충돌 변환을 이용한 연속 충돌의 계산

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 충돌의 수식적 표현

질량이 각각 m_1, m_2인 두 물체가 일차원상에서 탄성 충돌을 한다고 가정해보자. 이때 에너지와 운동량이 각각 보존되므로 각 물체의 초기 속도를 각각 v_1, v_2, 나중 속도를 각각 $v_1{}', v_2{}'$이라 하면 다음이 성립한다. (이때 속도는 벡터가 아닌 부호를 고려한 속력으로 생각한다.)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1{}'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2{}'}^2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}' \end{cases}$$

이 두 식을 연립하면 $v_1{}', v_2{}'$을 각각 m_1, m_2, v_1, v_2에 관한 식으로 표현할 수 있다. 하지만 모든 충돌에서 에너지가 보존되는 것은 아니고, 에너지가 손실되는 경우 처음 상대속도와 나중 상대속도의 비율로 정의되는 반발계수 e를 이용하여 충돌 후의 모습을 기술할 수 있다. 에너지 보존 식 대신 반발계수의 정의 $e = \dfrac{v_2{}' - v_1{}'}{v_1 - v_2}$을 운동량 보존 식과 연립하면 탄성 충돌의 경우까지 포함하는 일반적인 충돌을 기술할 수 있고, 이때 나중 속도 $v_1{}', v_2{}'$은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{cases} v_1{}' = \dfrac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2{}' = \dfrac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

이때 초기 속도 (v_1, v_2)가 어떠한 변환에 의해 나중 속도 $(v_1{}', v_2{}')$으로 변한 것으로 해석할 수 있고, 충돌의 전 과정에서 각 물체의 질량이 보존된다고 가정하면 위 관계식을 다음의 행렬 표현으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} v_1{}' \\ v_2{}' \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - em_2 & (1+e)m_2 \\ (1+e)m_1 & m_2 - em_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

즉, 한 번의 충돌이 발생할 때 위와 같은 행렬로 정의되는 일차변환이 적용되어 나중 속도가 도출되는 것이다. 일차원 상의 충돌만 다룰 것이므로, 이를 충돌 변환이라고 하자.

충돌 변환은 일차변환이므로, 일반적인 일차변환과 동일하게 다룰 수 있다.

Ⅱ. 충돌 행렬의 개요

우선 질량 m_1, m_2에 대한 충돌 변환을 나타내는 행렬을 $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$라 쓰자.
$\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 행렬식은

$$\det(\Omega_{(m_1,\, m_2)}) = \frac{(m_1 - em_2)(m_2 - em_1) - (1+e)^2 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} = -e$$

이고, $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 역행렬은

$$\Omega^{-1}_{(m_1,\, m_2)} = -\frac{1}{e}\begin{pmatrix} m_2 - em_1 & -(1+e)m_2 \\ -(1+e)m_1 & m_1 - em_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} em_1 - m_2 & (1+e)m_2 \\ (1+e)m_1 & em_2 - m_1 \end{pmatrix}$$

이다. 이를 통해 충돌 후의 속도가 주어졌을 때 충돌 전의 속력을 역으로 알아낼 수도 있다. 이제 $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 고윳값을 구해보자. $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 특성다항식은

$$p(x) = x^2 + (e-1)x - e = (x-1)(x+e)$$

이므로 $p(x)$의 두 영점은 1과 $-e$이고 이는 $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 두 고윳값이다. 또한 고윳값 λ에 대하여

$$\frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} m_1 - em_2 & (1+e)m_2 \\ (1+e)m_1 & m_2 - em_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로 $\lambda = 1$, $\lambda = -e$를 대입하여 이를 각각 풀면 $1, -e$에 대한 고유벡터가 0이 아닌 실수 t에 대하여 각각 $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}$임을 알 수 있다. 따라서 행렬 $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$는 다음과 같이 대각화할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 1 & -m_1 \end{pmatrix}^{-1} \Omega_{(m_1,\, m_2)} \begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 1 & -m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

