수열: 사고과정

수능에서 어렵게 출제될 ‘수열’ 단원에 대한 제 사고과정을 담은 글입니다. 수능 수준의 문항들을 다수 출제하고 현재 유명 강사님들에게 문항 제공을 하고 있는 저의 시각이 큰 도움이 될 것입니다.

현재 수능에서 수열은 공통 4점짜리 10문항 중 2~3문항이 출제될 정도로 큰 비중을 차지합니다. 또한 올해 6평에서도 12, 13, 15번에 출제될 정도로 상당히 고난도로 배치되었죠. 그래서 수열을 잘하는 것이 결국 공통문항을 잘 푸는 것이라 할 수 있습니다.

수열 관련 기출문제와 그 풀이를 통해 여러분이 수열 문제를 바라보고 떠오르셔야 할 사고들을 정리했습니다. 단순히 ‘등차수열은 직선으로 바라볼 수 있다’ 수준의 다 아는 내용이 아닐 겁니다. 4점짜리로 난이도있게 출제될 수 있는 내용 위주로 얘기하고, 어렵게 출제되는 파트인 ‘수열의 귀납적 정의(15번에 자주 출제되는 그 파트입니다. 편의상 ’미지의 수열‘ 파트라고 할게요.)’ 파트 위주로 설명드릴 겁니다.

그리고 저의 신규 자작 문제들도 실었습니다. 제대로 이해했는지 체크하는 것에 큰 도움이 될 것입니다. 또한, 가능하면 메가스터디 큐브에서 제가 과거에 썼던 학습 자료들 보러오세요. 많이 도움 될 것입니다.

바로 시작할게요.

1) 등차수열, 등비수열

사실 이 두 수열은 너무나도 단순합니다. 등차수열이든 등비수열이든, 2개의 조건을 알아낸다면 바로 결정이 됩니다.

예를 들어, 등차수열이든 등비수열이든

1) 두 항을 안다.

2) 한 항을 알고 공차(공비)를 안다.

1) 또는 2)가 성립한다면 바로 알아낼 수 있죠.

그래서 사실 여기서는 문제 어렵게 내기 쉽지 않아요. 그래서 평가원이 이 파트를 어렵게 내기 위해 주로 활용하는 '3가지 수단'이 바로

1) 절댓값
2) 정수 조건
3) 미지수 m 도입

입니다. 사실 이 3가지는 '미지의 수열' 파트에서도 애용됩니다.

하나하나 차근차근 얘기드리죠.

1) 절댓값 조건

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$

④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

올해 6평 12번입니다.

절댓값이 문제를 어렵게 보이게 하고 있죠.

절댓값 문제를 보신다면 크게 2가지를 생각하시면 되는데요.

1) 케이스 분류
2) 절댓값 자체가 0이상

이 두 가지만 잘 생각하신다면 절댓값을 두려워하실 이유는 없습니다.

이 문항을 잠깐 설명드린다면, 우선 (가) 조건을 이용해서 1~5번째까지의 항과 7번째 이후의 항들의 부호를 결정할 수 있죠. (6번째는 아직 모름)

그러고 나서 (나) 조건에 있는 절댓값들을 a_6을 제외하고는 전부 풀어해칠 수 있죠. 결과적으로 $a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$이라는 식이 나오는데, 여기선 그냥 $a_6 \geq 0$과 $a_6 < 0$으로 케이스 분류하면 되는 거겠죠?

2) 정수 조건

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

작년 9평입니다. 대표적인 정수 조건 문제이기도 하고, 제가 말한 '3가지 수단'이 다 사용되는 문항입니다.

여러분들은 정수 조건을 보시면 바로

'아 결국 케이스 분류 하겠구나.'

라는 생각이 먼저 드셔야 합니다.

문제를 보자면, 저희는 이미 첫째항이 음수이고 공차는 양수인 것을 알기에 (가)에서 $a_m + a_{m+3} = 0$으로 결정시킬 수 있다는 것을 압니다. 그러면 하나의 부정방정식이 나오겠죠? 그러면 가능한 케이스들이 몇 가지가 나옵니다.

그런 이후에 (나)는 어떤 의미일까요? '앞에서 구한 케이스들 중 몇 개는 배제해라'라는 거겠죠? 참고로 말씀드리자면 등호를 포함하지 않는 부등식은 케이스 분류를 위한 것이 대부분입니다.

3) 미지수 m도입

등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2+a_3=159$
(나) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$인 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k=425$ (단, $m>3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

이건 2018년 4월 교육청 문제인데요.

비교적 쉬워서 문제 자체에 대해서 얘기하기보다는 부가적인 얘기를 하려 해요.

어쨌든 이 문항도 m이라는 미지수를 도입한 4점짜리 문항인데, 한 번 잘 생각해봅시다.

