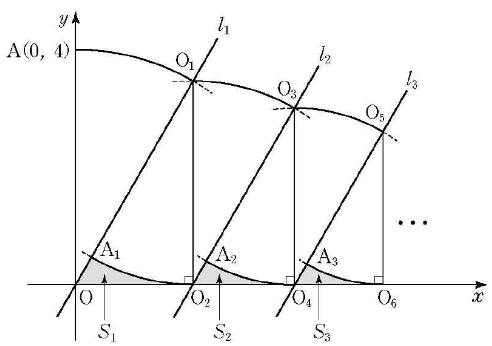
$\overline{A_2C_2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 09번]

9. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$가 있다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}$, 선분 OO_2, 호 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$를 반지름으로 하는 원이 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$과 만나는 점을 A_2라 하자. 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2$, 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4$, 호 $\mathrm{O}_4\mathrm{A}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $4\sqrt{3}-2\pi$　② $8\sqrt{3}-4\pi$　③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$　⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

문제는 엄청 길고 어려워 보이지만 자세히 보면 정말 쉬운 편에 속합니다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{6}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 8\sqrt{3} - 4\pi$$

또, 이 문제는 전체도형이 무한등비급수로 표현되기 때문에 단위도형 풀이는 비효율적입니다.

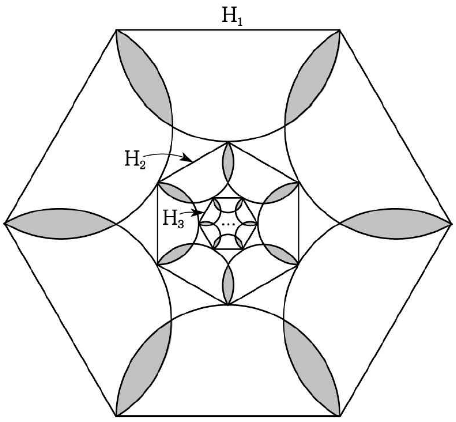
[2009년 10월 교육청 수리(가형)]

16. 그림과 같이 정육각형 H_1 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2 라 하자.

정육각형 H_2 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 정육각형 H_n 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1} 이라 하자.

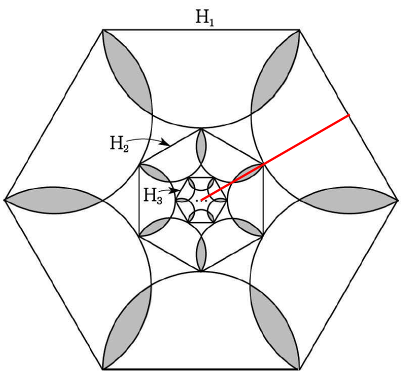
이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 S_1 을 이용하여 나타낸 것은? [4점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$

④ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$　⑤ $2\sqrt{3}\,S_1$

문제를 잘 읽어보면 초항 S_1은 구할 필요가 없습니다!



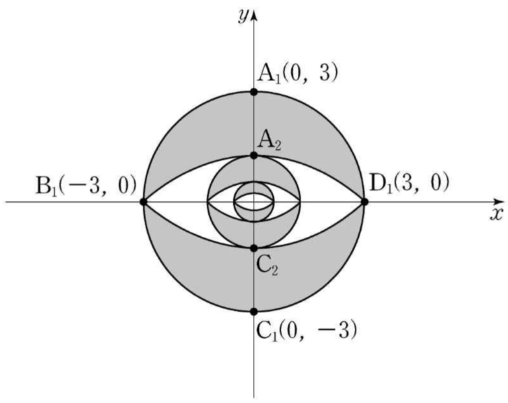
정육각형 H_1의 한 변의 길이를 a_1이라 하면

$$a_2 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \ \rightarrow \ a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_1$$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$$

[2009년 11월 대수능 수리(가형) 15번]

15. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $\mathrm{A}_1(0, 3)$, $\mathrm{B}_1(-3, 0)$, $\mathrm{C}_1(0, -3)$, $\mathrm{D}_1(3, 0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.
호 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$과 호 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{D}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1,
호 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 호 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_2\mathrm{D}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자.
호 $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$와 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{D}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2,
호 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$와 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_3\mathrm{D}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때,
$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은? [4점]



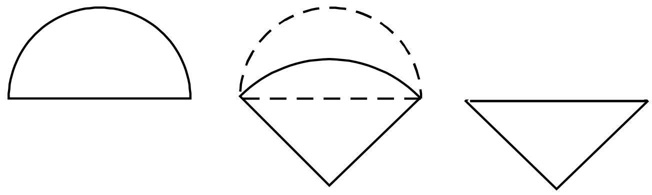
① $6(\sqrt{2}+1)$　② $6(\sqrt{3}+1)$　③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$　⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

누군가가 지켜보고 있을 것만 같은 눈동자 모양이네요.

그리고 $S_n = T_n$이니 S_n에 관한 무한등비급수를 구해보도록 하겠습니다.

초승달 같이 생긴 초항 S_1은 한 번에 못 구하니까 적당하게 부분부분 더하고 빼서

$$S_1 = \frac{9}{2}\pi - \left(\frac{9}{2}\pi - 9\right) = 9$$



이고, 닮음비는 원 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$의 반지름의 길이비로서 $3 : (3\sqrt{2} - 3) = 1 : (\sqrt{2} - 1)$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{9}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{9}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{9}{2\sqrt{2}-2} = \frac{9(2\sqrt{2}+2)}{4}$

가 되어

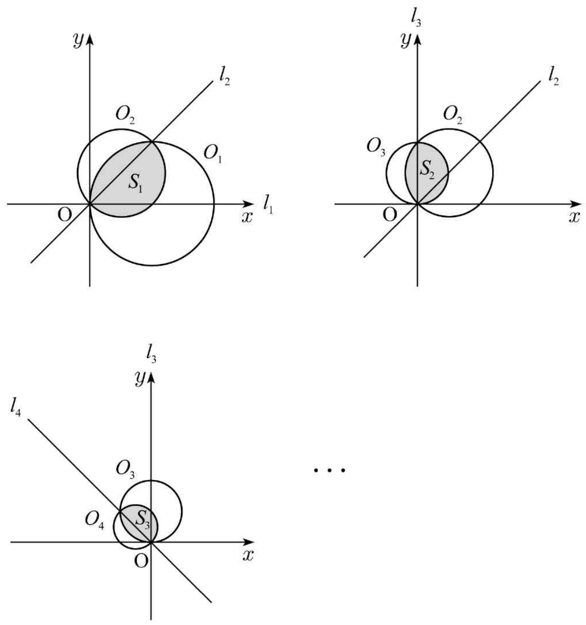
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (S_n + T_n) = 9(\sqrt{2} + 1)$$

약간 특이한 점이 있다면, 원의 일부로만 이루어진 S_1의 넓이가 π의 유리수 배가 아니라

깔끔한 유리수 형태가 된다는 점을 들 수 있겠네요.

[2010년 03월 교육청 수리(가형) 14번]

14. 좌표평면에서 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자.
직선 l_1을 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.
직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.
직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

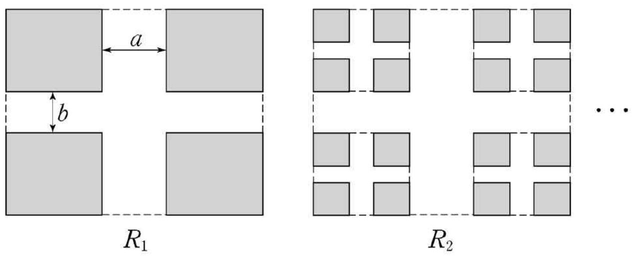
초항과 공비를 고려하여 식을 세우면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{9}{4}\pi}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{6}\right)^2} = 9(\pi-1)$

[2010년 06월 평가원 수리(가형) 10번]

10. 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 R_n의 4^n개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

넓이비는 길이비의 제곱이라는 일반적인 관점이 적용되지 않는 문항입니다.

오래전 교육청 기출문제 중에서 유사한 것이 있었지만

이런 식의 유형을 처음 접한 학생들은

그림들이 대충 프랙탈을 이루는 것 같고, 닮음비도 일정한 것 같으니

가로 길이비나 세로 길이비를 구해서 둘 중 하나만 제곱한 것을

공비로 세워서 구해버릴 만도 합니다.

하지만 실제로 계산해보면 가로, 세로길이들의 닮음비는

$$5 \ \rightarrow \ 5\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{15}{8}$$

$$4 \ \rightarrow \ 4\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{8}{5}$$

에서 보듯 각각 $\frac{3}{8}$과 $\frac{2}{5}$가 되어

실질적인 R_n 단계의 가장 작은 직사각형들의 넓이비는 $\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$이 되고,

넓이가 줄어드는 것과 별개로 개수는 4배씩 늘어나고 있으므로

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\left(\frac{15}{8}\times\frac{8}{5}\right)\times 4}{1-\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\right)\times 4}=\frac{12}{1-\frac{3}{5}}=30$$

만약 수열 $\{S_n\}$의 공비를 $\left(\frac{3}{8}\right)^2\times 4$나 $\left(\frac{2}{5}\right)^2\times 4$로 잡았다면

답이 분수로 나와서 보기 중에 없기 때문에 당황할 수도 있습니다.

[2010년 08월 사관학교 수리(가형) 16번]

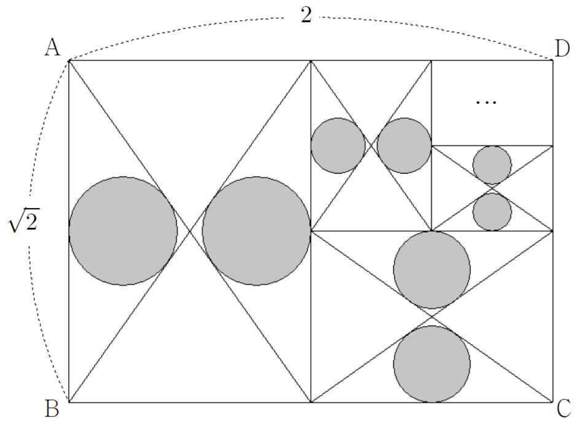
16. 그림과 같이 $\overline{AB} = \sqrt{2}$, $\overline{AD} = 2$인 직사각형 ABCD에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

[단계 1] 직사각형 ABCD의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

[단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

[단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

⋮



이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(5-2\sqrt{6})$ ② $2\pi(3-\sqrt{6})$ ③ $2\pi(5-\sqrt{6})$

④ $4\pi(3-\sqrt{6})$ ⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

단위도형으로 풀든 그냥 풀든 별 반 차이가 없는 문항입니다.