이를 다시 쓰면

$$\Omega_{(m_1,\, m_2)} = \begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 1 & -m_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 1 & -m_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 1 & -m_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로 이를 이용하여 $\Omega_{(m_1,\, m_2)}$의 n제곱($n \in \mathbb{N}$)을 계산하면

$$\Omega^n_{(m_1,\, m_2)} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}1 & m_2\\ 1 & -m_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-e)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1 & m_2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

를 얻는다. (가역행렬 P에 대하여 $PP^{-1}=I$이므로 중간의 P와 P^{-1}는 모두 사라지고, 대각행렬 D에 대하여 D^n은 D의 각 성분을 n제곱한 행렬과 같기 때문이다.) 즉,

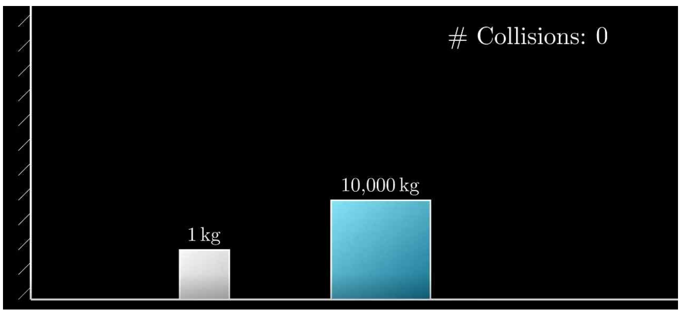
$$\Omega^n_{(m_1,\, m_2)} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}1 & m_2\\ 1 & -m_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-e)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1 & m_2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}m_1+(-e)^n m_2 & m_2(1-(-e)^n)\\ m_1(1-(-e)^n) & m_2+(-e)^n m_1\end{pmatrix}, \quad n\in\mathbb{N}$$

이다. 이를 이용하면 n번 연속으로 충돌하였을 때의 나중 속도를 쉽게 알아낼 수 있을 것처럼 보이지만, 사실 그렇지 않다. 일차원상에서 한 번 충돌이 발생한 후 한 물체의 속도를 바꾸거나 위치를 바꾸지 않는 이상 다시 충돌이 일어나지 않으므로, 일반적인 충돌에 대해서는 연속 충돌이 발생하지 않는다.

따라서 연속 충돌을 논하기 위해 한쪽 끝에 질량이 무한히 큰 벽이 있는 상황을 가정할 것이다. 벽과 충돌한 물체는 항상 탄성 충돌을 하여 반대 방향, 동일한 속력으로 튕겨 나온다고 하자. 이때 두 물체가 충돌한 후 왼쪽으로 이동한 물체가 다시 튕겨 나오는 것을 한 번의 '충돌'로 생각하여 새로운 충돌 행렬 $\Phi_{(m_1,\, m_2)}$를 정의할 수 있다.

경우의 수를 줄이기 위해, 일반성을 잃지 않고 $m_1 > m_2$라 하고 두 물체의 왼쪽에 질량이 무한히 큰 벽이 있다고 가정하자. 이때 질량이 m_1인 물체 1은 오른쪽 또는 왼쪽으로 운동하고, 물체 1과 벽 사이에서 물체 2가 계속 튕기며 연속적으로 충돌이 발생한다. 벽은 두 물체가 충돌한 후 물체 2의 속도의 방향을 바꿔주는 역할을 한다고 할 수 있다. 속도의 방향이 바뀌기 위해서 물체 2는 벽까지 이동하여 충돌해야 하지만, 충돌에 소요되는 시간은 우리의 관심사가 아니다. 또한 물체 1이 벽과 충분히 가까워져 물체 2의 이동시간이 충분히 짧아지면 순간적으로 물체 1이 오른쪽으로 밀려나 물체 2보다 빠르게 이동할 것이고, 이것이 연속 충돌이 끝나는 시점이다. (바닥면은 충분히 매끄러워 마찰이 없다고 하자.) 처음 상황을 그림으로 나타내면 아래 **[그림 1]**과 같다.