원래 등차수열을 결정하기 위해선 몇 가지 조건을 알아야 했죠? 2개였죠?

그런데 여기선 몇 개의 조건을 줬나요? (가)에서 한 개, (나)에서 $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$랑 $\sum_{k=1}^{m} a_k=425$인 2개,

총 3개네요?

이건 결국 미지수 m이라는 것을 도입해서, 저희가 알아내야할 것이 하나 늘어서 그런 겁니다. 즉, m이 새로 도입되었다면, 여러분들은 문제에서 총 3개를 알아내야지 그 등차수열을 결정할 수 있는 것이겠죠.

2) 미지의 수열

본격적으로 제가 이 칼럼을 쓴 목적인 ‘미지의 수열’ 파트를 설명해드리고자 합니다. 보통 15번으로 나오는 그 부분 맞습니다.

사실 수열은 ‘이런 유형이 나온다’라고 딱 잘라서 말할 수 없을 정도로 다양한 모습으로 출제될 가능성이 높은 파트입니다. 그래서 많은 강사분들이 여러분에게 요구하는 것은 바로 ‘나열’입니다. 주어진 수열의 규칙에 따라 항들을 계속 나열해서 규칙성을 찾아내 문제를 풀어내는 방식을 말합니다.

저는 ‘나열’에 대해 비관적인 시각을 가지고 있지 않습니다. 애초에 제가 작년이나 제작년에 메가스터디 큐브에서 썼던 칼럼을 확인해보신다면, 오히려 저도 ‘나열’을 장려했고 현재도 ‘나열’이 정석이라고 생각합니다.

하지만 학생분들께서 ‘나열하는 목적’에 대해 오해를 하고 계신 경우가 많습니다. ‘나열’은 어디까지나 ‘규칙성’을 찾아내기 위한 활동입니다. 이미 규칙성이 보인다면 나열할 이유는 하나도 없죠. 가끔 ‘수열 15번은 그냥 무지성 나열만 하면 해결된다.’라고 생각하시는 분들을 보았는데, 글쎄요. 저는 애초에 목적없이 무지성으로 ‘나열’하는 행위 자체가 안정적이지도 않고, 평가원이 무지성 나열로는 해결하기 어려운 수열 문제를 낼 수도 있기에 조금 개선할 여지가 있다고 생각합니다.

지금부터는 다양한 ‘미지의 수열’들의 예시를 보여드리며, 여러분께서 생전 처음보는 수열을 바라볼 때 당황하지 않도록 도와드릴 겁니다. 앞에서도 언급했듯이, 15번 수열은 정말 다양한 형태로 출제될 수 있습니다. 그렇다고 해서 지나치게 발상적이거나, 듣도보도 못한 녀석이 나오진 않을 겁니다. 그렇기에, 제가 제시하는 다양한 수열들의 예시와 그것을 바라보는 시각이 정말 도움이 될 겁니다.

1. a_{n+1}과 a_n의 관계로 주어진 수열

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{n \times a_n}{2} & (n \times a_n \text{이 짝수}) \\ 2a_n + 1 & (n \times a_n \text{이 홀수}) \end{cases}$$

이다. $a_8 - a_4 < 100$일 때, $\sum_{n=1}^{4} a_n$의 최댓값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

지인선 N제 99번

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72

④ 76 ⑤ 80

2022 예비시행 15번

정말 자주 출제되는 형태의 수열이죠. 이런 형태의 수열에서 중요한 점은 제약 조건입니다. 위의 문제에선 $n \times a_n$의 홀짝여부, 아래의 문제에선 a_n의 부호겠죠?

저 제약조건에 따라, a_n이 결정되면 그 다음 항인 a_{n+1}이 유일하게 결정이 됩니다. 여기서 중요한 지점은

‘a_m이 결정된다면 그 이후의 항들인 $a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots$은 모두 확정된다.’

입니다. 그래서 아래의 문제(예비시행)에서 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최대와 최소의 차이를 구하라고 할 수 있는 거겠죠? 어차피 $a_5 = 5$라서, a_6이후는 직접 구하지 않아도 정해져 있다는 것을 아니까요.

다만, 이것도 중요하죠.

‘a_m이 결정된다고 해서, $a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots$ 같은 앞의 항들이 결정되는 것은 아니다.’

즉, 위와 같은 수열들은 규칙이 2개라서, a_m이 주어져 있을 때 가능한 a_{m-1}이 여러 개일 수도 있죠. 물론 유일하게 결정될 수도 있지만요.

그래서 이럴 때 여러분이 하시는 행위는 ‘역추적’이라 불리는 그것입니다. a_m이 주어졌을 때 각 제약조건을 만족하는 가능한 a_{m-1}들을 찾아내는 과정이죠.