S_1을 구하기 위해 내접원 두 개의 넓이를 계산해보면 내접원의 반지름 r에 대해

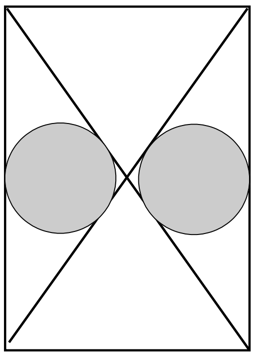
$$r\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

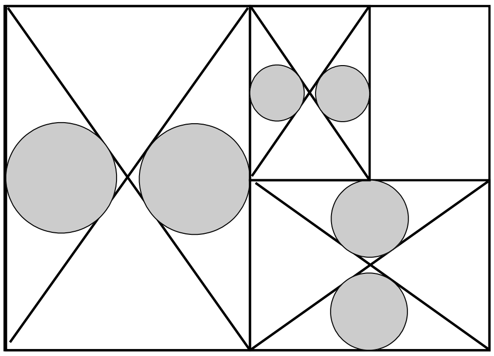
이 성립하므로

$$S_1 = 2\pi r^2 = \frac{\pi}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{\pi}{5+2\sqrt{6}}$$

그리고 단위도형은 직사각형에 내접원 두 개가 색칠된 모습으로서

그 농도이자 색칠된 부분의 비율은 $\dfrac{S_1}{\sqrt{2}}$ 이 되므로



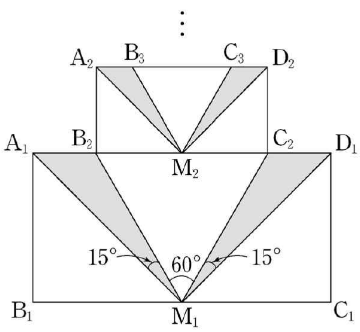


$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\sqrt{2} \times \frac{S_1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{5+2\sqrt{6}}\pi = 2(5-2\sqrt{6})\pi$$

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 10번]

10. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2 = \angle C_2M_1D_1 = 15°$, $\angle B_2M_1C_2 = 60°$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2} = 2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3 = \angle C_3M_2D_2 = 15°$, $\angle B_3M_2C_3 = 60°$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

③ $\dfrac{4+\sqrt{3}}{9}$ ④ $\dfrac{5-\sqrt{3}}{5}$

⑤ $\dfrac{7-\sqrt{3}}{8}$

이것도 초항과 공비만 구하면 되는 문제입니다.

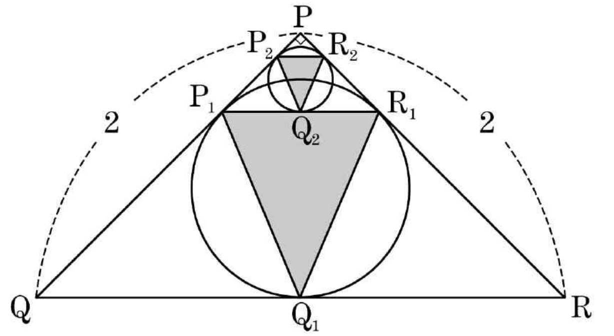
초항으로서 $S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1 = 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이고,

공비는 닮음비의 제곱으로서 $2^2 : \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3:1$에서

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

[2011년 03월 교육청 수리(가형) 15번]

15. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=2$이고 $\angle\mathrm{QPR}=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자. 또, 삼각형 $\mathrm{PP_1R_1}$의 내접원과 세 변 $\mathrm{PP_1}$, $\mathrm{P_1R_1}$, $\mathrm{R_1P}$의 접점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{R_2}$라 하자.



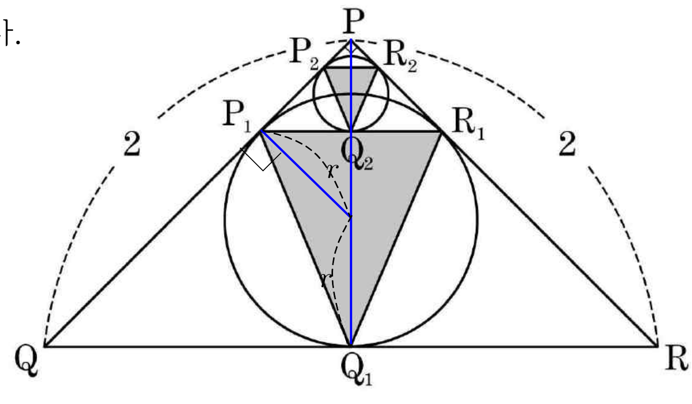
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

초항이나 공비를 구하기 위해서 보조선을 긋는 것이 관건이겠네요.

단위도형은 등변 사다리꼴에서 색칠된 역삼각형인데 그리 메리트가 있지 않으니

일반적으로 접근해보도록 하겠습니다.



$\overline{\mathrm{PQ_1}}$ 길이에 대해 등치해보면

$r+\sqrt{2}r=\sqrt{2}$

에서 $r=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$이고,

초항 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}r\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)r=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 입니다.

그리고 닮음비는 $\overline{\mathrm{QR}} : \overline{\mathrm{P_1R_1}} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2}r$이므로 실질적인 공비는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}r}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{r^2}{4}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{1-\frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}{2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{7}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{7}(3-\sqrt{2}) = \frac{6}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{2}$$

따라서 $p+q = \dfrac{6}{7}+\left(-\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{4}{7}$가 답이 됩니다.

초항이나 공비가 좀 구하기 까다롭기 보다는 딱 맞게 떨어지는 수가 아니므로

$\dfrac{a}{1-r}$꼴을 분모의 유리화 위주로 정리하는 과정이 다소 귀찮았던 문제였습니다.

그리고 여담이지만 당시 학교에서 이 시험을 응시한 사람들에게

시험이 어땠냐고, 풀만했냐고 물어 보았더니 이때를 회상하기를

“기껏해야 고3 3월 모의고사인데도 시험이 너무 너무 어려워서

반 아이들이 이 시험은 변별력을 잃었다며 상당히 자포자기 했었다.

~~일각에선 점심때 시험지를 찢는 퍼포먼스를 하기도 하였다~~”고 하네요.

암튼 이런 문제도 잘 풀려면 문제에서 무한등비급수를 캐치해 낸 다음

빠르고 정확한 계산력으로 답을 이끌어내는 능력을 길러야 합니다.

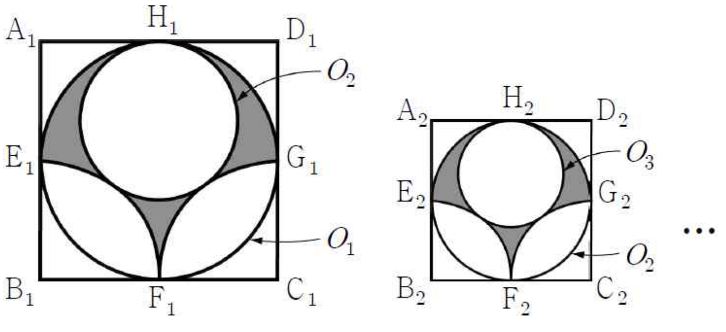
[2011년 04월 교육청 수리(가형) 18번]

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하자.

점 B_1을 중심으로 하고 선분 B_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_1F_1E_1$의 호 E_1F_1과 점 C_1을 중심으로 하고 선분 C_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_1F_1G_1$의 호 G_1F_1과 원 O_1의 호 $E_1H_1G_1$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.

원 O_2에 외접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2라 하자. 점 B_2를 중심으로 하고 선분 B_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $B_2F_2E_2$의 호 E_2F_2와 점 C_2를 중심으로 하고 선분 C_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $C_2F_2G_2$의 호 G_2F_2와 원 O_2의 호 $E_2H_2G_2$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 E_nF_n, 호 G_nF_n, 호 $E_nH_nG_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

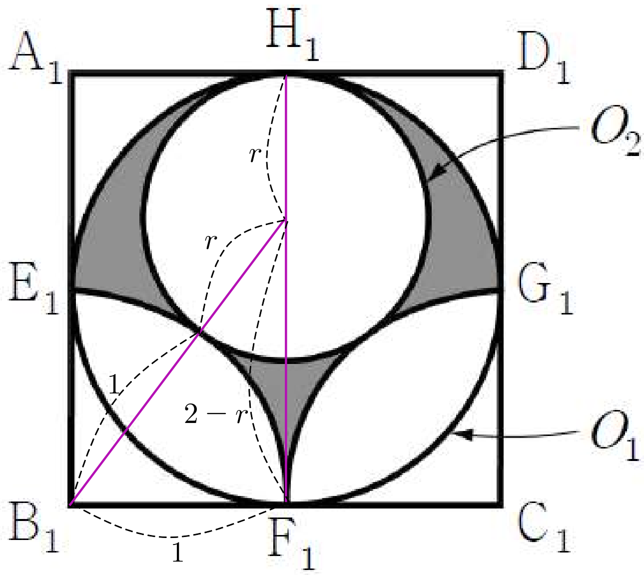


① $\dfrac{9-2\pi}{3}$ ② $\dfrac{18-4\pi}{5}$ ③ $\dfrac{9-2\pi}{2}$

④ $\dfrac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

두 그림에서 공통적으로 등장하는 요소는 산소 O_2가 아니라 원 O_2입니다.

이 문제도 아까처럼 초항과 공비가 둘 다 쉬워 보이지는 않네요.



이렇게 보조선을 그어서 직각삼각형을 찾아준 다음 피타고라스 정리를 적용하면

$$(1+r)^2 = 1^2 + (2-r)^2 \;\rightarrow\; 1+2r+r^2 = 5-4r+r^2$$

따라서 $r=\dfrac{2}{3}$이 나오고, 직각삼각형의 세 변의 길이비는 $3:4:5$를 품고 있네요.

이때 초항 S_1은

$$S_1 = \pi - \pi r^2 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \times 4 = 2 - \pi r^2$$

그리고 공비는 원 O_1, O_2 간의 반지름 길이 제곱의 비로서

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2-\pi r^2}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{5}\left(2 - \frac{4}{9}\pi\right) = \frac{18-4\pi}{5}$$

요즘 등장하는 문제들이 다 이런 식입니다. 초항과 공비만 구하면 끝나는.

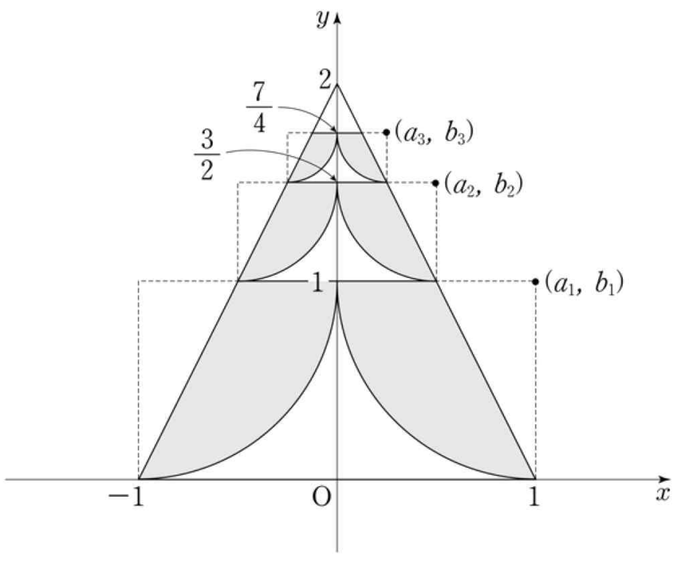
[2011년 06월 평가원 수리(가형) 14번]

14. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

이다. 좌표평면에서 중심이 (a_n, b_n)이고 y축에 접하는 원의 내부와 연립부등식 $\begin{cases} y \le b_n \\ 2x+y-2 \le 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 공통부분을 P_n이라 하고, y축에 대하여 P_n과 대칭인 영역을 Q_n이라 하자. P_n의 넓이와 Q_n의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $\frac{5(\pi-1)}{9}$　② $\frac{11(\pi-1)}{18}$　③ $\frac{2(\pi-1)}{3}$　④ $\frac{13(\pi-1)}{18}$　⑤ $\frac{7(\pi-1)}{9}$



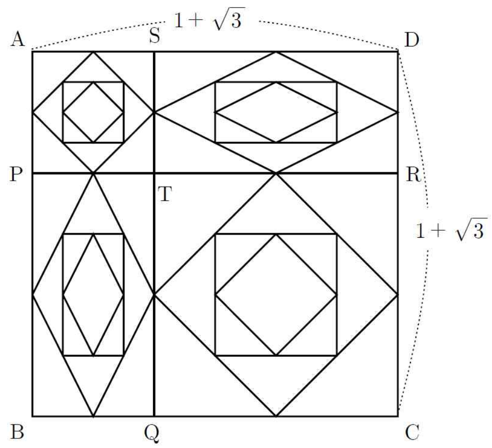
각 등변사다리꼴의 높이만 보아도 닮음비는 2 : 1임을 쉽게 알 수 있습니다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2(\pi-1)}{3}$$

[2011년 08월 사관학교 수리(가형) 15번]

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$ 인 정사각형 ABCD 가 있다. 두 변 AB 와 BC 를 $1:\sqrt{3}$ 으로 내분하는 점을 각각 P, Q 라 하고, 두 변 CD 와 DA 를 $\sqrt{3}:1$ 로 내분하는 점을 각각 R, S 라 하자. 이 때, 두 선분 PR, QS 의 교점을 T 라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD 를 만든다.