[그림 1] 초기 조건[2]

Ⅱ. 새롭게 정의한 충돌 행렬을 이용한 연속 충돌의 계산

상술한 상황에 부합하는 새로운 충돌 행렬 $\Phi_{(m_1, m_2)}$는 다음과 같다.

$$\Phi_{(m_1, m_2)} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} m_1 - em_2 & (1+e)m_2 \\ -(1+e)m_1 & em_1 - m_2 \end{pmatrix}$$

이제 $\Phi_{(m_1, m_2)}$의 n제곱($n \in \mathbb{N}$)을 구하기 위해 $\Phi_{(m_1, m_2)}$를 대각화할 것이며, 이를 위해 앞서 $\Omega_{(m_1, m_2)}$에 대해 계산한 것과 같은 과정을 거칠 것이다. (대각화 외에 점화식이나 나머지 정리 등을 이용하여 n제곱을 구할 수도 있겠다.)

$\Phi_{(m_1, m_2)}$의 행렬식은

$$\det(\Phi_{(m_1, m_2)}) = \frac{(1+e)^2 m_1 m_2 - (m_1 - em_2)(m_2 - em_1)}{(m_1+m_2)^2} = e$$

이고, 그 특성다항식은

$$q(x) = x^2 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(e+1)x + e$$

이므로 $q(x)$의 두 영점이자 $\Phi_{(m_1, m_2)}$의 고윳값은 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{(m_1 - m_2)(e+1) \pm \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)(1-e)^2 - 2m_1 m_2(e^2 + 6e + 1)}}{2(m_1 + m_2)}$$

이를 다시 $\Phi_{(m_1, m_2)}\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$에 대입하여 각각의 고윳값에 대응되는 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{x}_{\pm} = t\begin{pmatrix} -2(1+e)m_2 \\ (m_1+m_2)(1-e) \mp \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)(1-e)^2 - 2m_1 m_2(e^2+6e+1)} \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

표기의 편의를 위해 $\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)(1-e)^2 - 2m_1 m_2(e^2+6e+1)} = \gamma$로 치환하고 $\Phi_{(m_1, m_2)}$를 대각화하면 다음과 같다.

$$\Phi_{(m_1, m_2)} = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} -2(1+e)m_2 & -2(1+e)m_2 \\ (m_1+m_2)(1-e)+\gamma & (m_1+m_2)(1-e)-\gamma \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2(m_1+m_2)}\begin{pmatrix}(m_1-m_2)(e+1)+\gamma & 0 \\ 0 & (m_1-m_2)(e+1)-\gamma\end{pmatrix}$$

따라서 $\Phi_{(m_1,\, m_2)}$의 n제곱($n \in \mathbb{N}$)은

$$\Phi^n_{(m_1,\, m_2)} = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

이고

$$P = \begin{pmatrix}-2(1+e)m_2 & -2(1+e)m_2 \\ (m_1+m_2)(1-e)+\gamma & (m_1+m_2)(1-e)-\gamma\end{pmatrix},$$

$$D^n = \frac{1}{2^n(m_1+m_2)^n}\begin{pmatrix}[(m_1-m_2)(e+1)+\gamma]^n & 0 \\ 0 & [(m_1-m_2)(e+1)-\gamma]^n\end{pmatrix}$$

을 대입하여 정리하면 $\Phi^n_{(m_1,\, m_2)}$을 얻을 것이다. 하지만 이는 매우 복잡하게 표현되므로 $e=1$, 즉 두 물체가 탄성 충돌을 한다고 가정하면 $\Phi_{(m_1,\, m_2)}$의 고윳값과 고유벡터는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다. (근호 안이 음수가 되어 허수 i가 사용되지만, 고윳값이 허수인 것은 아무 문제가 되지 않는다. 복소수는 계산의 도구일 뿐이며, 대각화를 통해 최종적으로 계산한 $\Phi^n_{(m_1,\, m_2)}$은 결국 i가 모두 사라져 실수가 될 것이다.)