마지막으로 이 파트를 끝내기 전에 정말로 중요한 얘기 하나만 하겠습니다. 위의 두 문제에서 제약조건은 각각

$(n \times a_n$이 짝수$)$

$(n \times a_n$이 홀수$)$

이것과

$(a_n \geq 0)$

$(a_n < 0)$

이것이었는데요.

두 조건의 가장 큰 차이가 무엇일까요?

바로, 전자는 수열이 몇 번째 항인지도 중요하지만, 후자는 몇 번째 항인지 상관없이 a_n이라는 값 자체에 따라서 a_{n+1}이 결정된다는 것입니다.

무슨 말인지 선뜻 이해가 가지 않으실 수도 있어서 예시를 들어 설명드려볼게요.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이 수열에서 $a_3=5$라고 해봅시다. 그러면 그 다음 항의 값은 당연히 -1입니다. 그런데 만약 $a_3=5$가 아니라 $a_6=5$라고 해보죠. 그래도 그 다음 항은 앞에서 구한 것처럼 -1입니다. 세 번째 항이든 여섯 번째 항이든, a_n이라는 값 그 자체에 따라만 다음 항이 결정됨을 알 수 있어요.

그런데 다음 수열에서는

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{n\times a_n}{2} & (n\times a_n\text{이 짝수}) \\ 2a_n+1 & (n\times a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

여기서 $a_3=5$라고 해봅시다. 그러면 그 다음 항은 11입니다. 왜냐하면 3×5는 홀수이기 때문이죠.

근데 만약 $a_6=5$라고 해봅시다. 그럼 그 다음 항은 11일까요? 아니죠? 이 때에는 $6\times5=30$ 즉 홀수이기에, 다른 규칙을 사용해서 15가 그 다음 항이 됩니다.

즉, 만약 미지의 수열의 제약 조건이 a_n으로만 이루어져 있다면, 그 수열은 오직 a_n의 값에 따라서만 a_{n+1}이 결정된다는 것입니다. 이것이 왜 중요하냐면, 오직 a_n의 값에 따라 a_{n+1}이 결정되는 수열은 보통 주기수열이 되기 때문입니다. 앞의 수열에서

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

$a_5 = 5$라면, $a_6 = -1$이고, $a_7 = 5$입니다. 즉, $5, -1, 5, -1, ...$이 반복되겠죠.

즉, 주기수열이 됨을 알 수 있습니다. 이 부분은 뒤에서도 다시 한 번 얘기할게요.

2. 세 개의 항의 관계로 주어진 수열

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

(2021학년도 9평 나형 21번)

112 □□□

수열 $\{a_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 방정식

$$(x-a_{n+1})(x^2-3x+a_n)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 a_{n+2}일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

$n \ge 3$에서 $a_n=a_{n+1}$이다.

① $\frac{23}{4}$　② $\frac{95}{16}$　③ $\frac{49}{8}$　④ $\frac{101}{16}$　⑤ $\frac{13}{2}$

(지인선 N제 112번)

세 개의 항의 규칙을 통해 정의된 수열도 충분히 나올 수 있습니다.
두 가지 정도 포인트가 있는데요, 첫 째로 이 수열의 경우엔 하나의 항을 안다고 해서 그 이후의 항을 결정할 수는 없습니다.

예를 들어, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$이라는 규칙이 있을 때, $a_1=1$을 안다고 한들, 다른 항을 모른다면 수열을 결정할 수 없습니다.

그래서 위의 21학년도 나형 9평 수열 문제의 경우도 항을 2개 준거죠?

그리고 세 개의 항의 관계로 주어진 수열의 경우엔, 규칙을 발견하기엔 너무 복잡합니다. 물론 항들을 일일이 나열해보거나 다른 추가적인 규칙으로, 위의 지인선 N제 112번같이 쭉 상수가 나오거나 주기를 띄도록 설정이야 할 수 있겠지만, 보통의 경우엔 규칙을 찾는다기보다는 케이스 분류와 특정 항의 결정으로 끝나는 경우가 대부분일 겁니다. 결국 이런 문제들은 역추적하는 것이 하이라이트일 확률이 크죠.

3. 두 가지 규칙

수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\frac{a_8}{a_1}$의 값은?

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

(2021학년도 수능 가형 21번)

100 □□□

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(2a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

$\{n \mid a_{n+1} < a_n$이고$n < 10\}$의 모든 원소의 합은 10이다.

$a_3 + a_7 = -\frac{3}{8}$일 때, $a_{10} - a_1$의 최댓값은? [4점]

① 13 ② $\frac{107}{8}$ ③ $\frac{55}{4}$ ④ $\frac{113}{8}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

(지인선 N제 100번)

점화식을 두 개 주는 경우도 많습니다. 이런 문제에서 여러분이 하셔야 할 것은, 주어진 2가지 규칙 중 어느 것을 적용해야 할지 알아내는 것입니다.

사실 첫 번째 문제의 경우엔, 어느 규칙을 적용할지 바로 보이실 겁니다. 왜냐하면 a_{2n}, a_{2n+1} 즉 홀짝에 따라 적용할 규칙이 달라지기 때문에 단순히 따라가기만 하면 되죠. 그래서 별다른 제약 조건이 없습니다.

다만 두 번째 문제는 살짝 어렵죠. 주어진 2가지 규칙을 모두 적용할 수 있기 때문에, 고려해야할 경우의 수가 아주 많아집니다. 다만 그렇기 때문에 부가적인 조건을 더욱 주겠죠? 정수 조건이든, 값에 대한 조건이든...

제가 여러분에게 바라는 점 하나를 얘기하면, 여러분이 나열을 하시잖아요? **근데 나열하는 양이 많아지기만 할 뿐 규칙성을 파악하시지 못한다면, 잠깐만이라도 멈추시고 다시 문제를 바라보셔야 합니다**. 그런 때는 보통 여러분께서 뭔가 놓치고 계신 거에요.

위의 지인선 N제 100번의 경우에도, 저 주어진 규칙에서 a_n의 부호 변화가 3과 7사이에서 한 번만 일어나고, a_n의 부호에 따라 증가 감소가 확정될 수도 있다는 일반적인 사실을 캐치하지 못한다면 고전했을 문제입니다. 큰 그림을 보지 못하고 무지성 나열했다면 시간은 확실히 오래 걸렸을 겁니다.

4. 주기수열

주기수열 문제를 생각하실 때, 보통 $a_{n+5}=a_n$과 같이 직접적으로 규칙을 제시하는 형태만 떠올리실 수도 있습니다. 그런데 이런 경우엔 문제가 쉽겠죠? 그래서 다음과 같은 변형을 가할 수도 있습니다.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+8}=a_n$
(나) $a_{n+4}=2-(a_n)^2$
(다) 어떤 양수 m에 대하여 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < m$ 이다.

$\sum_{k=1}^{64} \log_2 |a_k|$의 값을 구하시오. [4점]

(지인선 N제 102번)
이 문제에선 우선 8이라는 주기가 있고, 그 내부에 4칸 띄워져 있는 항들의 관계가 제시되어 있죠.

저 두 식을 적절히 조합해서 각 항으로서 가능한 녀석들의 조합을 알아낸 후에, (다) 조건이 성립하도록 확정지어주면 되는 문제입니다. 명시적으로 주기가 주어져 있지만 나름 어려운 문제입니다.

주기가 명시적으로 주어지지 않은 경우도 많습니다. 대표적인 문제가 올해 6평이죠?

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

(2023학년도 6평 15번)

104 □□□

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \ge 0) \\ 7 + 2a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$과 2이상의 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_n = m$인 100이하의 자연수 n의 개수는 30이다.
(나) $a_{m+1} = \dfrac{m}{2} + 1$

a_{m-1}의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $\frac{41}{8}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{43}{8}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{45}{8}$

(지인선 N제 104번)

위의 문항들은 겉으로는 주기수열인지 아닌지 보이지 않습니다. 하지만 결국 주기가 있다는 것을 발견해야 쉽게 해결할 수 있죠.

6평 15번이든 제 문제든, 결국 a_n의 값에 따라서만 다음 항이 결정된다는 것에 주목해주세요. 이것이 주기수열을 의심해볼 근거입니다.

6평 15번에서는 $a_1 = 0$이고, $k = 1$이라면(직접 대입해보기) $a_4 = 0$이 되고 그 이후에는 a_n에 따라서만 다음 항이 결정된다는 점에서 $a_7 = a_{10} = ...a_{22} = 0$이라는 것을 체크하셔야 했습니다.

그리고 밑의 지인선 N제 104번의 경우에는 $a_n = m$이 되도록 하는 n이 30개라는 점에서, 그리고 a_n의 값에 따라서만 a_{n+1}이 결정된다는 점에서 주기수열을 의심하셔야 했죠.

3) 신규 자작문항

수열 파트의 제 신규 자작 문항을 올려드리겠습니다. 점검의 차원에서 풀어보시면 좋을 거에요!

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+3}=2a_n-1$이다.

$4a_1+2a_5+a_9=7$일 때, $\sum_{k=1}^{12} a_k$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}+(-1)^n\times a_n$은 일정하다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k=52$일 때, a_6의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

3. 첫째항이 음수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_1 \times a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다. $a_4+3a_1=0$일 때, $a_m=0$을 만족시키는 100이하의 자연수 m의 개수는? [4점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

4. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(2a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$$

이다. $a_3=1$이고 $2a_1+a_6<0$일 때, a_2+a_7의 값은? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10