먼저 사각형 APTS 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3 라 하자. 또, 사각형 PBQT 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3 라 하자. 또, 사각형 TQCR 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3 라 하자. 또, 사각형 STRD 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3 라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 이라 하자. 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n 의 넓이를 각각 a_n, b_n, c_n, d_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$ 을 만족시키는 두 유리수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

비록 3점 문항이지만 범상치 않은 비쥬얼이네요.

네 개의 무한등비급수로 쪼개어 구하면 시간이 많이 걸리니 독특하게 접근 하겠습니다.

마침 ㅁ → ◇ → ㅁ → ◇ → ⋯ 꼴의 사각형들이 줄어드는 넓이비가 $\frac{1}{2}$ 이니

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$$

임을 이용하자면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 2a_1$$

이 성립하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n$에 대해서도 마찬가지로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2b_1, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2c_1, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 2d_1$$

이 성립합니다.

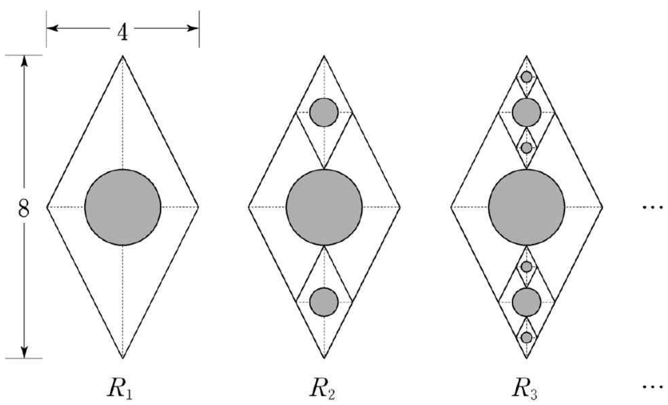
그리고 $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{3}{2}, d_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n + c_n - d_n) = 2(a_1 - b_1 + c_1 - d_1) = 1 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

이 되어 $p + q = 4 + (-2) = 2$가 답이 됩니다.

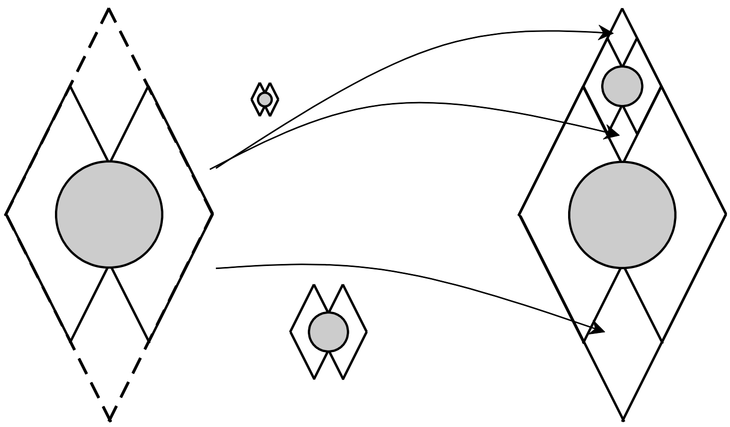
[2011년 09월 평가원 수리(나형) 09번]

9. 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 8, 4인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{32}{25}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{32}{23}\pi$ ⑤ $\frac{16}{11}\pi$

이번에는 단위도형을 이용해서 풀어보도록 하겠습니다.



전체도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$이고,

단위도형에서의 색칠된 부분의 비율이

$$\frac{\pi}{16-2\left\{16\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}}=\frac{\pi}{16-\frac{9}{2}}=\frac{2}{23}\pi$$

이므로 이미 보기 중에서 23이라는 수치를 머금고 있는 ④번이 답이 될 확률이 높지만

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=16\times\frac{2}{23}\pi=\frac{32}{23}\pi$$

비록 생긴 건 '무한급수'가 아니라 '수열의 극한' 형태를 취하지만

$$S_1=a_1=a$$

$$S_2=a_1+2a_2=a+ar \qquad r=\left(\frac{3}{8}\right)^2\times 2=\frac{9}{32}$$

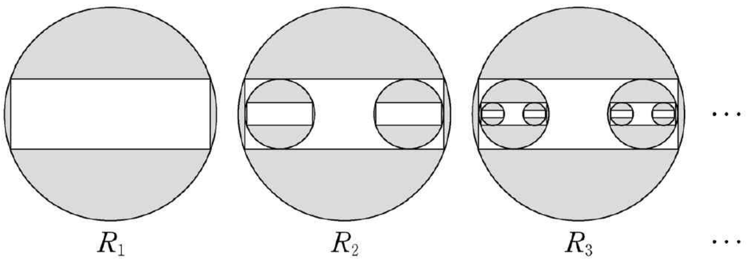
$$S_3=a_1+2a_2+4a_3=a+ar+ar^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

와 같은 꼴이므로 결국엔 무한등비급수라 볼 수 있는 것이죠.

[2011년 11월 대수능 수리(가형) 14번]

14. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{4}\pi-\frac{5}{3}$　② $\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$　③ $\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{5}$
④ $\frac{5}{4}\pi-1$　⑤ $\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{15}$

R_1에서 직사각형의 가로, 세로 길이를 $a, 3a$라 하면 대각선 길이는 $\sqrt{10}\,a=2$

닮음비는 원들의 지름 길이비로서 $2:a$를, 그리고 늘어나는 개수비를 고려하면

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\pi-3a^2}{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot 2}=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

[2012년 03월 교육청 수리(가형) 13번]

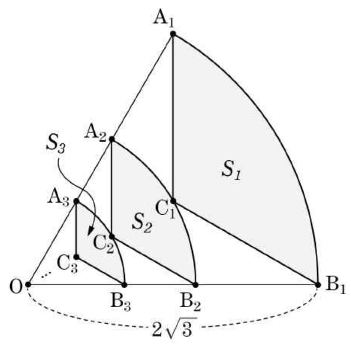
13. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle A_1OB_1 = 60°$인 부채꼴 A_1OB_1이 있다.

세 점 A_1, O, B_1을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1의 무게중심을 C_1이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1과 호 A_1B_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

점 O를 중심으로 하고 점 C_1을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 세 점 A_2, O, B_2를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2의 무게중심을 C_2라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2와 호 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

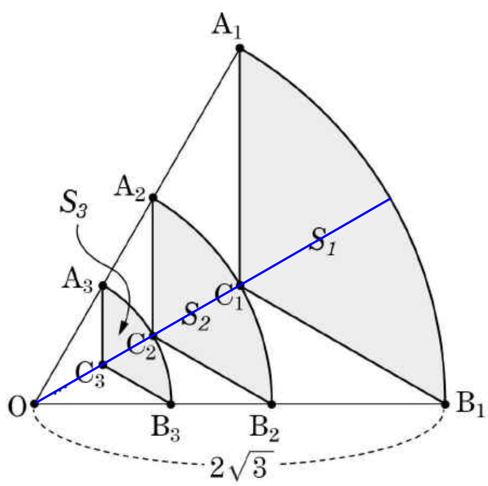
점 O를 중심으로 하고 점 C_2를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2와 만나는 점을 각각 A_3, B_3이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3의 무게중심을 C_3이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3과 호 A_3B_3으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2\pi - \sqrt{3}$ ② $2\pi - 2\sqrt{3}$ ③ $2\pi - 3\sqrt{3}$
④ $3\pi - 3\sqrt{3}$ ⑤ $3\pi - 4\sqrt{3}$

보조선을 그으면 많은 것들이 보입니다. 공익 광고 문구 같네요.



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2$$

부채꼴의 한 변 길이비가 $2\sqrt{3} : 2$이므로

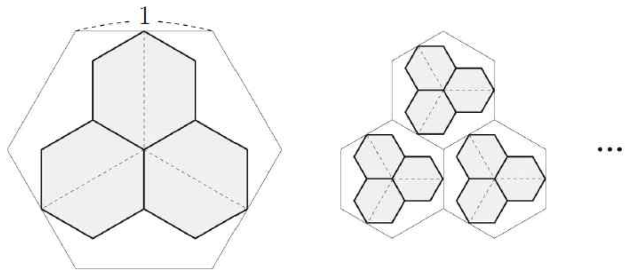
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3\pi - 3\sqrt{3}$$

[2012년 04월 교육청 수리(가형) 20번]

20. 한 변의 길이가 1인 정육각형에서 서로 이웃하지 않는 세 변의 중점과 이 정육각형에 외접하는 원의 중심을 각각 연결하여 세 선분을 얻는다. 이 세 선분을 각각 가장 긴 대각선으로 하는 3개의 정육각형을 그려서 얻은 모양의 그림을 H_1이라 하고, 그림 H_1의 넓이를 S_1이라 하자.

그림 H_1에서 새로 그려진 세 정육각형 내부에 각각 그림 H_1을 얻은 것과 같은 방법으로 그려서 얻은 3개의 모양의 그림을 H_2라 하고, 그림 H_2의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려서 얻은 3^{n-1}개의 모양의 그림을 H_n이라 하고, 그림 H_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



H_1 H_2

① $\frac{27}{11}\sqrt{3}$ ② $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ ③ $\frac{27}{13}\sqrt{3}$ ④ $\frac{27}{14}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{9}{5}\sqrt{3}$

그림 H_n에서 가장 큰 정육각형의 길이는 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$인 등비수열을 이루고

정육각형의 개수비는 공비가 3이므로, 실질적 수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times 3 = \frac{9}{16}$

그리고 초항인 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times 18 = \frac{27\sqrt{3}}{32}$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{9}{16}} = \frac{16}{7}\cdot\frac{27}{32}\sqrt{3} = \frac{27}{14}\sqrt{3}$$

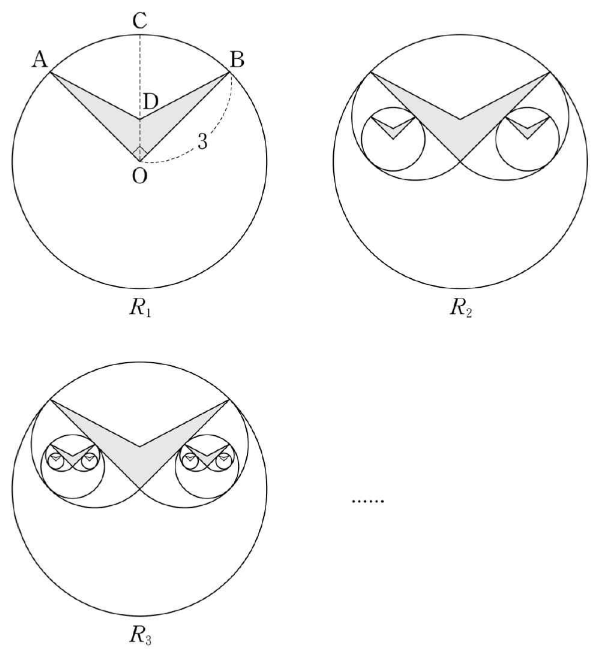
[2012년 05월 평가원 수학 영역(A형) 16번]

16. 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 그림과 같이 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$인 원 위의 두 점을 A, B라 하고, 호 AC와 호 BC의 길이가 같은 점을 C라 하자. 선분 OC를 1:2로 내분하는 점을 D라 하고, 네 선분 OA, AD, DB, BO로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 반지름 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 두 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 그린 두 내접원의 4개의 반지름을 각각 지름으로 하는 4개의 반원을 그리고, 4개의 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 4개의 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

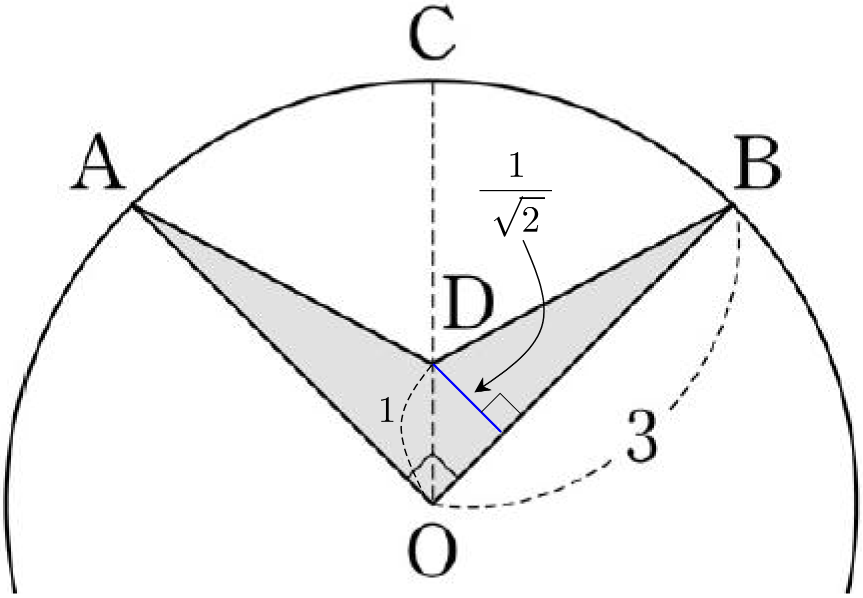
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{11\sqrt{2}}{7}$　② $\frac{12\sqrt{2}}{7}$　③ $\frac{13\sqrt{2}}{7}$

④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{7}$

선분 OC의 1 : 2 내분점이 D이므로



$S_1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 이고,

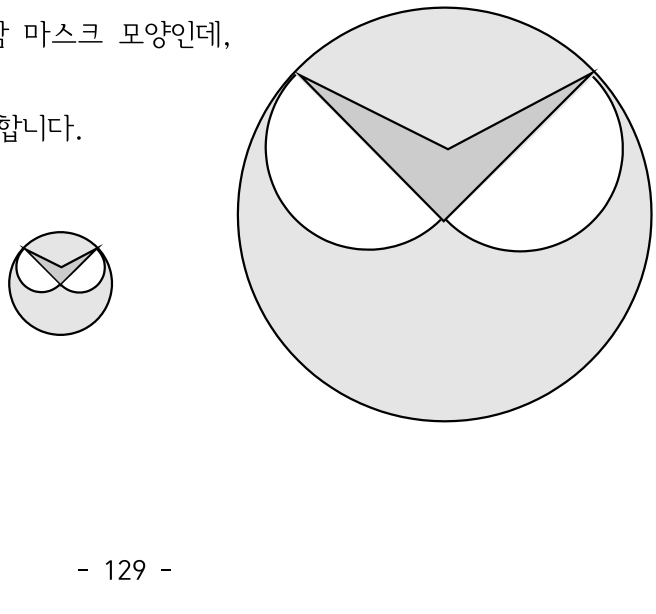
닮음비는 원의 지름 길이비로서 잡으면 $6 : \frac{3}{2} = 4 : 1$이고,

각 단계마다 추가되는 쐐기 모양의 개수는 두 배로 늘어나므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2} = \frac{8}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

그리고 단위도형은 다음과 같은 사람 마스크 모양인데,

이 풀이가 썩 빠르지 않으므로 생략합니다.

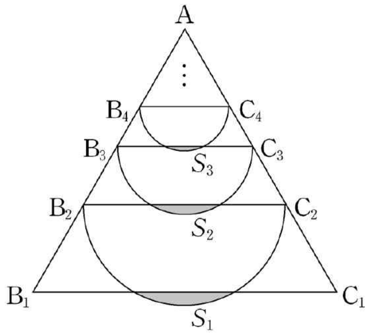


[2012년 06월 평가원 수리(가형) 12번]

12. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

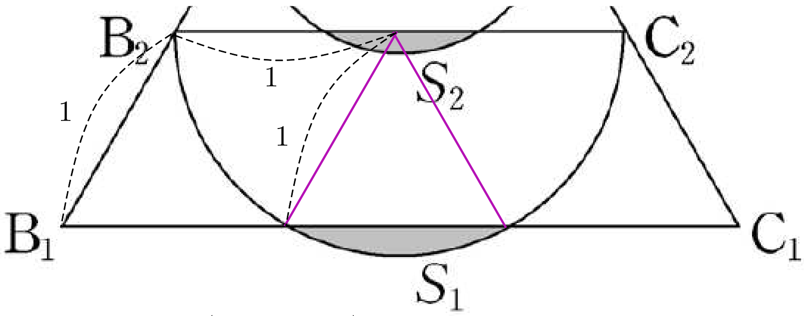
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\dfrac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\dfrac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$

④ $\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\dfrac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

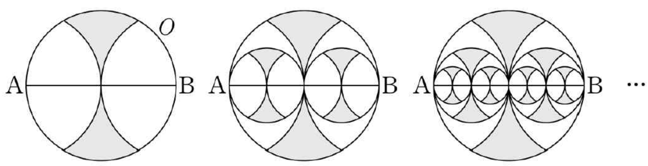
공비는 닮음비 $3:2$의 제곱으로 해결됐고, 초항만 마저 구하면 되겠네요.



$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{10}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

[2012년 09월 평가원 수리(가형) 09번]

9. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 ⧖ 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 R_3

① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

초항도 그렇고 공비도 그렇고 둘 다 구하기 쉬우니 한 번에 식을 세우겠습니다.

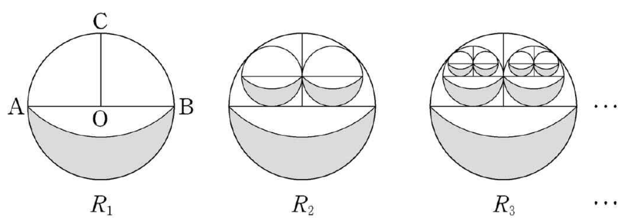
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2} = 2\left\{\pi - 4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} = 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

계산에 팁이 있다면, 복잡한 S_1을 그대로 여러번 쓰지 않고 적절히 치환을 이용하는 것과

무리수 부분을 마치 동류항 취급하여서 $\sqrt{3}$과 π에 각각 곱해진 유리수를 구하는 것입니다.

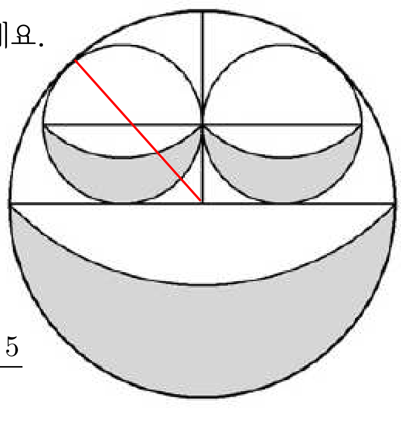
[2012년 11월 대수능 수리(가형) 14번]

14. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.
점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$　② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$　③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$
④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$　⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

초항 $S_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$이니 공비만 마저 구하면 되네요.



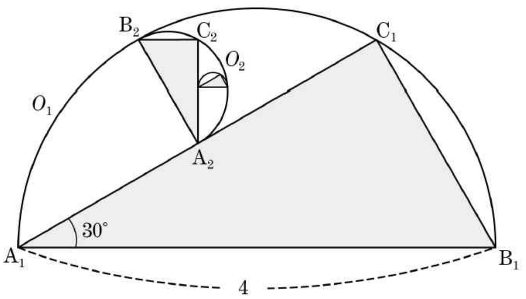
오른쪽 그림과 같은 보조선을 이용하면 두 번째 사이즈의

원의 반지름 r에 대하여 $(1+\sqrt{2})r = 1$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{r}{1}\right)^2 \cdot 2} = \frac{1}{1-2(3-2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}+5}{7}$$

[2013년 03월 교육청 수학 영역(A형) 16번]

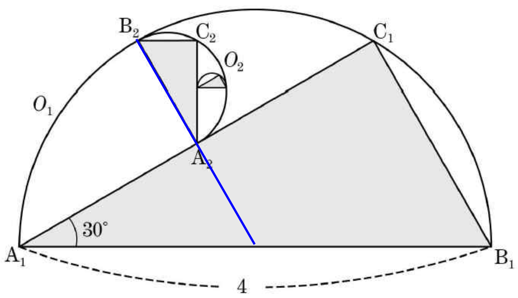
16. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1을 그리고, 반원 O_1 위에 $\angle C_1A_1B_1 = 30°$가 되도록 점 C_1을 정한다. 이때 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
선분 A_1C_1의 중점을 A_2라 하고, 호 A_1B_2와 호 C_1B_2의 길이가 같도록 점 B_2를 정한다. 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 그리고, 반원 O_2 위에 $\angle C_2A_2B_2 = 30°$가 되도록 점 C_2를 정한다. 이때 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라 하자.
선분 A_2C_2의 중점을 A_3이라 하고, 호 A_2B_3과 호 C_2B_3의 길이가 같도록 점 B_3을 정한다. 선분 A_3B_3을 지름으로 하는 반원 O_3을 그리고, 반원 O_3 위에 $\angle C_3A_3B_3 = 30°$가 되도록 점 C_3을 정한다. 이때 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2\sqrt{3}$　② $\frac{32\sqrt{3}}{15}$　③ $\frac{34\sqrt{3}}{15}$　④ $\frac{12\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{38\sqrt{3}}{15}$

보기 ① ~ ⑤번에 숨어있는 숫자 혹은 비례상수는 $15, 16, 17, 18, 19$입니다.

이 중에 오직 하나만이 답이고 나머지는 머릿수를 채우기 위해 등장한 것에 불과하죠.



이때 다음과 같은 보조선에 대하여

$\left(\frac{2-1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$이 수열 $\{S_n\}$의 공비이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{32}{15}\sqrt{3}$$

즉, $\frac{a}{1-r}$ 꼴에서 $\frac{1}{1-r}$를 계산하다보면 16이 보이므로 ②번을 향해 계산해야 합니다.

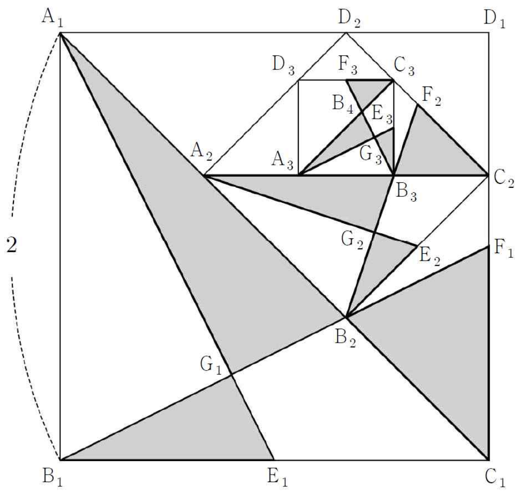
[2013년 04월 교육청 수학 영역(A형)]

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 선분 B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1E_1과 A_1C_1이 선분 B_1F_1과 만나는 두 점을 각각 G_1, B_2라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_1G_1B_2$, $B_1E_1G_1$, $C_1F_1B_2$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

점 B_2를 지나고 선분 A_1B_2에 수직인 직선과 선분 C_1D_1이 만나는 점을 C_2라 하자. 점 C_2를 지나고 선분 B_2C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 D_2라 하고, 점 D_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 두 선분 B_2C_2, C_2D_2의 중점을 각각 E_2, F_2라 하고, 두 선분 A_2E_2와 A_2C_2가 선분 B_2F_2와 만나는 두 점을 각각 G_2, B_3이라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_2G_2B_3$, $B_2E_2G_2$, $C_2F_2B_3$의 넓이의 합을 S_2라 하자.

점 B_3을 지나고 선분 A_2B_3에 수직인 직선과 선분 C_2D_2가 만나는 점을 C_3이라 하자. 점 C_3을 지나고 선분 B_3C_3에 수직인 직선과 선분 A_2D_2가 만나는 점을 D_3이라 하고, 점 D_3에서 선분 A_2B_3에 내린 수선의 발을 A_3이라 하자. 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$에서 두 선분 B_3C_3, C_3D_3의 중점을 각각 E_3, F_3이라 하고, 두 선분 A_3E_3과 A_3C_3이 선분 B_3F_3과 만나는 두 점을 각각 G_3, B_4라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_3G_3B_4$, $B_3E_3G_3$, $C_3F_3B_4$의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 삼각형 $A_nG_nB_{n+1}$, $B_nE_nG_n$, $C_nF_nB_{n+1}$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

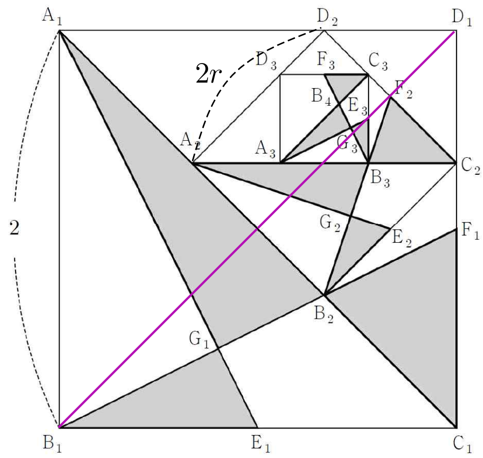


① $\frac{41}{35}$ ② $\frac{44}{35}$ ③ $\frac{46}{35}$

④ $\frac{48}{35}$ ⑤ $\frac{51}{35}$

그 흔한 곡선 하나 없는데도 2013년 통틀어 최고난도 프랙탈 문제라 해도 과언이 아닙니다.

핵심 보조선은 다음과 같습니다.



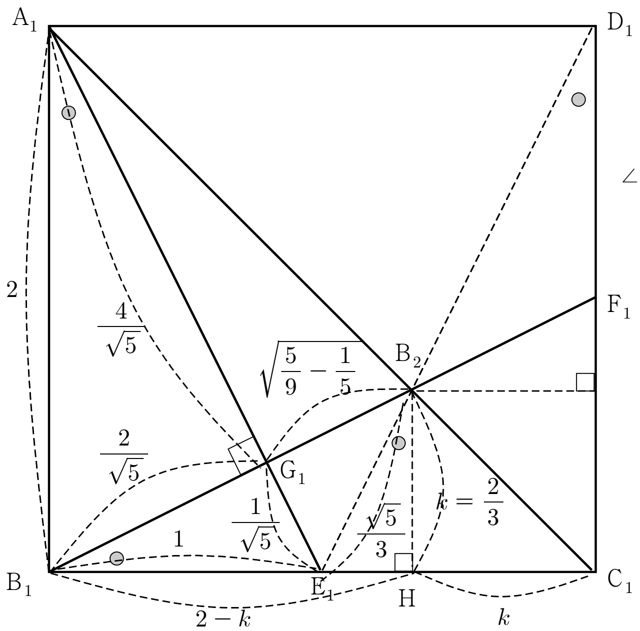
두 번째 사이즈의 정사각형 한 변의 길이를 $2r$이라 두고 보조선 길이로 등치해보면

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2r + r \rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

이므로 수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\left(\frac{2r}{2}\right)^2 = \frac{2}{9}$가 되고, 답은 $\frac{9}{7}S_1$이 됩니다.

그런데 초항이 지저분한지 ① ~ ⑤번 보기 중에 9의 배수가 안 보이네요.

최대한 $1:2:\sqrt{5}$의 직각삼각형 세 변의 길이비를 활용하여 초항을 구해봅시다.



$\overline{D_1E_1}, H$

$\downarrow$

$\angle B_1A_1G_1 = \angle E_1D_1C_1 = \angle E_1B_2H = \angle E_1B_1G_1$

$\downarrow$

$\overline{B_1G_1}, \overline{A_1G_1}, \overline{G_1E_1}$

$\downarrow$

$\overline{B_2H} = k, \overline{B_1H} = 2 - k = 2k$

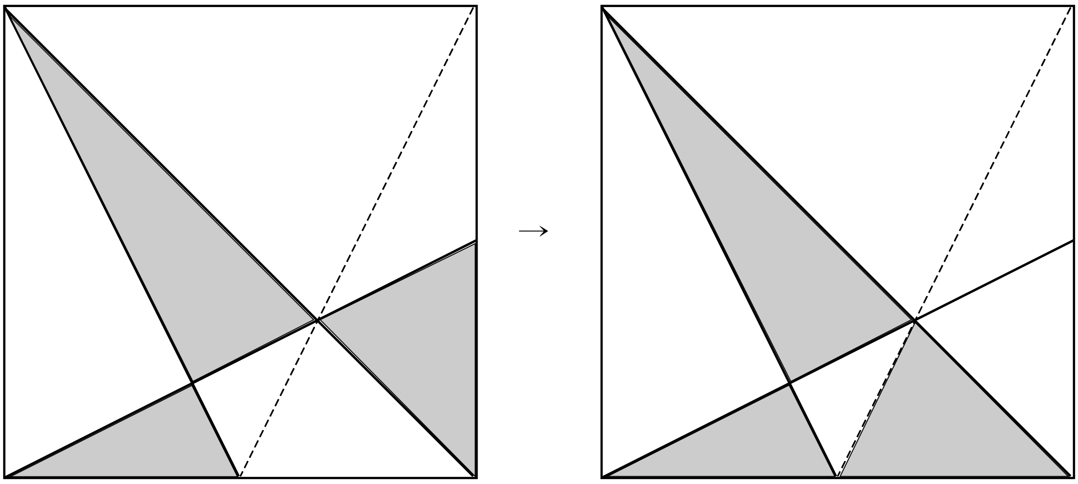
$\downarrow$

$\overline{B_2E_1}, \overline{B_2G_1}$

순으로 구할 수 있습니다.

그리고 S_1에 해당하는 어두운 영역의 넓이를 그대로 구하기 전에

$\triangle \mathrm{B_2C_1F_1} \equiv \triangle \mathrm{B_2C_1E_1}$이므로, 즉



이므로 어두운 부분의 넓이에 해당하는 값은

$$S_1 = \triangle \mathrm{A_1B_1C_1} - \triangle \mathrm{A_1B_1G_1} - \triangle \mathrm{B_2E_1G_1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{5}}$$

$$= 2 - \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{30 - 12 - 2}{15} = \frac{16}{15}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{9}{7} S_1 = \frac{9}{7} \cdot \frac{16}{15} = \frac{48}{35}$이 답이 됩니다.

사실 위 풀이는 많이 많이 생각해보고 떠올린 풀이라 실전적이라 할 수는 없습니다.

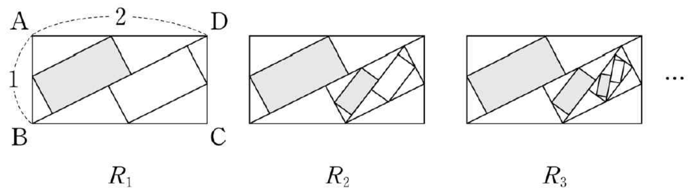
지금은 연습하는 거니까 이렇게 찬찬히 사고할 수 있는 거죠.

사실 이 문제는 ‘메넬라우스 정리’를 이용하면 더 간단하게 풀리는데,

올림피아드 준비하신 분들이나 구사할 수 있는 거라 여기고 생략하겠습니다.

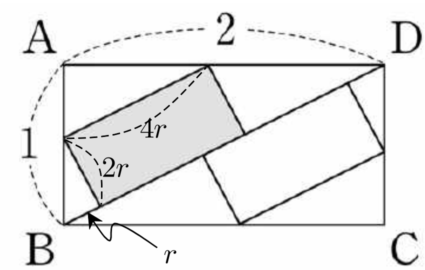
[2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 18번]

18. 직사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$이다.
그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$ ④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

$1:2:\sqrt{5}$ 의 직각삼각형 길이비를 적극 이용해서 구해보겠습니다.



$$\overline{\mathrm{AB}}=1=\sqrt{5}\,r+\frac{4r}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}r$$

에서 초항은 $S_1=8r^2=\frac{40}{81}$이므로

여기서 40을 머금고 있는 ④번이 답이라 추측 가능

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{S_1}{1-\left(\frac{4r}{2}\right)^2}=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$

[2013년 07월 교육청 수학 영역(A형) 30번]

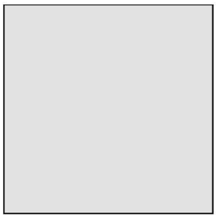
30. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R_1이라 하자. 그림과 같이 R_1의 한 꼭짓점과 정사각형 R_1의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_2라 하자.

정사각형 R_2의 한 꼭짓점과 정사각형 R_2의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_3이라 하자.

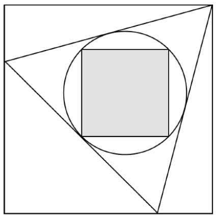
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형을 R_n이라 하자.

정사각형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a+b\sqrt{3}}{11}$이다.

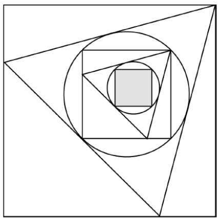
이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]



R_1



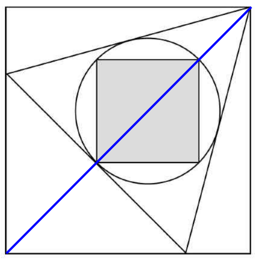
R_2



R_3

$\cdots$

공비 구하기가 까다로우나, 적당한 보조선은 이미 정해져 있으니 긋기만 하면 됩니다.



정삼각형 한 변의 길이를 $2k$라 하고 대각선 길이로 등치하면

$$\sqrt{2} = k + \sqrt{3}k \ \rightarrow \ k = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

이고 내접원의 반지름은 $\dfrac{k}{\sqrt{3}}$이므로 두 번째 정사각형의 넓이는 $\dfrac{2}{3}k^2 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이 되어

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\dfrac{2}{3}a^2} = \frac{1}{1-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}-1} = \frac{3(2\sqrt{3}+1)}{11}$$

따라서 $a+b=3+6=9$가 답입니다.

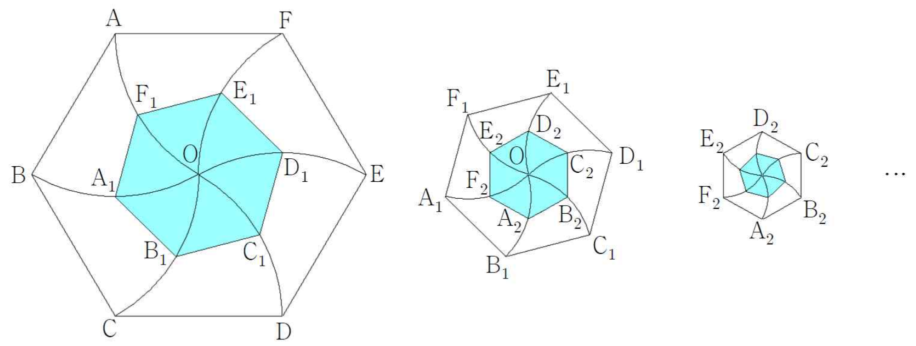
[2013년 07월 사관학교 수학 영역(A형) 18번]

18. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.

정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.

정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

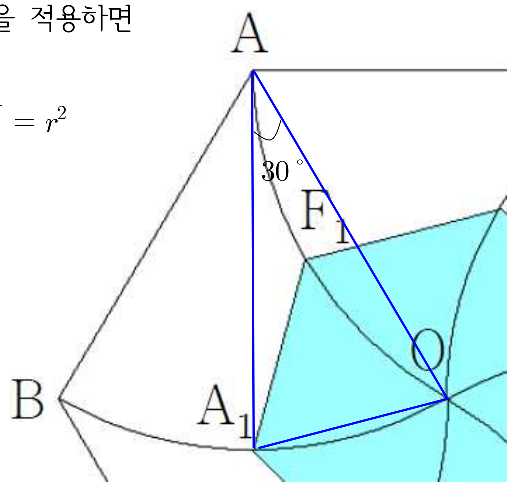


① $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{7-2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{4}$

④ $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{4}$

편의상 두 번째 크기의 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 한 변의 길이를 r이라 하겠습니다.

이때 다음과 같이 보조선을 긋고서 제이코사인법칙을 적용하면



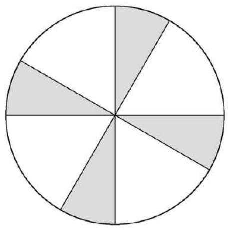
$$\overline{A_1O}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 30° = 2 - \sqrt{3} = r^2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)\times 6}{1-r^2}$$

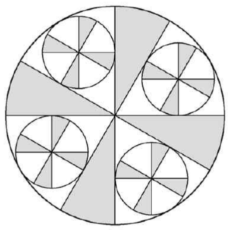
$$= \frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1} = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}$$

[2013년 09월 평가원 수학 영역(A형) 16번]

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.
[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

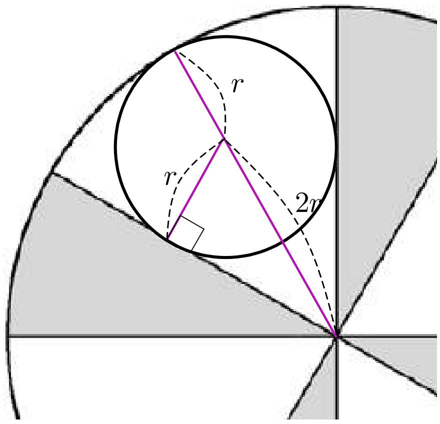
…

① $\frac{7}{15}\pi$ ② $\frac{8}{15}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{15}\pi$

$$S_1 = \pi \times \frac{\pi/6}{\pi/2} = \frac{\pi}{3} \text{ 혹은 } \frac{S_1}{4} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} \to S_1 = \frac{\pi}{3} \text{ 혹은 } S_1 = \pi \times \frac{4}{12} = \frac{\pi}{3}$$

등등 초항을 구하는 방법은 많습니다.

그러면 공비를 구해야 하는데, 다음과 같은 보조선이면 충분합니다.

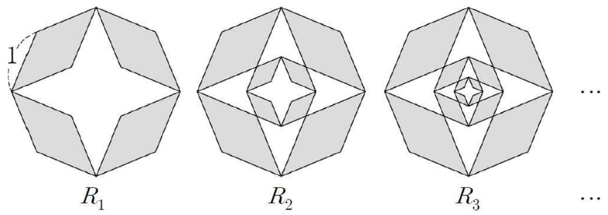


따라서 $r = \frac{1}{3}$이므로 넓이비와 개수비를 모두 고려하면

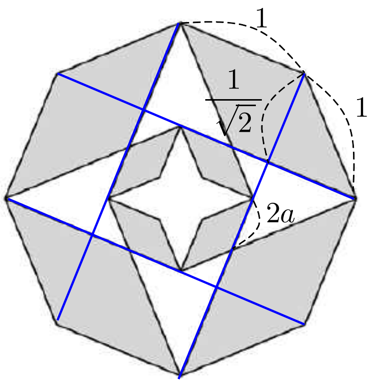
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 4} = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{3}\pi = \frac{3}{5}\pi$$

[2013년 09월 평가원 수학 영역(B형) 18번]

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$



다음과 같은 보조선을 이용하면 $S_1 = \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 4 = 2\sqrt{2}$

그리고 두 번째 크기의 마름모의 한 변 길이를 $2a$라 하면

$1 = \sqrt{2}a + 2a + \sqrt{2}a \rightarrow a = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$가 되므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-4a^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 2+\sqrt{2}$$

참고로 이 문제는 S_1을 구하는 방법이 정말 다양합니다!

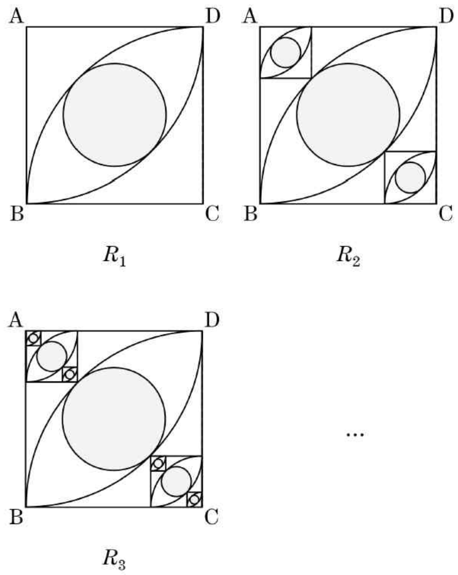
[2013년 10월 교육청 수학 영역(A형) 19번]

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 안에 꼭짓점 A, C를 중심으로 하고 선분 AB, CD를 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 두 사분원의 호로 둘러싸인 부분에 내접하는 가장 큰 원을 그리고, 그 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점 A, C로부터 두 사분원의 호와 원이 접하는 두 점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 2개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 있는 작은 두 정사각형에서 두 꼭짓점으로부터 사분원과 원의 접점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 4개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $(3-2\sqrt{2})\pi$　② $(2-\sqrt{3})\pi$　③ $(\sqrt{2}-1)\pi$
④ $(4-2\sqrt{3})\pi$　⑤ $(2-\sqrt{2})\pi$

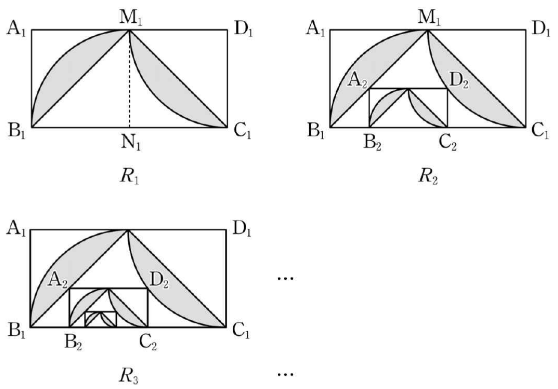
n번째에 처음 생기는 원의 반지름 r_n에 대하여 $r_1 = 2-\sqrt{2} \rightarrow S_1 = \pi r_1^2$이고

닮음비는 정사각형의 대각선 길이비로 $2\sqrt{2} : (2\sqrt{2}-2)$이므로 개수비까지 고려하면

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}\pi = (\sqrt{2}-1)\pi$$

[2013년 11월 대수능 수학 영역(A형) 17번]

17. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



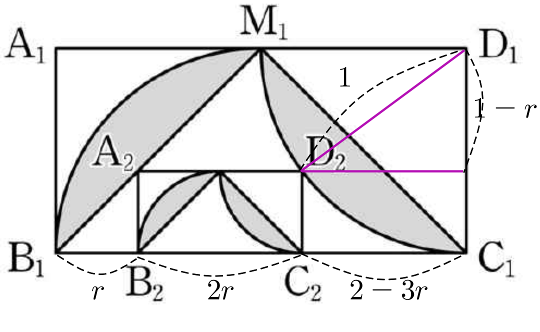
① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

일단 초항은 $S_1=\frac{\pi}{2}-1$로 어렵지 않게 구할 수 있으니 공비만 구해주면 되겠네요.

그리고 다음과 같이 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용하면

$$1=(1-r)^2+(2-3r)^2 \;\rightarrow\; r=\frac{2}{5}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{S_1}{1-r^2}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

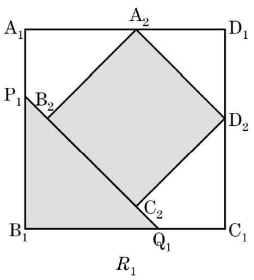


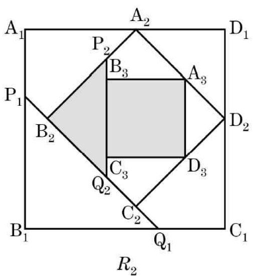
[2014년 03월 교육청 수학 영역(A형) 17번]

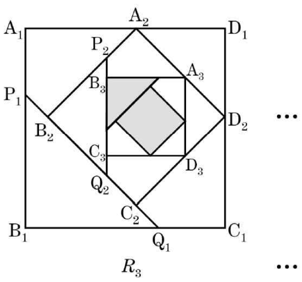
17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1을 $1:2$로 내분하는 점을 P_1, 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 Q_1이라 하자. 선분 A_1D_1 위의 점 A_2, 선분 P_1Q_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1D_1 위의 점 D_2를 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $P_1B_1Q_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 선분 A_2B_2를 $1:2$로 내분하는 점을 P_2, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 Q_2라 하자. 선분 A_2D_2 위의 점 A_3, 선분 P_2Q_2 위의 두 점 B_3, C_3, 선분 C_2D_2 위의 점 D_3을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그리고 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 내부와 삼각형 $P_2B_2Q_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

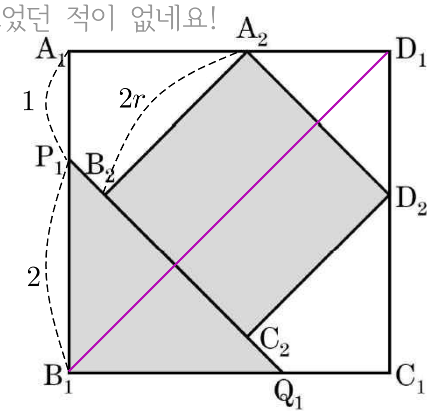






① $\frac{375}{49}$ ② $\frac{400}{49}$ ③ $\frac{425}{49}$ ④ $\frac{450}{49}$ ⑤ $\frac{475}{49}$

보조선은 대각선 B_1D_1 입니다. 정사각형에서 대각선 안 그었던 적이 없네요!



$$3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2r + r \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2+4r^2}{1-\left(\frac{2r}{3}\right)^2} = \frac{2+\frac{32}{9}}{1-\frac{32}{81}} = \frac{450}{49}$$

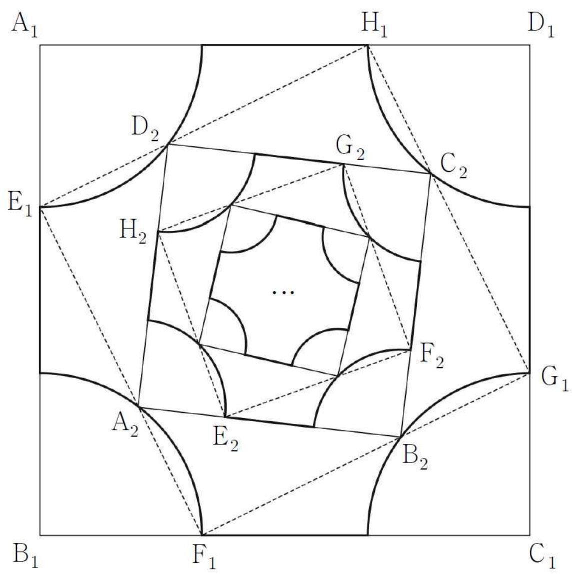
[2014년 04월 교육청 수학 영역(A형) 18번]

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 네 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 각각 $1:2$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 A_1E_1, B_1F_1, C_1G_1, D_1H_1을 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_1이라 하자.

정사각형 $E_1F_1G_1H_1$과 도형 R_1과의 교점 중 정사각형 $E_1F_1G_1H_1$의 꼭짓점이 아닌 4개의 점을 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 네 선분 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2를 각각 $1:2$로 내분하는 점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 A_2E_2, B_2F_2, C_2G_2, D_2H_2를 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_2라 하자.

정사각형 $E_2F_2G_2H_2$에서 도형 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 얻은 모양의 도형을 R_3이라 하자.

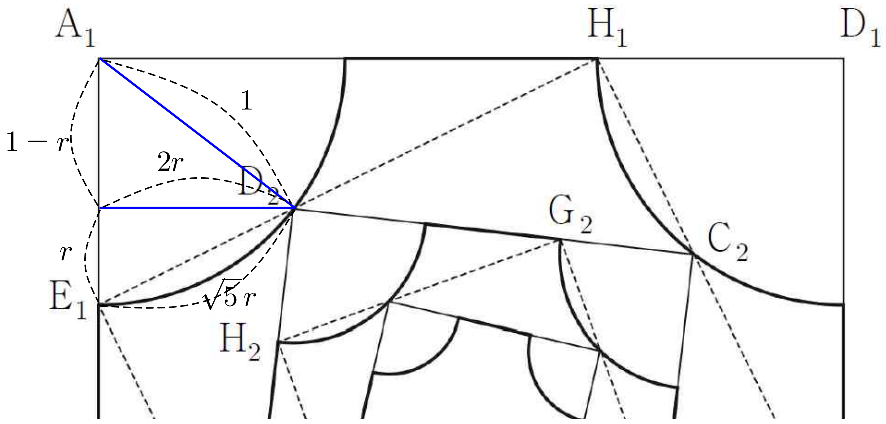
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 모양의 도형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{39}{32}(9-\pi)$ ② $\frac{5}{4}(9-\pi)$ ③ $\frac{21}{16}(9-\pi)$

④ $\frac{11}{8}(9-\pi)$ ⑤ $\frac{45}{32}(9-\pi)$

재밌는 문제네요! 일련의 계산 끝에 답을 구해도 보기 중에 안 보일 수 있습니다.



왜냐하면 삼각형 $C_2D_2H_1$의 세 변의 길이비마저 $1:2:\sqrt{5}$이 아니기 때문입니다!

만약 그렇게 두고 쭉 계산해버리면 보기 중에 답이 안 보입니다. 제 경험 ㅠㅠ

그래서 시행착오 후에 '뭐지? 문제 잘못됐나?' 하면 안 되고,

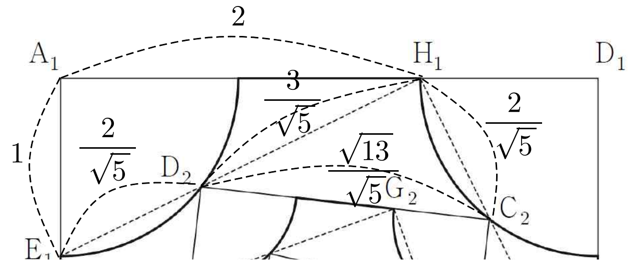
재빨리 다른 관점에서 다시 접근해야 합니다.

아니면 다른 문제를 풀고 와서 생각을 환기해도 되구요.

그래서 위와 같이 보조선을 긋고 피타고라스 정리를 적용해보면

$$1^2=(1-r)^2+4r^2 \;\rightarrow\; r=\frac{2}{5}$$

를 얻습니다.

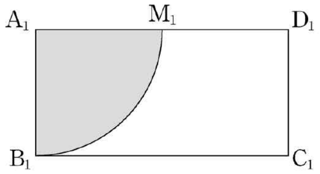


$$\therefore\; \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{S_1}{1-\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{45}{45-13}(9-\pi)=\frac{45}{32}(9-\pi)$$

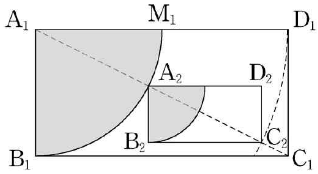
그림만 보고서 $1:2:\sqrt{5}$ 길이비인지 $2:3:\sqrt{13}$의 길이비인지 알 수 없죠!

[2014년 06월 평가원 수학 영역(A형) 18번]

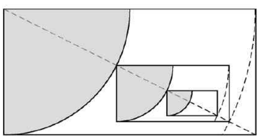
18. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



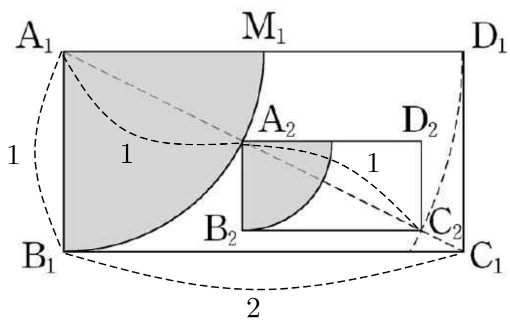
R_1



R_2


R_3 …

① $\frac{5}{16}\pi$ ② $\frac{11}{32}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{13}{32}\pi$ ⑤ $\frac{7}{16}\pi$

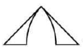


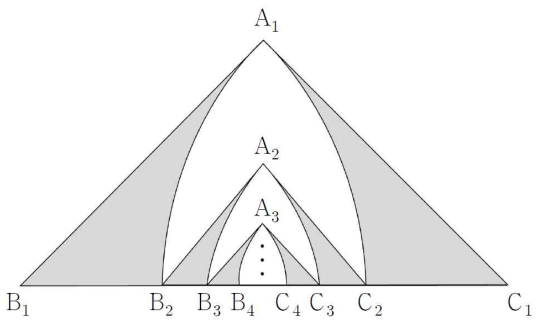
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{5}{16}\pi$$

무한급수도 아닌데 어찌 $\frac{a}{1-r}$ 공식을 쓸까요^^?

물론 당연히 받아들이고 계신 분들도 많겠지만!

[2014년 07월 교육청 수학 영역(A형) 30번]

30. 그림과 같이 길이가 4인 선분 B_1C_1을 빗변으로 하고 $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$을 그린다. $\overline{B_1A_1} = \overline{B_1C_2}$이고 $\overline{C_1A_1} = \overline{C_1B_2}$인 선분 B_1C_1 위의 두 점 C_2와 B_2에 대하여 부채꼴 $B_1A_1C_2$와 부채꼴 $C_1A_1B_2$를 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_1이라 하자.
선분 B_2C_2를 빗변으로 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 점 A_2에 대하여 $\angle B_2A_2C_2 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. $\overline{B_2A_2} = \overline{B_2C_3}$이고 $\overline{C_2A_2} = \overline{C_2B_3}$인 선분 B_2C_2 위의 두 점 C_3과 B_3에 대하여 부채꼴 $B_2A_2C_3$과 부채꼴 $C_2A_2B_3$을 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_2라 하자.
선분 B_3C_3을 빗변으로 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부의 점 A_3에 대하여 $\angle B_3A_3C_3 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다. $\overline{B_3A_3} = \overline{B_3C_4}$이고 $\overline{C_3A_3} = \overline{C_3B_4}$인 선분 B_3C_3 위의 두 점 C_4와 B_4에 대하여 부채꼴 $B_3A_3C_4$와 부채꼴 $C_3A_3B_4$를 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여
$\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a + \sqrt{b}$ (a, b는 정수)일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]



부채꼴 $A_1C_1B_2$에서 도형 $A_1B_2C_2$를 뺀 값으로서

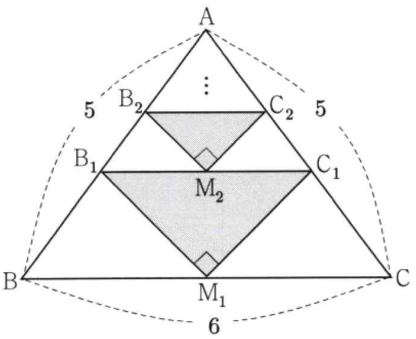
$$\frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\left\{\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\right\} = 4-\pi$$

이고, 닮음비는 $\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} = 4 : 2(2\sqrt{2}-2) = 1 : (\sqrt{2}-1)$ 이므로

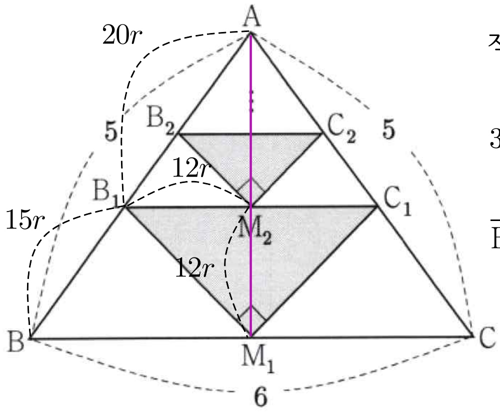
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2}{1-(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}+1 \rightarrow a^2+b^2 = 5$$

[2014년 08월 사관학교 수학 영역(A형) 17번]

17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 이등변삼각형 ABC가 있다.
선분 BC의 중점 $\mathrm{M_1}$을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$을 $\angle \mathrm{B_1M_1C_1}=90°$이고 $\overline{\mathrm{B_1C_1}} \,//\, \overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 잡아 직각삼각형 $\mathrm{B_1M_1C_1}$을 만든다.
선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점 $\mathrm{M_2}$를 잡고 두 선분 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{AC_1}$ 위에 각각 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 $\angle \mathrm{B_2M_2C_2}=90°$이고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} \,//\, \overline{\mathrm{B_1C_1}}$이 되도록 잡아 직각삼각형 $\mathrm{B_2M_2C_2}$를 만든다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{11}$ ② $\frac{48}{11}$ ③ $\frac{49}{11}$ ④ $\frac{50}{11}$ ⑤ $\frac{51}{11}$



적어도 이 문제를 푸는 순간만큼은

3 : 4 : 5와 친해져야 합니다. 머릿속에 맴돌 정도로!

$\overline{\mathrm{B_1M_2}}=12r$로 잡은 것은 분수를 피하기 위해서죠.

문제를 풀기 위해 추진력을 얻기 위함이기도 하지만

따라서 $r=\frac{1}{7}$을 얻고, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{144r^2}{1-\left(\dfrac{12r}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{144}{49}}{1-\frac{16}{49}} = \dfrac{144}{33} = \dfrac{48}{11}$

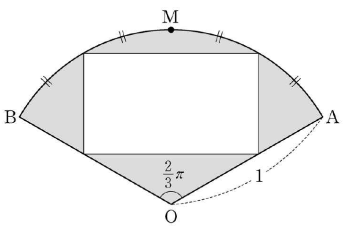
혹은 $\overline{\mathrm{AM_1}}=\overline{\mathrm{AM_2}}+\overline{\mathrm{M_2M_1}}$에 대한 식을 통해서도 구할 수 있습니다.

풀이가 다양한 대표적인 문제이니 다른 해법들도 생각해볼 가치가 있는 문제입니다.

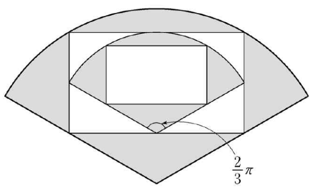
[2014년 09월 평가원 수학 영역(A형) 18번]

18. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



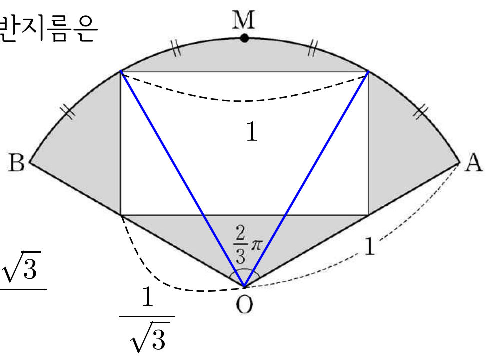
$\vdots$ $\vdots$

① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

직사각형의 세로 길이이자 두 번째 사이즈의 부채꼴 반지름은

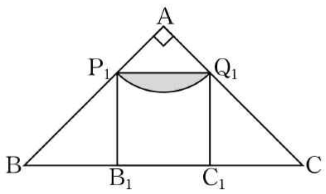
$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{S_1}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

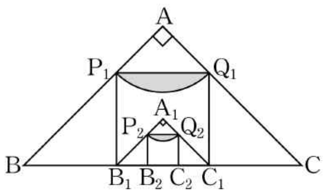


[2014년 10월 교육청 수학 영역(A형) 18번]

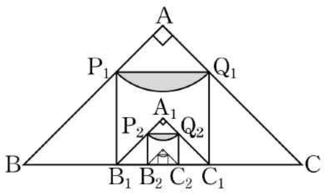
18. 빗변 BC의 길이가 2인 직각이등변삼각형 ABC가 있다.
그림과 같이 삼각형 ABC의 직각을 낀 두 변에 내접하고 두 점 B_1, C_1이 선분 BC 위에 놓이도록 정사각형 $P_1B_1C_1Q_1$을 그린다. 중심이 A, 반지름의 길이가 $\overline{AP_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 AP_1Q_1을 그린 후 부채꼴 AP_1Q_1의 호 P_1Q_1과 선분 P_1Q_1로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 F_1이라 하자.
그림 F_1에 선분 B_1C_1을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$을 그리고, 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$에서 그림 F_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어 지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 F_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 F_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



F_1



F_2



F_3

⋯

⋯

① $\frac{5(\pi-2)}{16}$ ② $\frac{\pi-2}{4}$ ③ $\frac{3(\pi-2)}{16}$
④ $\frac{\pi-2}{8}$ ⑤ $\frac{\pi-2}{16}$

가장 큰 크기의 정사각형의 변 P_1Q_1의 길이를 $2k$로 잡고 $\overline{AB}$를 k에 대해 나타내면

$$\sqrt{2} = 2\sqrt{2}k + \sqrt{2}k = 3\sqrt{2}k \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{k^2}{2}\pi - k^2}{1-\left(\frac{2k}{2}\right)^2} = \frac{9}{8}\left(\frac{\pi-1}{9}\right) = \frac{\pi-1}{8}$$

그리고 대망의 2015학년도 대수능에서는 이 유형의 문제가 나오질 않았습니다 ㅠㅠ

[2014년 11월 대수능 수학 영역(B형) 07번]

7. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [3점]

① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{83}{8}$ ③ $\frac{85}{8}$ ④ $\frac{87}{8}$ ⑤ $\frac{89}{8}$

이제 마지막 유형을 다루고 이 글을 마치겠습니다.

사설에는 그래도 자주 등장하는 편인데

우리가 다루고 있는 시험들(수능, 평가원, 교육청, 경찰대, 사관학교)

중에서는 많이 안 나왔습니다.

바로 공비가 음수인 경우입니다!

어떠한 프랙탈을 완성하기 위해서 더하고 빼고를 반복하며 취하는 것입니다.

무한등비수열의 관점에서

$$a - ar + ar^2 + ar^3 - ar^4 + ar^5 - \cdots = \frac{a}{1+r} \qquad 0 < r < 1$$

로 볼 수도 있고,

혹은 두 항씩 묶어서 일반적인 경우로 볼 수도 있습니다.

$$(a-ar) + (ar^2 - ar^3) + (ar^4 - ar^5) + \cdots$$

$$= b + bs + bs^2 + \cdots = \frac{b}{1-s} \qquad 0 < s < 1$$

[2009년 04월 교육청 수리(가형) 25번]

25. 원에 다음 과정을 실행한다.

> [과정]
> Ⅰ. 원의 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡는다.
> Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다.

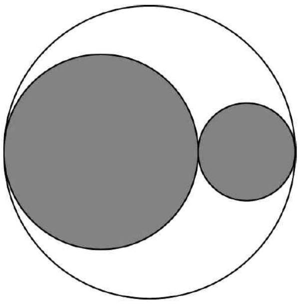
이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자.

그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자.

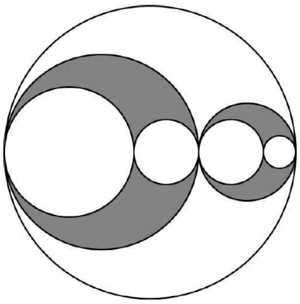
그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자.

그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자.

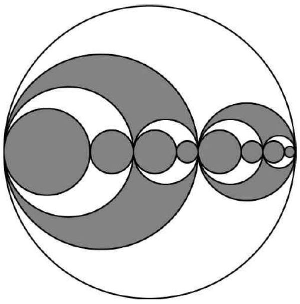
이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.) [4점]



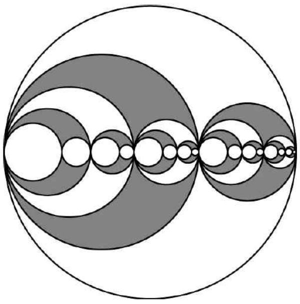
C_1



C_2



C_3



C_4

• • •

ㅇㅇ?

C_1에서 등장하는 어두운 원들의 넓이는 그대로 더하고,

C_2에서 등장하는 흰색 원들의 넓이는 그대로 빼고,

C_3에서 등장하는 어두운 원들의 넓이는 그대로 더하고,

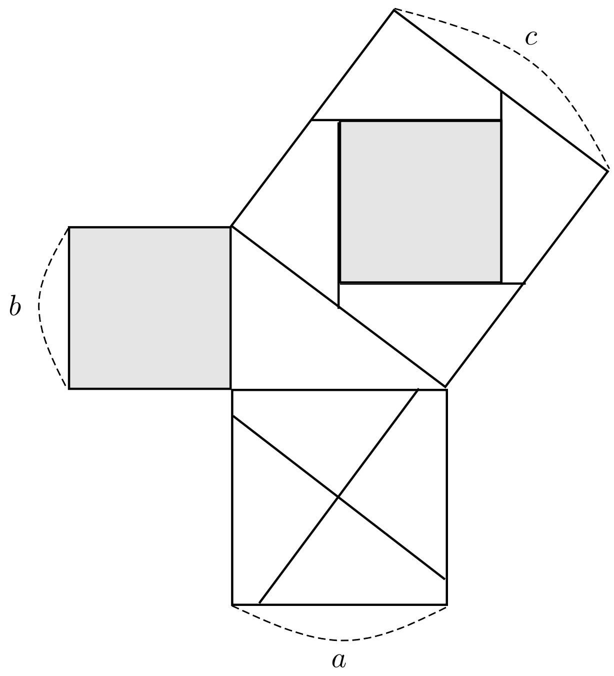
C_4에서 등장하는 흰색 원들의 넓이는 그대로 빼고,

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$ $\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

이때 고작 C_2에서 등장하는 일곱 종류나 되는 원들의 반지름을 하나하나 구하려면

부들부들 남은 시계를 바라보며 망설이게 됩니다.

하지만 이 난관을 헤쳐나갈 수학적 아이디어는, 다름 아닌 피타고라스 정리입니다.



즉, $a^2+b^2 \rightarrow c^2$로 본다면

C_1에서 $3^2 \cdot \pi \rightarrow (2^2+1^2)\pi$로 [과정]을 한 번 거치면서 넓이 비율이

$\dfrac{2^2+1^2}{3^2}=\dfrac{5}{9}$로 감소하였습니다.

C_1에서 나타나는 반지름이 각각 $2, 1$인 두 개의 어두운 원을 하나로 합치면

$\dfrac{2^2+1^2}{3^2} = \dfrac{5}{9}$에서 보듯 반지름이 $\sqrt{5}$인 원 하나로 생각할 수 있죠.

C_2에서 일어나는 [과정]은 결국

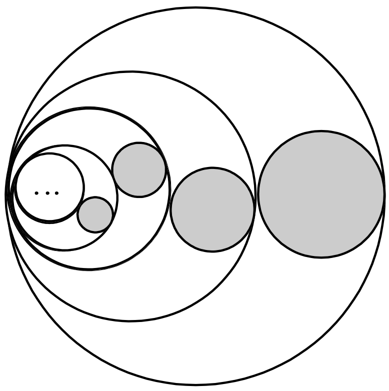
반지름이 $\sqrt{5}$인 원 하나에 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡아서

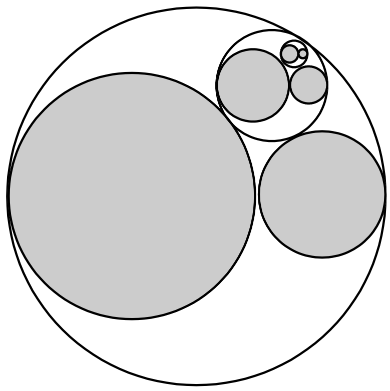
원을 두 개 그려넣는 것으로 이번에는 빼야 합니다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 5\pi - \frac{25}{9}\pi + \frac{125}{81}\pi - \cdots = \frac{5\pi}{1-\left(-\dfrac{5}{9}\right)} = \frac{45}{14}\pi$가 되어

$p+q=59$가 나옵니다.

유사품으로 다음과 같이 얼마든지 추가적인 조작을 가할 수 있습니다.





이걸로 끝입니다 ㅎㅎ

이젠 자신감 충전 되셨나요?