$$\lambda = \frac{m_1 - m_2 \pm 2\sqrt{m_1 m_2}\,i}{m_1+m_2} = \frac{(\sqrt{m_1} \pm \sqrt{m_2}\,i)^2}{m_1+m_2}, \quad \mathbf{x}_\pm = t\begin{pmatrix}\sqrt{m_2} \\ \pm\sqrt{m_1}\,i\end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

따라서

$$P = \begin{pmatrix}\sqrt{m_2} & \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1}\,i & -\sqrt{m_1}\,i\end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}\,i)^2 & 0 \\ 0 & (\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}\,i)^2\end{pmatrix}$$

에 대하여 $\Phi_{(m_1,\, m_2)} = PDP^{-1}$이고

$$\Phi^n_{(m_1,\, m_2)} = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \frac{1}{(m_1+m_2)^n}\begin{pmatrix}\sqrt{m_2} & \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1}\,i & -\sqrt{m_1}\,i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}\,i)^{2n} & 0 \\ 0 & (\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}\,i)^{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{m_2} & \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1}\,i & -\sqrt{m_1}\,i\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}(m_1+m_2)^n}\begin{pmatrix}\sqrt{m_2} & \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1}\,i & -\sqrt{m_1}\,i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}\,i)^{2n} & 0 \\ 0 & (\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}\,i)^{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{m_1} & -\sqrt{m_2}\,i \\ \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2}\,i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m_1m_2}(m_1+m_2)^n}\begin{pmatrix} \sqrt{m_1m_2}(a_n+b_n) & -m_2i(a_n-b_n) \\ m_1i(a_n-b_n) & \sqrt{m_1m_2}(a_n+b_n) \end{pmatrix}$$

이다. (단, $a_n = (\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}\,i)^{2n}$, $b_n = (\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}\,i)^{2n}$)

한편 $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ 라 하면

$$a_n = \left[\sqrt{m_1+m_2}\left(\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1+m_2}} + \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}}i\right)\right]^{2n} = (m_1+m_2)^n(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}$$

$$= (m_1+m_2)^n(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta)$$

이고

$$b_n = \left[\sqrt{m_1+m_2}\left(\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1+m_2}} - \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}}i\right)\right]^{2n} = (m_1+m_2)^n(\cos\theta - i\sin\theta)^{2n}$$

$$= (m_1+m_2)^n(\cos 2n\theta - i\sin 2n\theta)$$

이므로 이를 이용하여 $\Phi^n_{(m_1,\, m_2)}$ 을 다시 쓰면

$$\Phi^n_{(m_1,\, m_2)} = \frac{1}{2\sqrt{m_1m_2}(m_1+m_2)^n}\begin{pmatrix} \sqrt{m_1m_2}(a_n+b_n) & -m_2i(a_n-b_n) \\ m_1i(a_n-b_n) & \sqrt{m_1m_2}(a_n+b_n) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m_1m_2}}\begin{pmatrix} \sqrt{m_1m_2}\cos 2n\theta & m_2\sin 2n\theta \\ -m_1\sin 2n\theta & \sqrt{m_1m_2}\cos 2n\theta \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 n번 충돌 후 나중 속도 $v_1{}'$, $v_2{}'$은 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} v_1{}' = \cos 2n\theta \cdot v_1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sin 2n\theta \cdot v_2 \\ v_2{}' = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\sin 2n\theta \cdot v_1 + \cos 2n\theta \cdot v_2 \end{cases}$$

우리가 다루는 속도는 방향을 부호로 표현한 값이므로 오른쪽을 양의 방향으로 정의하면 $v_1{}' > v_2{}'$일 때 연속 충돌이 종료되고 이를 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하면 충돌

횟수를 알 수 있다. 한편 초기 조건에 따라 범위가 달라지고, 역삼각함수는 삼각함수의 정의역을 제한한 것이므로 이를 그대로 대입하여 역삼각함수로 답을 도출하면 오류가 발생할 수 있다.

따라서 여기서는 더 특별한 경우만을 볼 것이다. 자연수 k에 대하여 $m_1 = 100^k\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$으로 놓고 양수 v에 대하여 $v_2 = 0$, $v_1 = -v\,\mathrm{m/s}$로 놓으면

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \tan^{-1}10^{-k}$$

이고

$$\begin{cases} v_1{}' = -\cos 2n\theta \cdot v \\ v_2{}' = 10^k \sin 2n\theta \cdot v \end{cases}$$

이다. 여기서 벽과의 충돌도 충돌 횟수로 취급하여, 더 이상 충돌이 일어나지 않을 때까지의 충돌 횟수를 충돌 횟수 N으로 다시 정의하면 다음의 두 가지 경우가 존재한다.

① 물체끼리의 충돌이 끝난 후 물체 2의 속도가 0 이상인 경우
② 물체끼리의 충돌이 끝난 후 물체 2의 속도가 음수여서 벽과 한 번 더 충돌하는 경우

두 경우 모두 물체 2의 속력은 물체 1의 속력보다 작아 물체끼리의 충돌은 더 이상 일어나지 않는다. 따라서 벽과의 충돌을 고려하여 이전의 충돌 횟수 n에 2를 곱한 후 두 경우에 따라 N의 값을 $2n$으로 취하거나 $2n$에서 1을 빼야 한다. 즉, $N = 2n$인 경우는 $\sin 2n\theta \geq 0$인 경우이고, $N = 2n-1$인 경우는 $\sin 2n\theta < 0$인 경우이다.

한편 $v_1{}' > v_2{}'$, $v_1{}' > 0$을 적용하면 $v > 0$이므로

$$\cos 2n\theta < 0, \quad -\cos 2n\theta > 10^k \sin 2n\theta$$

이고

$$\tan 2n\theta > -10^{-k}$$

이다. 따라서 적당한 정수 p가 존재하여

$$-\tan^{-1}10^{-k} < 2n\theta - p\pi < \frac{\pi}{2}$$

이고 $\theta = \tan^{-1}10^{-k} > 0$이므로

$$\frac{p\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} - \frac{1}{2} < n < \frac{(2p+1)\pi}{4\tan^{-1}10^{-k}}$$

이다. 이 구간의 길이는

$$\frac{\pi}{4\tan^{-1}10^{-k}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$$

이므로 구간 내에서 자연수 n을 항상 찾을 수 있고, 우리는 $\frac{p\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} - \frac{1}{2}$에만 집중할 것이다. 또한 n은 자연수이므로 p는 음이 아닌 정수임을 알 수 있다. 이제 $\sin 2n\theta$의 부호 조건을 이용하자.

먼저 $\sin 2n\theta \geq 0$인 경우, $\cos 2n\theta < 0$이므로 적당한 정수 q가 존재하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{\pi}{2} < 2n\theta - 2q\pi \leq \pi, \quad \frac{(4q+1)\pi}{2} < 2n\theta \leq (2q+1)\pi$$

$$\frac{(4q+1)\pi}{4\tan^{-1}10^{-k}} < n \leq \frac{(2q+1)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}$$

마찬가지로 n은 자연수이므로 q는 음이 아닌 정수이다. $N = 2n$이므로 두 식을 연립하면 N은 다음 두 부등식을 동시에 만족시키는 최소의 자연수이다.

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \frac{p\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1 < N = 2n < \frac{(2p+1)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}$$
$$\exists\, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \frac{(4q+1)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} < N = 2n \leq \frac{(2q+1)\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}$$

N이 최소가 되려면 p, q가 최소가 되어야 하므로, 우선 $p = 0$인 경우를 살펴보자. $p = 0$이면

$$-1 < N < \frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}$$

이지만 $q \geq 0$이므로

$$\frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} < N$$

이 되어 연립부등식의 자연수 해가 존재하지 않는다. 이제 $p=1$인 경우를 보자.

$$\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}-1<N<\frac{3\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}$$

이고, 이때 $q=0$이면

$$\frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}<N\le\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}$$

이므로

$$N\ge\max\left\{\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}-1,\ \frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}\right\}$$

인 최소의 자연수 N이 우리가 구하는 충돌 횟수이다. 한편

$$\frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}\ge\frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{0}}=2>1$$

이므로 가우스 함수 $[x]$에 대하여

$$N=\left[\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}\right]$$

를 얻는다. 같은 방법으로 $\sin 2n\theta<0$, $N=2n-1$인 경우를 살펴보면

$$\pi<2n\theta-2r\pi<\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{(2r+1)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}<n<\frac{(4r+3)\pi}{4\tan^{-1}10^{-k}},$$

인 정수 r이 존재해야 하고 n은 자연수이므로 $r\ge 0$이다. $N=2n-1$이므로 두 식을 연립하면 N은 다음 두 부등식을 동시에 만족시키는 최소의 자연수이다.

$$\begin{aligned}
&\exists\, p\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \frac{p\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}-2<N=2n-1<\frac{(2p+1)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}-1\\
&\exists\, r\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \frac{(2r+1)\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}-1<N=2n-1<\frac{(2r+3)\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}-1
\end{aligned}$$

N이 최소가 되려면 p, q가 최소가 되어야 하므로 $p=0$이라 하면

$$-1<N<\frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}}$$

이지만 $r \geq 0$이므로

$$\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1 < N, \quad \frac{\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} < \frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1$$

에서 모순이다. 그 다음으로 $p = 1$인 경우

$$\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 2 < N < \frac{3\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} - 1$$

이고 이때 $r = 0$이면

$$\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1 < N < \frac{3\pi}{2\tan^{-1}10^{-k}} - 1$$

이고

$$N \geq \max\left\{\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1, \frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 2\right\} = \frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} - 1$$

이 되어 처음 경우와 동일하게

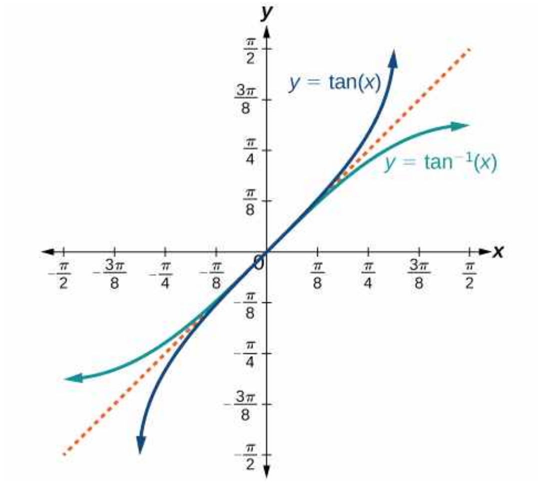
$$N = \left[\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}\right]$$

를 얻는다. 따라서 모든 충돌이 종결되어 더 이상 충돌이 일어나지 않을 때까지의 충돌 횟수는 $\left[\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}\right]$번이다.

Ⅲ. 충돌 횟수의 수학적 해석

앞서 정의한 연속 충돌 상황에서 전체 충돌의 수가 $N = \left[\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}\right]$번임을 증명하였다. 실제로 k에 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 을 넣어 계산해보면 $N(k)$의 값은 각각
$3, 31, 314, 3141, \cdots$ 이 나오며, 이는 친숙한 숫자 배열이다. 값을 더 대입해 보아도 π의 자릿수와 동일한 배열의 숫자들이 나오며, 이는 곧 $N \approx \left[\pi \times 10^k\right]$임을 의미한다. 하지만 식의 형태는 같지 않아, 모든 음이 아닌 정수 k에 대하여 이러한 관계가 성립한다는 보장은 없다.

실제로 $y=x$의 그래프와 $y=\tan^{-1}x$의 그래프를 그려보면 **[그림 2]**와 같이 $x=0$ 근처에서 거의 비슷한 값을 가지며, 이는 $\tan^{-1}x$의 맥클로린 급수에서도 확인할 수 있다.



[그림 2] $y=x$의 그래프와 $y=\tan^{-1}x$의 그래프

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

따라서 x의 값이 충분히 작을 때 $\tan^{-1}x$는 x로 근사되고, 다음의 근사가 성립하게 된다.

$$N = \left[\frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}}\right] \approx \left[\pi \times 10^k\right]$$

가우스 함수 안의 값은 근사에 의한 오차가 발생하지만, N의 값의 경우 동일하게 계산되는 것이다. 그렇다면 언제까지 동일하게 계산될까? k의 값이 커지면 $x=10^{-k}$는 0으로 수렴하고, x가 0으로 수렴할 때 $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan^{-1}x}$의 극한 역시 0으로 수렴하므로 모든 k에 대하여 이러한 계산이 성립할 것이라 생각할 수도 있다.

하지만 소수 부분이 $0.a_1a_2\cdots a_n999\cdots9$에서 $0.b_1b_2\cdots b_m000\cdots01$ 등으로 바뀐 경우 두 값의 차이는 매우 작지만 N의 값이 1만큼 작아지는 결과를 초래할 수도 있다.

따라서 최종적으로 $[\pi \times 10^k]$번이라 답할 경우 실제 답과 같거나, 최대 1의 오차가 발생한다. 1의 오차가 발생하는 경우는 π의 k번째 자리의 나열 $3141592\cdots a_k$의 마지막 k개의 수가 9인 경우이다.

한편 $k \le 10^8$인 경우 9가 9번 이상 연속하여 등장하는 경우가 없다는 것이 알려져 있으므로, $k \le 10^8$일 때 위 계산은 정확하다. 즉, 이 방법을 이용하여 물리 엔진으로 원주율을 계산할 경우 소숫점 아래 10^8번째 자리까지는 한 치의 오차도 없다는 것이다.

일반적으로 계산 가능한 수준에서는 $N = \lfloor \pi \times 10^k \rfloor$의 계산이 성립하지만, 원주율은 끝없이 이어지는 무한소수(게다가 초월수)이므로 어딘가에서 아주 긴 9의 수열이 나타날지 안 나타날지 확인하는 것은 매우 어려운 일이다.

π가 초월수라는 것은 증명을 한층 더 어렵게 만드는데, 이러한 근사에 대해 더 깊게 탐구한 G. Galperin의 연구[1]에 의하면 충분히 큰 자연수 k에 대하여

$$\left\lfloor \frac{\pi}{\tan^{-1}(1/k)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{1/k} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\tan^{-1}10^{-k}} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2} \times 10^k \rfloor, \quad \left\lfloor \frac{a}{\tan^{-1}x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{x} \right\rfloor$$

가 성립한다. (a는 임의의 무리수이고 x는 충분히 작은 양의 실수이다.)

G. Galperin 역시 $\left\lfloor \frac{\pi}{\tan^{-1}10^{-k}} \right\rfloor = \lfloor \pi \times 10^k \rfloor$의 성립 여부는 추측으로 남겨두었지만, 확률 계산을 덧붙여 증명은 매우 어렵지만 아마도 성립할 것이라 제시했다. 그의 계산에 의하면, $k > 10^8$일 때 위 계산이 성립할 확률은 다음과 같다.

$$1 - \frac{\pi \cdot 10^{-10^8}}{27}$$

따라서 수학의 관점에서 이 문제는 ‘성립할 가능성이 매우 높을 뿐인 미해결 문제’라고 보는 것이 타당하다. (참고로 G. Galperin은 고전역학의 짜임새 공간(Configuration Space)을 도입하여 문제를 해결하였다.)

Ⅳ. 참고문헌

[1] Galperin, G. (2003). Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). Regular and chaotic dynamics, 8(4), 375-394.

[2] Grant Sanderson, *“The most unexpected answer to a counting puzzle”*, 2019. 01. 14. https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs

[3] Grant Sanderson, *“Why do colliding blocks compute pi?”*, 2019. 01. 21. https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE