# [준킬러][미적] 5미분법3



## 06 미적

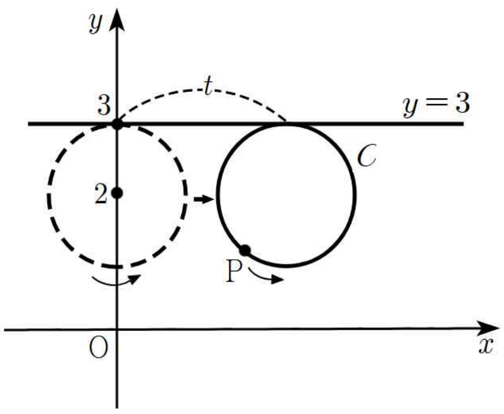
07 여러 가지 미분법

01 매개변수 미분법

02 매개변수 미분법1 (공식)

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

**1.** 좌표평면에 중심이 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 $C$가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 $(0, 3)$의 위치에 있다. 원 $C$는 직선 $y=3$에 접하면서 $x$축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 $C$가 굴러간 거리가 $t$일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.




점 P가 나타내는 곡선을 $F$라 하자. $t=\frac{2}{3}\pi$일 때 곡선 $F$ 위의 점에서의 접선의 기울기는?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

## 06 미적

07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

02 역함수의 미분법2 (결합 또는 합성함수)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 26

**2.** 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 $b$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 21

3. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$ 과 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$ |
| (나) 모든 실수 $x$ 에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$ 이다. |

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(e)$ 의 값은? (단, $a$, $b$ 는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

# 06 미적

07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

03 역함수의 미분법3 (해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 15

4. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ $e^2$
④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

05 역함수의 미분법5 (함수 구하기)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 21

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.

(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은?

① $-11$ ② $-9$ ③ $-7$

④ $-5$ ⑤ $-3$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

6. $0 < t < 41$인 실수 $t$에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$와 직선 $y = t$가 만나는 세 점 중에서 $x$좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, $x$좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$

④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

## 06 미적

07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

06 역함수의 미분법6 (미분가능성)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

7. 지수함수 $f(x)=a^x\,(0<a<1)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 $x$좌표를 $b$라 하자. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $ab$의 값은?

① $e^{-e-1}$ ② $e^{-e-\frac{1}{e}}$ ③ $e^{-e+\frac{1}{e}}$

④ $e^{e-1}$ ⑤ $e^{e+1}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 28

8. 두 상수 $a$, $b$ $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $h'(3)=2$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 29

9. 함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} (f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1) \\ \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

01 활용1 (두 직선이 이루는 각의 크기)

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

10. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{k}{x}(k>1)$에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 P에서의 접선을 $l$, 곡선 $y=g(x)$에 대하여 점 Q에서의 접선을 $m$이라 하자. 두 직선 $l$, $m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 $k$에 대하여 $3k$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

11. 함수 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$의 그래프 위의 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$에서의 접선을 각각 $l$, $m$이라 하자. 두 직선 $l$, $m$이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 할 때, $12\tan\theta$의 값을 구하시오.

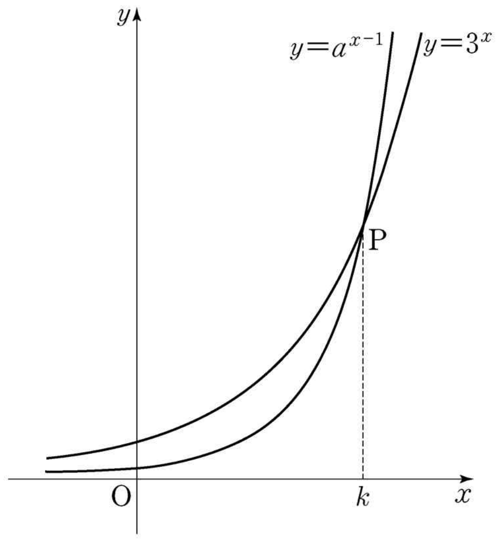
06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

03 활용3 (접선의 활용)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 14

12. $a>3$인 상수 $a$에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 $x$좌표를 $k$라 하자.

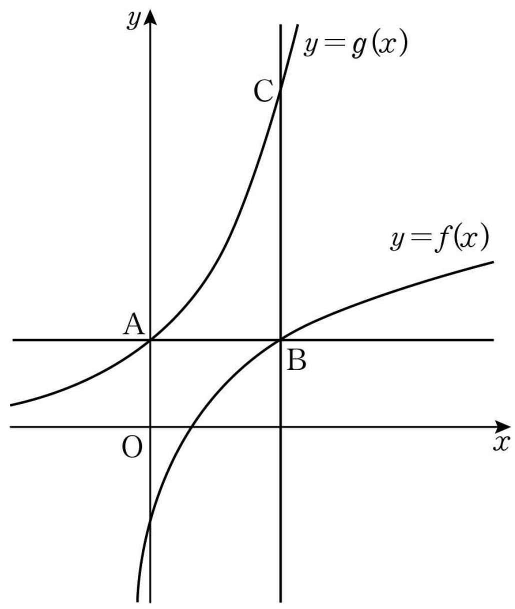



점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 $x$축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 $x$축과 만나는 점을 B라 하자. 점 H$(k, 0)$에 대하여 $\overline{AH}=2\overline{BH}$일 때, $a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 14

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$의 그래프와 함수 $g(x)=a^x\,(a>1)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=g(x)$가 $y$축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B, 점 B를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 C라 하자.




곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=\overline{BD}$일 때, $g(2)$의 값은?

① $e^{\frac{2}{3}}$ ② $e^{\frac{5}{3}}$ ③ $e^{\frac{8}{3}}$
④ $e^{\frac{11}{3}}$ ⑤ $e^{\frac{14}{3}}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 15

**14.** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선 $l$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $l$은 제 2사분면을 지나지 않는다.
>
> (나) 직선 $l$과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형은 넓이가 2인 직각이등변삼각형이다.

함수 $g(x)=xf(2x)$에 대하여 $g'(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

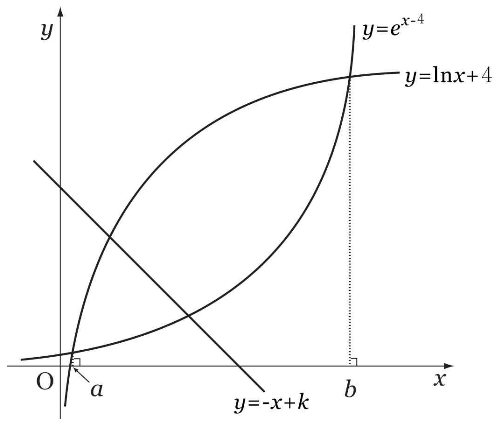
06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

04 활용4 (Mm)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 미분과 적분 29

**15.** 그림과 같이 함수 $y=\ln x+4$, $y=e^{x-4}$의 그래프의 두 교점의 $x$좌표를 각각 $a$, $b$라 하자. 일차함수 $y=-x+k$의 그래프가 $a\le x\le b$에서 두 함수의 그래프와 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 될 때, 상수 $k$의 값은?




① $\dfrac{7}{2}$ ② 4 ③ $\dfrac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\dfrac{11}{2}$

# [준킬러][미적] 5미분법3



[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 미분과 적분 28

**16.** 함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$ ($k$는 자연수)의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 사이의 최단 거리를 $l_k$라 하자. $l_k \geq 3\sqrt{2}$를 만족시키는 $k$의 최솟값은? (단, $e=2.7$로 계산한다.)

① 11 ② 10 ③ 9

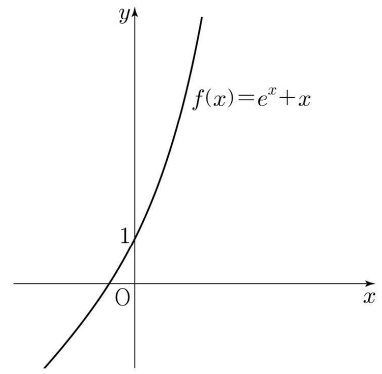
④ 8 ⑤ 7

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 27

**17.** 원 $x^2+y^2=1$ 위의 임의의 점 P와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\sqrt{a}-b$이다. 자연수 $a$, $b$에 대하여 $a^2+b^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 29

**18.** 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 $t$에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.



06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

05 활용5 (정의된 함수)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 16

**19.** 실수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 $a$의 값이 한 개일 때, $k$의 값은?

① $-2$ ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$

④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ $-3$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 20

**20.** 점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\ (x>0)$에서 접선을 그어 접점의 $x$좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, $n$번째 수를 $a_n$이라 하자. 모든 자연수 $n$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 21

21. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 $t$에 대하여 기울기가 $t$인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 $x$좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 $a$일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

06 활용4 (평균값의 정리)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 21

22. $-1$과 $1$을 제외한 모든 실수 $x$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. |
| (나) $\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$이다. |
| (다) $x\neq 1$인 모든 양수 $x$에 대하여 $f'(x)<0$이다. |

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 한 점에서 만난다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 $x$축과 세 점에서 만난다.

ㄷ. $f'(\alpha)=-1$인 실수 $\alpha$가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

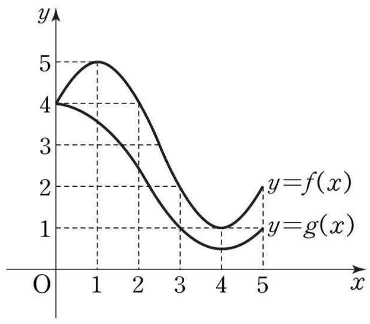
06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

01 증가와 감소1 (증가 또는 감소하는 구간)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 20

**23.** 열린구간 $(0,\ 5)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?




<보 기>

ㄱ. $h(3)=4$

ㄴ. $h'(2)\geq 0$

ㄷ. 함수 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

04 극대와 극소1 (기본)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 19

**24.** 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값은?

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $0$

④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

25. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

05 극대와 극소2 (해석)

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

26. 두 함수 $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$, $g(x)=e^{-x}(x^2+ax+b)$는 각각 $x=-3$, $x=2$에서 극댓값을 갖는다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극솟값을 각각 $m_1$, $m_2$라 할 때, $m_1+m_2$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① $-2e$ ② $-e-1$ ③ 0
④ $e-1$ ⑤ $2e$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

07 극대와 극소4 (불연속함수 또는 구간정의함수)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 14

27. 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고,

$0 \leq x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0,\ 2]$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 $a$의 값의 곱은?

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$

④ $1$ ⑤ $2$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

08 극대와 극소5 (활용)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 18

28. 양의 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{R}(r(t),\ 0)$, $\mathrm{S}(s(t),\ 0)$이라 하자. 함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$

④ $-\dfrac{1}{5}$ ⑤ $-\dfrac{1}{6}$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

02 곡선의 개형과 변곡점

03 곡선의 개형3 (변곡점)

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 21

29. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점 $(2, 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

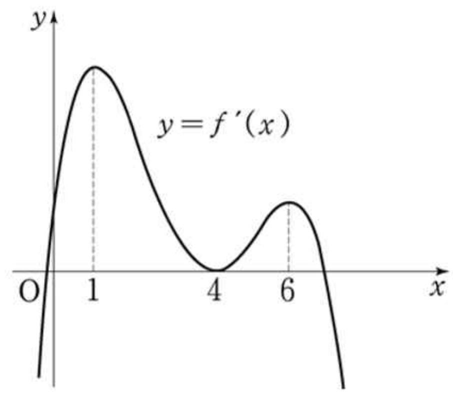
06 미적 09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

02 그래프의 개형2 (도함수의 그래프 해석)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 29

30. 아래 그림은 5차 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $f'(4)=0$이고 $f''(1)=f''(4)=f''(6)=0$이다.)




<보 기>

ㄱ. $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $4<x_1<x_2<6$인 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다.

ㄷ. $f(0)=0$일 때, 양의 실수 $a$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극댓값은 $a$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 29

**31.** 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 $x$의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

| $x$ | $x<1$ | $x=1$ | $1<x<3$ | $x=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | $1$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g'(3)=-1$

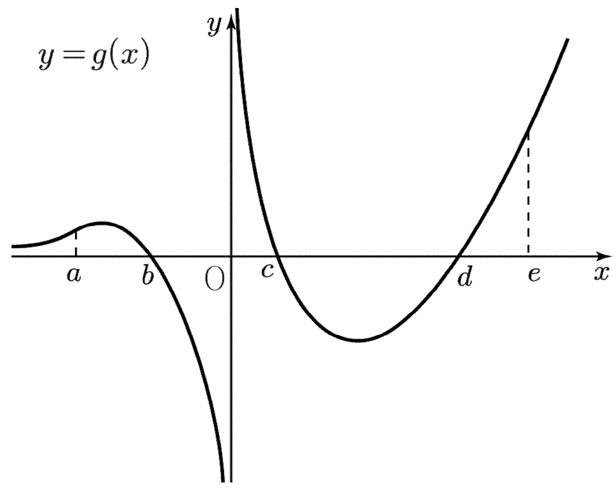
ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 18

**32.** 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 도함수 $f'(x)$가 연속이다. $x$축과의 교점의 $x$좌표가 $b$, $c$, $d$뿐인 함수 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?




<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(b, 0)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, e]$에서 4개의 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적

09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

03 그래프의 개형3 (주어진 함수의 해석. 합답형)

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 27

**33.** 함수 $f(x)=x+\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$g(x)=(f\circ f)(x)$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 열린구간 $(0,\ \pi)$ 에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 열린구간 $(0,\ \pi)$ 에서 증가한다.

ㄷ. $g'(x)=1$ 인 실수 $x$ 가 열린구간 $(0,\ \pi)$ 에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

**34.** 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 $a$가 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

35. 3 이상의 자연수 $n$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^{n}e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 20

36. 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\cos x+2x\sin x$$

가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$)

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^{2}\alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적

09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

05 그래프의 개형5 (함수 구하기)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 29

**37.** 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 A(a, f(a)) 를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 B(b, f(b))에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq b$이다.)

<보 기>

ㄱ. $h'(b)=0$

ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. 점 $(a, h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 21

**38.** 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 갖는다.

(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.

(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.

ㄴ. $h(x)=x$

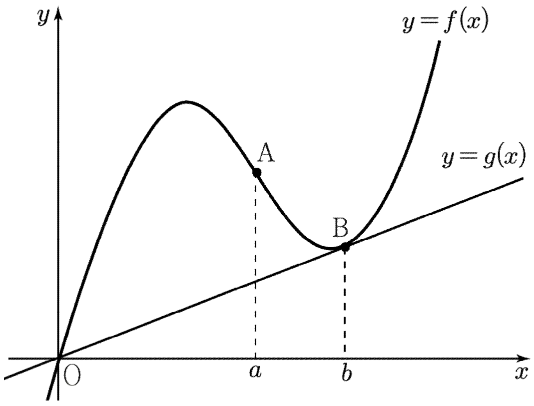
ㄷ. $g'(3)=1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 19

**39.** 그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$)




<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $a$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 30

**40.** 양수 $a$와 두 실수 $b,\ c$에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.

(나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 $a,\ b,\ c$의 곱 $abc$의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 20

**41.** 양수 $a$와 실수 $b$에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

> (가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
>
> (나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 $k$의 최솟값을 $m$이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① $-15$ ② $-12$ ③ $-9$
④ $-6$ ⑤ $-3$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 20

**42.** 함수 $f(x)=x^2+ax+b\left(0<b<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.
>
> (나) 점 $(k,\ g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고, $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

43. 세 상수 $a$, $b$, $c$ $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax^2+6ex+b & (x<c)\\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$의 값은?

① $-4\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$

③ $-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$ ④ $-3\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$

⑤ $-2\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

06 그래프의 개형6 (정의된 함수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 16

44. 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 29

45. $t>2e$인 실수 $t$에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 $k$의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 $\alpha$에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

04 최대와 최소

01 Mm1 (Mm 구하기)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 04월 21

46. 함수 $f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.

ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)|\le\sqrt{2}\,|x_1-x_2|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

04 최대와 최소

04 Mm4 (함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 29

47. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 $a$에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

04 최대와 최소

05 Mm5 (정의된 함수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 21

48. 자연수 $n$에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 $t$로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

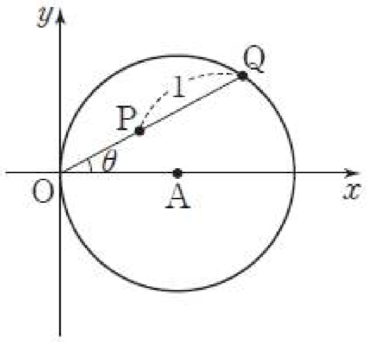
이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 $b_n$을 갖는다. $\dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}+\dfrac{b_5}{a_5}+\dfrac{b_6}{a_6}$의 값은?

① $\dfrac{23}{2}$ ② 12 ③ $\dfrac{25}{2}$

④ 13 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 26

49. 그림과 같이 좌표평면에 점 A(1, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle AOQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{PQ}=1$인 점 P를 정한다. 점 P의 $y$좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a$와 $b$는 자연수이다.)



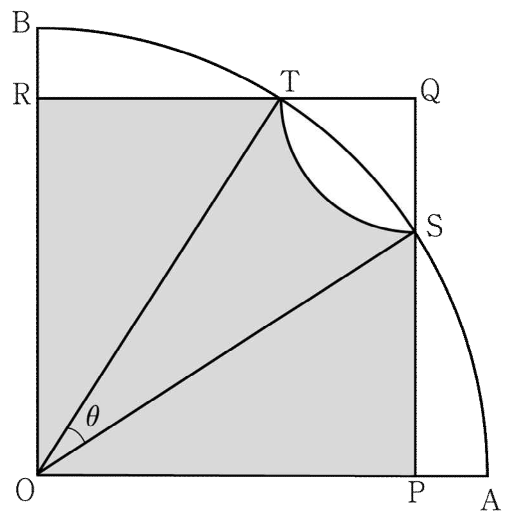

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

04 최대와 최소

06 Mm6 (활용)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 30

50. 그림과 같이 중심각의 크기가 90° 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB와 선분 OA 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 OP를 한 변으로 하는 정사각형 OPQR가 호 AB와 서로 다른 두 점 S, T에서 만날 때, 정사각형OPQR에서 점 Q를 중심으로 하고 반지름이 QS인 부채꼴 SQT를 제외한 어두운 부분의 넓이를 $D$라 하자. $\angle SOT=\theta$라 할 때, $D$가 최대가 되도록 하는 $\theta$에 대하여 $10\pi\tan\theta$의 값을 구하시오.

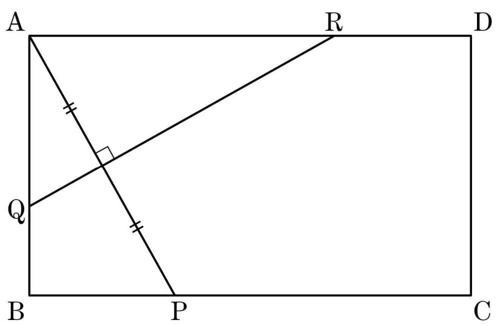


[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 30

**51.** 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 $x$좌표를 각각 $s$, $t(0<s<t)$라 하자. 양수 $k$에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $k$가 되도록 하는 점 $(s, t)$가 나타내는 곡선을 $C$라 하자. 곡선 $C$ 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 $x$좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

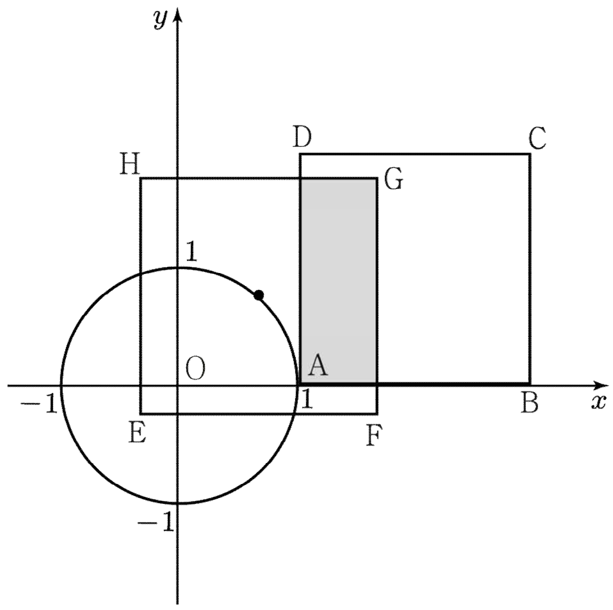
[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 30

**52.** 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 수직이등분선이 두 직선 AB, AD와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR의 길이의 최솟값이 $k$일 때, $4k^2$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 점 B가 아니다.)




[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 21

**53.** 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 0), B(3, 0), C(3, 2), D(1, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은?
(단, 정사각형의 모든 변은 $x$축 또는 $y$축에 수직이다.)

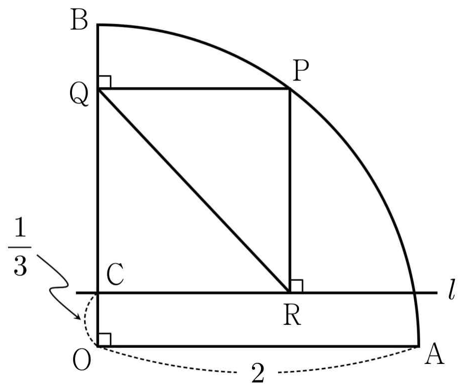



① $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

**54.** 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{\text{OC}}=\frac{1}{3}$인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 $l$이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은?



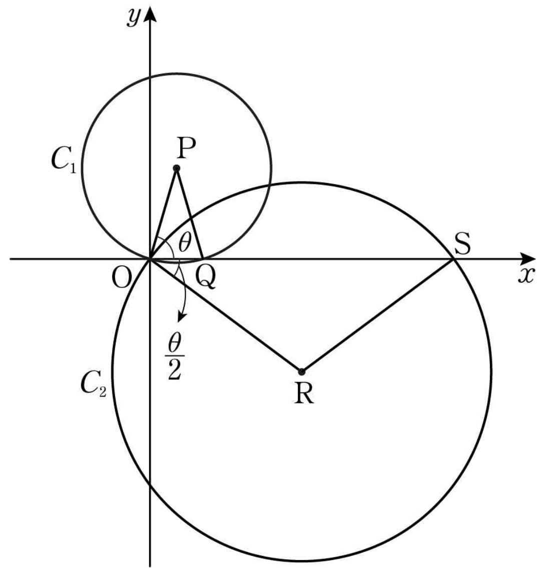

① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$

④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 20

**55.** 그림과 같이 $\overline{\text{OP}}=1$인 제 1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 $C_1$이 $x$축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\text{OR}}=2$이고 $\angle\text{ROQ}=\frac{1}{2}\angle\text{POQ}$인 제 4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 $C_2$가 $x$축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자. $\angle\text{POQ}=\theta$라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 $\theta$에 대하여 $\cos\theta$의 값은?

(단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)

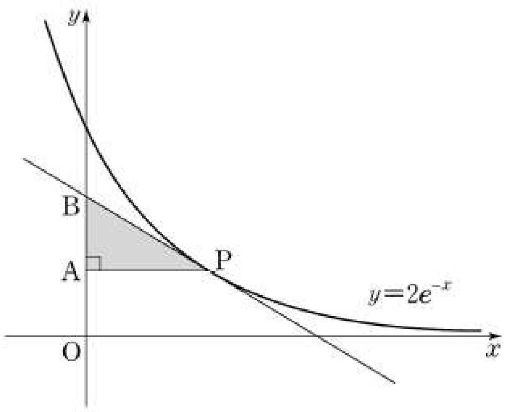



① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 15

**56.** 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})(t>0)$에서 $y$축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 $y$축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 $t$의 값은?

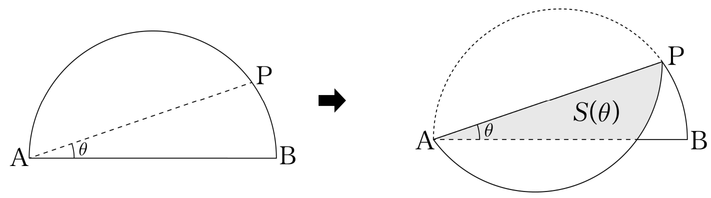



① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ 2 ⑤ $e$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 21

**57.** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\theta=\alpha$에서 $S(\theta)$가 최댓값을 갖는다고 할 때, $\cos 2\alpha$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)




① $\frac{-2+\sqrt{17}}{8}$ ② $\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{17}}{8}$

④ $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{17}}{8}$

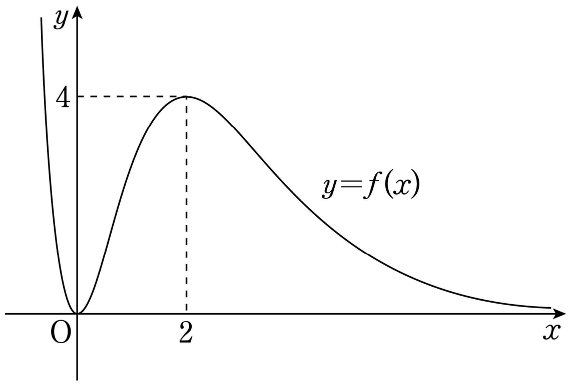
06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

01 방정식과 미분1 (실근의 개수)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 18

58. 그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.




함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim_{x \to \infty} f(x)=0$)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

02 방정식과 미분2 (실근의 개수. 제한범위)

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

59. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이다.)

<보 기>

ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 19

**60.** 자연수 $n$에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$이다. 함수 $h(x)$가 $h(x)=g(f(x))$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h'(1)=0$

ㄴ. 열린 구간 $(0, 1)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

ㄷ. $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 $1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

03 방정식과 미분3 (동치변형)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 미분과 적분 29

**61.** 함수 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

04 방정식과 미분4 (활용)

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 18

62. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x) = 2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a = \dfrac{1}{a}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 $a$가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 21

63. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.

(나) 모든 양의 실수 $x$에 대하여 $f'(x)>0$이다.

(다) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 양의 실수 $x$에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

ㄷ. $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\,(\alpha>0)$이면 방정식 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 20

64. 자연수 $n$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x\neq-1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 $n$에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10이하의 모든 자연수 $n$의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적

10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 28

65. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은?

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수 $x$에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$
④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

06 방정식과 미분6 (실근 또는 교점의 개수로 정의된 함수)

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 19

66. 실수 $m$에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 $m$인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 $a$의 최댓값은?

① $-3$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $6$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 30

67. 함수 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 $\alpha$라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 $n$에 대하여 $x$에 대한 방정식 $f(x)-\frac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

68. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재할 때, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 자연수 $n$에 대하여 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 실수 $a$의 개수를 $a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27}a_n$의 값을 구하시오.

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

07 방정식과 미분7 (기타 정의된 함수)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 21

**69.** 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 $t$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 $k$의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은?

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 20

**70.** 좌표평면 위에 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=4$가 있다. $t\ne-3$, $t\ne3$인 실수 $t$에 대하여 직선 $y=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, 4)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $f(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{2})=-1$

ㄴ. 열린구간 $(-3, 3)$에서 $f''(t)<0$이다.

ㄷ. 방정식 $9f(x)=3^{x+2}-7$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

02 부등식과 미분

04 부등식과 미분4 (활용)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 21

**71.** 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 $a$의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 $n$의 값의 합은?

① 43 ② 46 ③ 49
④ 52 ⑤ 55

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

02 부등식과 미분

05 부등식과 미분5 (대소 비교 및 증명)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

**72.** 함수 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

ㄴ. $2011^{2012}>2012^{2011}$

ㄷ. 열린구간 $(0, e)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

03 속도와 가속도

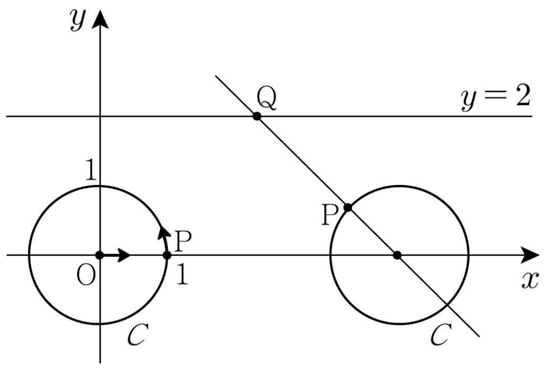
05 평면 운동4 (점의 자취)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 미분과 적분 30

**73.** 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 $C$와 이 원 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 원 $C$ 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 속력으로 움직인다.

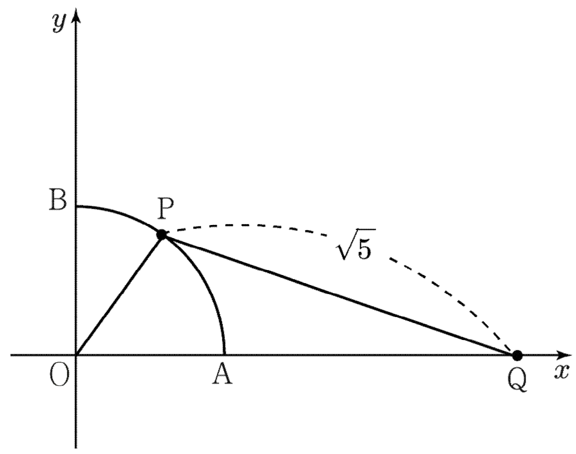
(나) 원 $C$는 $x$축의 양의 방향으로 매초 10의 속력으로 움직인다.




원 $C$는 중심이 원점에서, 점 P는 점 $(1, 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 $C$의 중심과 점 P를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자. 출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$초가 되는 순간, 점 Q는 직선 $y=2$ 위를 매초 $a$의 속력으로 움직인다. $a$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 04월 30

**74.** 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 A$(1, 0)$에서 출발하여 호 AB 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직일 때, $x$축 위의 점 Q는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$를 만족시키면서 $x$축 위를 움직인다.




$\angle \mathrm{POA}=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 $x$좌표의 시간(초)에 대한 변화율을 $r$이라 할 때, $9r^2$의 값을 구하시오.

[준킬러][미적] 5미분법3(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] ⑤
2. [정답] 15
3. [정답] ④
4. [정답] ③
5. [정답] ①

6. [정답] ④
7. [정답] ①
8. [정답] 72
9. [정답] 15
10. [정답] 20

11. [정답] 9
12. [정답] ④
13. [정답] ③
14. [정답] ④
15. [정답] ④

16. [정답] ④
17. [정답] 26
18. [정답] 3
19. [정답] ④
20. [정답] ⑤

21. [정답] ②
22. [정답] ④
23. [정답] ⑤
24. [정답] ①
25. [정답] ②

26. [정답] ②
27. [정답] ①
28. [정답] ③
29. [정답] ⑤
30. [정답] ⑤

31. [정답] ③
32. [정답] ③
33. [정답] ⑤
34. [정답] ⑤
35. [정답] ③

36. [정답] ③
37. [정답] ⑤
38. [정답] ③
39. [정답] ⑤
40. [정답] 15

41. [정답] ③
42. [정답] ③
43. [정답] ③
44. [정답] ③
45. [정답] 17

46. [정답] ⑤
47. [정답] 24
48. [정답] ②
49. [정답] 34
50. [정답] 20

51. [정답] 109
52. [정답] 27
53. [정답] ④
54. [정답] ⑤
55. [정답] ⑤

56. [정답] ④
57. [정답] ④
58. [정답] ③
59. [정답] ③
60. [정답] ③

61. [정답] ⑤
62. [정답] ⑤
63. [정답] ③
64. [정답] ②
65. [정답] ⑤

66. [정답] ④
67. [정답] 34
68. [정답] 30
69. [정답] ④
70. [정답] ③

71. [정답] ④
72. [정답] ⑤

73. [정답] 6

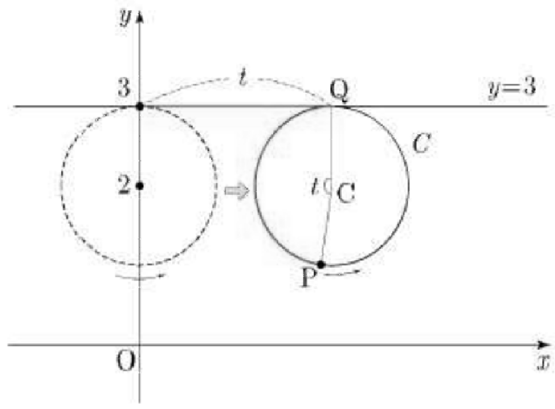
74. [정답] 8

[준킬러][미적] 5미분법3(해설)

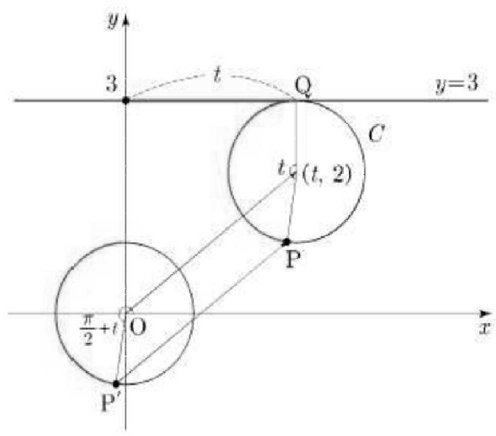
준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] ⑤

[해설]
원 $C$가 굴러간 거리가 $t$일 때, 원의 중심을 C, 점 $(t,\,3)$을 Q라 하면 주어진 조건에 의하여 $\angle \mathrm{POQ}=t$이다.




원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P′에 대하여 동경 OP′이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}+t$일 때, 점 P는 점 P′을 $x$축의 방향으로 $t$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다.




따라서 점 P의 좌표를 $(x,\,y)$라 할 때,

$x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+t=-\sin t+t$

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+2=\cos t+2$ 이다.

따라서 원 $C$가 굴러간 거리가 $t$일 때, 곡선 $F$ 위의 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{-\cos t+1}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin\frac{2}{3}\pi}{-\cos\frac{2}{3}\pi+1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) [정답] 15

[해설]

$y=f(x)$에서 접선의 기울기는 1이므로 $f(2)=1,\ f'(2)=1$

$y=f(2x)=F(x)$라 치환하면

$g(x)$와 $F(x)$는 역함수 관계이므로

$g(x)$가 $(1,a)$를 지나면 $F(x)$는 $(a,1)$을 지난다

$\therefore F(a)=1$이므로 $f(2a)=1$

$f(2)=1$에서 $a=1$

또한 $g'(1)=\frac{1}{F'(a)}=\frac{1}{F'(1)}$ 이므로

$F'(x)=(f(2x))'=2f'(x)$에서 $F'(1)=2f'(1)=2$

$\therefore b=g'(1)=\frac{1}{2}\ \therefore 10(a+b)=15$

3) [정답] ④

[해설]

$f(1)=(1+a+b)e=e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e=e$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서 $f'(x)=x^2e^x$
$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로 $f''(1)=3e$

이때 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로

함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e$

$g'(e)=3$

따라서

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$

$=\dfrac{1}{e}\times e+1\times 3$

$=4$

4) [정답] ③

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$에서 $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 $\displaystyle\lim_{x\to -2}g(x)=0$

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$도 $x=-2$를 포함한 구간에서 연속이다.

그러므로 $g(-2)=\displaystyle\lim_{x\to -2}g(x)=0$이고, $f(0)=-2$

이때 $f(0)=\ln\left(\dfrac{\sec 0+\tan 0}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$이므로

$-\ln a=-2,\ \ln a=2,\ a=e^2$

또 미분계수의 정의에 의하여

$$b=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)$$

한편, $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{a}\right)=\ln(\sec x+\tan x)-2$에서

$$f'(x)=\frac{(\sec x+\tan x)'}{\sec x+\tan x}=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$$
$$=\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

또 $f(g(x))=x$이므로 이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

위 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f'(g(-2))g'(-2)=1,\ f'(0)\times g'(-2)=1$

이때 $f'(0)=\sec 0=1,\ g'(-2)=b$이므로

$1\times b=1,\ b=1$

따라서 $a=e^2,\ b=1$이므로 $ab=e^2\times 1=e^2$

5) [정답] ①

[해설]

조건 (나) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x),\ g(x)$가 연속함수이므로 $f(3)=g(3)$이다.

그런데 두 함수 $f(x),\ g(x)$는 서로 역함수 관계로 직선$y=x$에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 $(3,\ 3)$을 지난다.

$\therefore\ f(3)=3,\ g(3)=3$ ……㉠

$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$에서 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $h(3)=0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{h(x)-h(3)}{(x-3)g(x)}=\frac{h'(3)}{g(3)}=\frac{8}{9}$$

$\therefore h'(3)=\dfrac{8}{3}\ \therefore\ f'(3)-g'(3)=\dfrac{8}{3}$

$f'(3)=k$라 하면 $g'(3)=\dfrac{1}{k}$이므로

$k-\dfrac{1}{k}=\dfrac{8}{3},\ k^2-\dfrac{8}{3}k-1=0$

$k=f'(3)=3$ ($\because\ f'(x)>0$)

(가)에서 $g'(x)\le\dfrac{1}{3}$이므로 $f'(x)\ge 3$이고 $f'(x)$가 이차함수이므로 $(3,\ 3)$은 $f'(x)$의 꼭짓점이다.

이때, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x-3)^2+3$에서

$a=-9,\ b=30$이다.

$f(x)=x^3-9x^2+30x+c$가 ㉠에서 $(3,\ 3)$을 지나므로

$c=-33$따라서 $f(x)=x^3-9x^2+30x-33$이므로

$f(1)=1-9+30-33=-11$

6) [정답] ④

[해설]

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$h'(t)=1\times\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 $x$좌표는 $x^3+2x^2-15x+5=5$

$x(x+5)(x-3)=0$

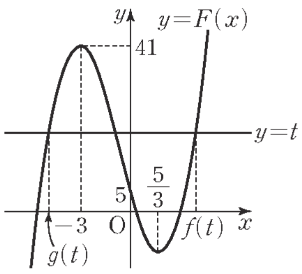
$x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $f(5)=3,\ g(5)=-5$

한편

$F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라

하면




$F'(x)=3x^2+4x-15=(x+3)(3x-5)$

$F'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

$F(-3)=41,\ F\left(\dfrac{5}{3}\right)<0$

$x>\dfrac{5}{3}$일 때 함수 $y=F(x)$의 그래프는 직선 $y=t$와 한 점 $(f(t),\ t)$에서 만나고 $F(f(t))=t$이므로 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$F'(f(t))f'(t)=1,\ f'(t)=\dfrac{1}{F'(f(t))}$,

$f'(5)=\dfrac{1}{F'(f(5))}=\dfrac{1}{F'(3)}=\dfrac{1}{24}$

$x<-3$일 때 함수 $y=F(x)$의 그래프는 직선 $y=t$와 한 점 $(g(t),\ t)$에서 만나고 $F(g(t))=t$이므로 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$F'(g(t))g'(t)=1,\ g'(t)=\dfrac{1}{F'(g(t))}$,

$g'(5)=\dfrac{1}{F'(g(5))}=\dfrac{1}{F'(-5)}=\dfrac{1}{40}$

따라서

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

$\quad=\{3-(-5)\}+5\times\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}\right)=\dfrac{97}{12}$

7) [정답] ①

[해설]

$f(x)=a^x$ , $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ 이고

$(b,\ b)$에서 $g(x)$가 미분가능하려면

$f(b)=a^b=b$ ⋯①

$f'(b)=a^b\cdot\ln a=-1$ ⋯②

를 만족하여야 한다.

①의 양변에 ln을 취하면 $b\ln a=\ln b$ ⋯③

①을 ②에 대입하면 $b\ln a=-1$ ⋯④

③, ④에서 $\ln b=-1$

$\therefore\ b=e^{-1}$ , $a=e^{-e}$

$\therefore\ ab=e^{-e-1}$

8) [정답] **72**

[해설]

$g^{-1}(x)=k(x)$라 하면

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$

$\quad=f(k(x))$

$\quad=(k(x)-a)(k(x)-b)^2$

이때, 조건 (가)에서 함수 $(x-1)|h(x)|$ 즉,

$(x-1)|(k(x)-a)(k(x)-b)^2|$

$=(x-1)(k(x)-b)^2|(k(x)-a)|$

절댓값 안의 값이 $(x-1)$의 인수를 가져야 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$k(1)-a=0$

한편, $y=k(x)$는 $x=\{(k(x)\}^3+\{(k(x)\}+1$을 만족하므로

$1=\{(k(1)\}^3+\{(k(1)\}+1$

$k(1)=0$

즉, $a=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x-b)^2$ …… ㉠

이 성립한다.

또, 조건 (나)에서 $h'(3)=2$을 만족하므로 $h(x)=f(k(x))$의 양변을 미분하면 $h'(x)=f'(k(x))\times k'(x)$

식에 $x=3$을 대입하면

$f'(k(3))\times k'(3)=2$ …… ㉠

그런데, $3=\{(k(3)\}^3+\{(k(3)\}+1$에서

$(k(3)-1)(\{(k(3)\}^2+k(3)+2)=0$

$\therefore k(3)=1$ …… ㉡

㉠을 미분하면 $f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로

$f'(k(3))=f'(1)$

$\quad=(1-b)^2+2(1-b)$

$\quad=(1-b)(3-b)$

또, $x=\{(k(x)\}^3+\{(k(x)\}+1$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$1=(3\{(k(x)\}^2+1)k'(x)$

$x=3$을 대입하면 $1=(3\{k(3)\}^2+1)k'(3)$

ⓒ을 대입하면 $k'(3)=\dfrac{1}{4}$

ⓐ에 대입하면 $(1-b)(3-b)\times\dfrac{1}{4}=2$

$b^2-4b+3=8,\ b^2-4b-5=0$

$(b+1)(b-5)=0$

이때, 조건에서 $a<b$, 즉, $b>0$ ($\because a=0$)이므로

$b=5$

따라서 $f(x)=x(x-5)^2$이므로 $x=8$을 대입하면

$f(8)=8\times3^2=72$

9) [정답] 15

[해설]
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.
함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$h(0)=\lim\limits_{x\to0-}h(x)=\lim\limits_{x\to0+}h(x)$에서 $h(0)=0$이고 $f(g^{-1}(0))=0$
$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0,\ g(\alpha)=0$
$f(\alpha)=0$에서

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉠

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$h(1)=\lim\limits_{x\to1-}h(x)=\lim\limits_{x\to1+}h(x)$에서 $h(1)=0$이고 $f(g^{-1}(1))=0$
$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로 $f(g^{-1}(1))=0$은 성립한다.
함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-}$에서

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(g^{-1}(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x}=1$

$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'(\alpha)}$이므로

$f'(\alpha)\times\dfrac{1}{g'(\alpha)}=1,\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$

$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b$ …… ㉡

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$에서

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(g^{-1}(x))}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim\limits_{t\to0-}\dfrac{-\sin\pi t}{\pi t}=-1$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(g^{-1}(x))}{x-1}=-1$에서

$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$

$g^{-1}(1)=0$이고 $(g^{-1})'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}$이므로

$f'(0)\times\dfrac{1}{g'(0)}=-1$

$f'(0)=-1$이므로 $g'(0)=b=1$
삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고 $g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.
$g(\alpha)=0,\ g(0)=1$이므로 $\alpha<0$
ⓐ에 의하여 $\alpha=-1$
ⓒ에 의하여 $a=1$

$g(x)=x^3+x^2+x+1$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

10) [정답] 20

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\dfrac{k}{x}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2},\ g'(x)=-\dfrac{k}{x^2}$

직선 $l$과 $m$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면
점 P, Q의 $x$좌표가 모두 2이므로

$\tan\alpha=f'(2)=-\dfrac{1}{4},\ \tan\beta=g'(2)=-\dfrac{k}{4}$

두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\beta-\alpha)|=1$

$$\left|\dfrac{-\dfrac{k}{4}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{1+\left(-\dfrac{k}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{4}\right)}\right|=1$$

$4|k-1|=|16+k|$
그런데 $k>1$이므로 $4(k-1)=16+k$
$\therefore\ 3k=20$

11) [정답] 9

[해설]

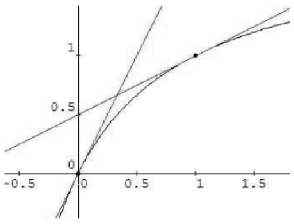
$f(x)=\frac{2x}{x+1}=2-\frac{2}{x+1}$

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

$f'(0)=2,\ f'(1)=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 12\tan\theta=9$




12) [정답] ④

[해설]

$y'=3^x\ln3$이므로 곡선 $y=3^x$에 접하는 접선의 방정식은

$y-3^k=3^k\ln3\,(x-k)$

따라서 점 A의 $x$좌표는

$-3^k=3^k\ln3\,(x-k),\ x-k=-\frac{1}{\ln3}$

$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln3}$

$y'=a^{x-1}\ln a$이므로 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 접선의 방정식은

$y-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a\,(x-k)$

따라서 점 B의 좌표는

$-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a\,(x-k),\ x-k=-\frac{1}{\ln a}$

$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln a}$

따라서,

$\overline{\mathrm{AH}}=\mathrm{k}-\left(\mathrm{k}-\frac{1}{\ln3}\right)=\frac{1}{\ln3}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\mathrm{k}-\left(\mathrm{k}-\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}$

이므로

$\frac{1}{\ln3}=\frac{2}{\ln a},\ \ln a=\ln9$

$\therefore\ a=9$

13) [정답] ③

[해설]

$g(x)=a^x$에 대하여 $g'(x)=a^x\ln a$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 방정식은

$y-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{\ln a}$

$x=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a},\ 0\right)$ … ㉠

조건에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로

점 D는 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선과 $x$축의 교점이다.

그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$이다.

㉠에서 $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4},\ \ln a=\frac{4}{3},\ a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$이므로 $g(2)=e^{\frac{8}{3}}$이다.

[참고]

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a},\ 0\right)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2$이므로

$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2=\left(\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$, $\ln a=\frac{4}{3}$, $a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$이므로

$g(2)=e^{\frac{8}{3}}$

14) [정답] ④

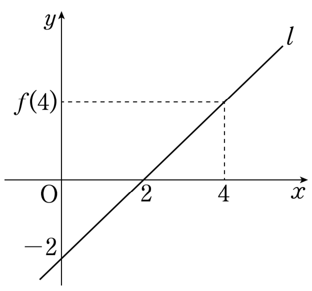
[해설]

조건 (가)에서 직선 $l$이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서

직선 $l$과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의

넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 $l$의 $x$절편과 $y$절편은

각각 2, $-2$이다.




함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선 $l$은 기울기가 1이고,

점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 $l$의 방정식은 $y=x-2$이다.

따라서 $f(4)=2$, $f'(4)=1$이다.

$g(x)=xf(2x)$에서

$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$g'(2)=f(4)+4f'(4)$
$=2+4$
$=6$

15) [정답] ④

[해설]

직선 $y=-x+k$와 $y=x$가 수직이다.

직선 $y=-x+k$와 두 함수$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 되려면

직선 $y=-x+k$가 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점에서 접선의 기울기가 1일 때이다.

$f'(x)=\frac{1}{x}=1 \ \therefore\ x=1$

$g'(x)=e^{x-4}=1 \ \therefore\ x=4$

$(1,\ 4)$, $(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+5$이므로 $k$의 값은 5이다.

16) [정답] ④

[해설]

역함수는 $y=x$ 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$ 의 접선 중 기울기가 1 인 접선에서

$y=x$ 까지 거리의 두 배가 $l_k$ 이다.

$f'(x)=1$ 인 접점의 좌표는 $(1,\ \ln\frac{1}{k})$ 이다.

$$d=\frac{\left|1-\ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$$

$l_k=2d=(1+\ln k)\sqrt{2}\geq 3\sqrt{2}$ 에서 $k\geq e^2$

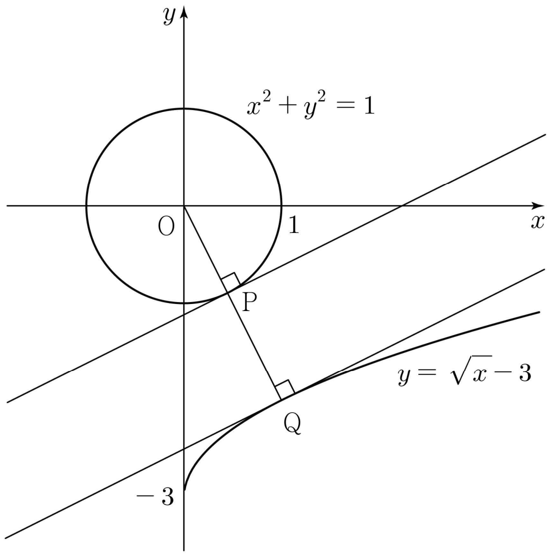
$\therefore k$ 의 최솟값은 8

17) [정답] 26

[해설]

곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 임의의 점 Q의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}-3)$ $(t\geq 0)$이라 하고, 원점을 O라 하자.

선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 점 Q에 대하여 선분 OQ와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점이 P이고, 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.




곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t}-3)\ (t>0)$ 에서의 접선과 직선 OQ는 수직이다.

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}\times\frac{\sqrt{t}-3}{t}=-1$$

$$2(\sqrt{t})^3+\sqrt{t}-3=0$$

$$(\sqrt{t}-1)(2t+2\sqrt{t}+3)=0$$

$t=1$ 이므로 $\mathrm{Q}(1,\ -2)$ 이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-1$$
$$=\sqrt{5}-1$$

$a=5,\ b=1$ 이므로 $a^2+b^2=26$

18) [정답] 3

[해설]
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점을 $(s,\ f(s))$라 하자.
$t$가 정해져 있다면 점 $(t,\ 0)$에서 $(s,\ f(s))$사이의 거리가 최소일 때, $(t,\ 0)$과 $(s,\ f(s))$를 연결한 직선은 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선과 수직이다.
따라서 $\dfrac{-f(s)}{t-s}=-\dfrac{1}{f'(s)}$이고,
$t=s+f(s)f'(s)\cdots\cdots$㉠
이때, $g(t)=e^s+s,\ h(g(t))=t$이므로,
$h(1)$을 찾기 위해 $g(t)=1$이 되는 $s$를 찾으면 $s=0$이고,
㉠에서 $s=0$일 때, $t=2$이다.
한편, $g'(t)=(e^s+1)\dfrac{ds}{dt}\cdots\cdots$㉡
㉠을 미분하면
$1=\{1+f'(s)f'(s)+f(s)f''(s)\}\dfrac{ds}{dt}\cdots\cdots$㉢
$s=0$을 대입하면 $f'(0)=2,\ f''(0)=1$이므로 ㉢에 대입하면
$1=6\dfrac{ds}{dt},\ \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{6}$
㉡에 대입하면 $g'(2)=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}=\frac{1}{g'(2)}=3$$

[다른 풀이]
점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두 점 $(t,\ 0)$과 $(x,\ f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x,\ f(x))$에서의 $y=f(x)$에서의 접선은 서로 수직이다.
이때 $x=s$이므로
$\dfrac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1,\ t=s+f(s)\times f'(s)\cdots\cdots$㉠
$h(1)=a$라 하면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(a)}$이다.
$t=a$일 때 $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서
$e^b+b=1,\ b=0$이다.
㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$이다.
㉠의 양변을 $s$로 미분하면

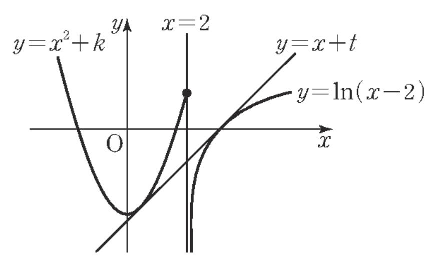
$$\frac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$$
$$=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$$

이므로
$t=2,\ s=0$일 때 $\dfrac{dt}{ds}=6$이다.
$g(t)=f(s)$의 양변을 $s$로 미분하면
$g'(t)\times\dfrac{dt}{ds}=f'(s)$이므로 $g'(2)\times 6=f'(0)$,
$g'(2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이다.

$$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$$

19) [정답] ④

[해설]




함수 $g(t)$의 불연속이 되는 점이 한 개이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=x+t$가 두 곡선 $y=x^2+k$와 $y=\ln(x-2)$에 동시에 접해야 한다.
곡선 $y=\ln(x-2)$의 접선의 기울기가 1이므로
$y'=\dfrac{1}{x-2}=1$에서 $x=3$

그러므로 접점의 좌표는 (3, 0)이다.

직선 $y=x+t$가 점 (3, 0)을 지나므로

$0=3+t$에서 $t=-3$

한편, 곡선 $y=x^2+k$의 접선의 기울기가 1이므로

$y'=2x=1$에서 $x=\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^2+k$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}+k\right)$에서의 접선의 방정식이

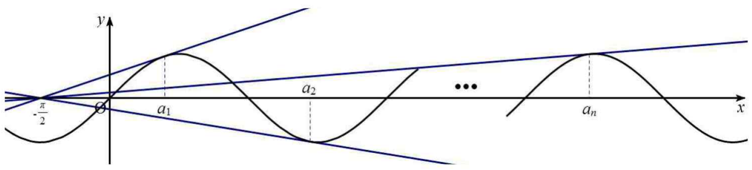
$y=x+t$, 즉 $y=x-3$이므로

$\frac{1}{4}+k=\frac{1}{2}-3$

따라서 $k=-\frac{11}{4}$

20) [정답] ⑤

[해설]




ㄱ. $(\sin x)'=\cos x$이므로 점 $(a_n,\ \sin a_n)$에서의 접선의 기울기는

$\cos a_n$ …… ㉠

이 접선이 두 점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $(a_n,\ \sin a_n)$을 지나므로 기울기는

$\dfrac{\sin a_n-0}{a_n+\frac{\pi}{2}}$ …… ㉡

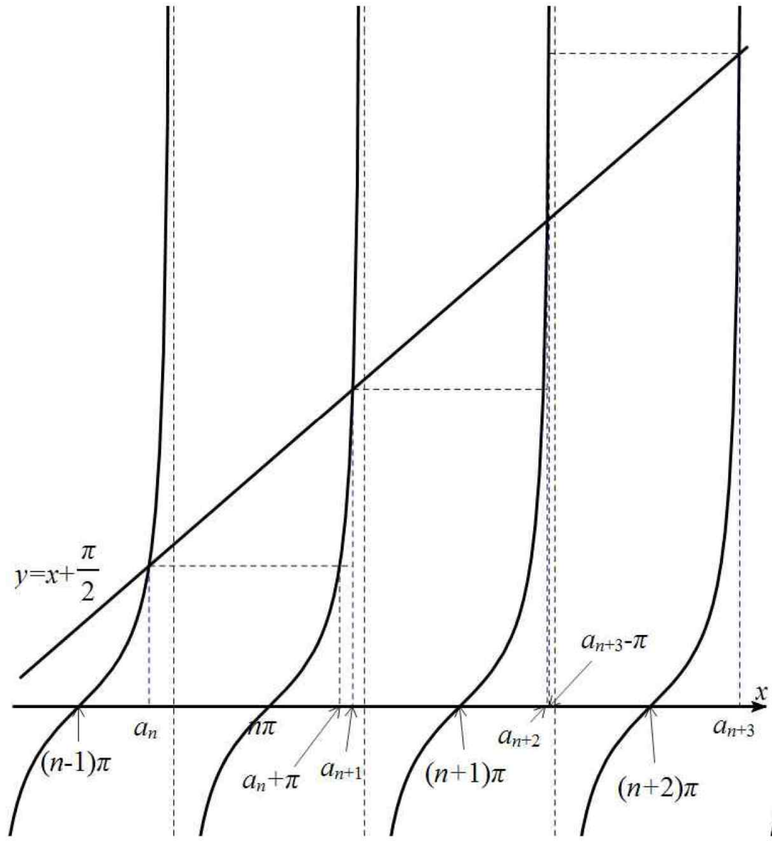
㉠, ㉡에서

$\cos a_n=\dfrac{\sin a_n}{a_n+\frac{\pi}{2}}$

이므로 $\dfrac{\sin a_n}{\cos a_n}=a_n+\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $\tan a_n=a_n+\frac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $a_n$은 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=x+\frac{\pi}{2}$의 교점의 $x$좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이다.




위 그림에서 $a_{n+1}>a_n+\pi$이므로 $a_{n+1}-a_n>\pi$임을 알 수 있다. 따라서

$\tan a_{n+1}-\tan a_n=\left(a_{n+2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(a_n+\frac{\pi}{2}\right)$

$=a_{n+2}-a_n$

$=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)$

$>\pi+\pi=2\pi$ (참)

ㄷ. ㄴ의 그림에서

$a_{n+1}-(a_n+\pi)>(a_{n+3}-\pi)-a_{n+2}$

이므로

$a_{n+1}-a_n>a_{n+3}-a_{n+2}$

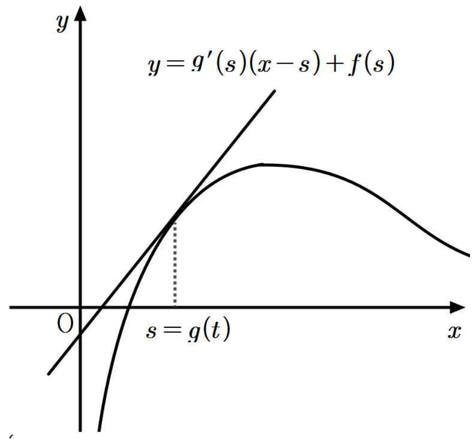
따라서

$a_{n+1}+a_{n+2}>a_n+a_{n+3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21) [정답] ②

[해설]




$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 기울기가 $t$인 직선 $l$과의 접점의 $x$좌표를 $s$라 하자.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$x=s$에서의 기울기는 $f'(s)=\dfrac{1-\ln s}{s^2}=t$이다.

즉, $s=g(t)$이고 $t=\dfrac{1-\ln s}{s^2}$ …… ㉠

또, 원점 $(0,\ 0)$에서 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기와 접점의 좌표를 구하기 위해 접점의 좌표를 $\left(r,\ \dfrac{\ln r}{r}\right)$이라고 하면

두 점 $(0,\ 0)$과 $\left(r,\ \dfrac{\ln r}{r}\right)$의 기울기는 $\dfrac{\frac{\ln r}{r}-0}{r-0}=\dfrac{\ln r}{r^2}=a$

$x=r$에서의 접선의 기울기는 $f'(r)=\dfrac{1-\ln r}{r^2}=a$이므로 두 식을 연립하면 $\dfrac{\ln r}{r^2}=\dfrac{1-\ln r}{r^2}$

$$\therefore\ \ln r=\frac{1}{2},\ r=\sqrt{e}$$

$$\therefore f'(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}=a \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 ㉠으로부터

$$g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{ds}}$$

$$=\frac{1}{\frac{-\frac{1}{s}\times s^2-(1-\ln s)2s}{s^4}}$$

$$=\frac{1}{\frac{-s-2s(1-\ln s)}{s^4}}$$

$$=\frac{s^3}{-1-2(1-\ln s)}$$

$$=\frac{s^3}{-3+2\ln s}$$

즉, $g'(t)=\dfrac{s^3}{-3+2\ln s}$ …… ㉢

㉡에서 $a=\dfrac{1}{2e}$일 때 $s=r=\sqrt{e}$이므로 이를 ㉢에 대입하면

$$g'(a)=g'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{e\sqrt{e}}{-2}$$

$$\therefore\ ag'(a)=\frac{1}{2e}\times-\frac{e\sqrt{e}}{2}=-\frac{\sqrt{e}}{4}$$

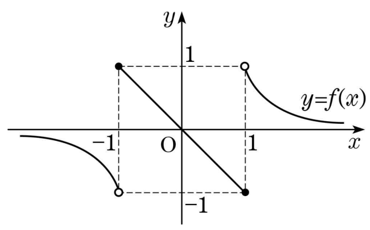
22) [정답] ④

[해설]

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다. 또, 함수 $f(x)$는 $x\neq-1,\ x\neq1$인 모든 $x$에서 연속이고, 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 각각 감소한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 원점에서만 만난다.

ㄴ. (반례) 함수 $f(x)=\begin{cases}-x & (|x|\leq1)\\ \dfrac{1}{x} & (|x|>1)\end{cases}$은 주어진 조건을 만족시키지만 $x$축과 원점에서만 만난다.




ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$f'(c_1)=\dfrac{-1-0}{1-0}=-1$을 만족시키는 실수 $c_1$이 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로 $f'(c_2)=\dfrac{1-0}{-1-0}=-1$을 만족시키는 실수 $c_2$가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

그러므로

$f'(\alpha)=-1$을 만족시키는 실수 $\alpha$가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $h(3)=f(g(3)=f(1)=5$ (거짓)

ㄴ. $h'(2)=(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)$
$2<g(2)<3$이고, $2<x<3$에서 $f'(x)\le 0$
$f'(g(2))\le 0$이고 $g'(2)\le 0$이므로 $h'(2)\ge 0$ (참)

ㄷ. $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$에 대하여 구간 $(3,\ 4)$에서 $0<g(x)<1$이므로 $f'(g(x))>0$이고 $g'(x)<0$이다.
따라서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x=e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$이고

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)$

$=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f'(a)=0,\quad f''(a)>0$이어야 한다. 이때 $e^{-2a}>0$이므로

$-2\sin a+\cos a=0$ ⋯ ㉠, $3\sin a-4\cos a>0$ ⋯ ㉡이 성립해야 한다. ㉠에서 $\cos a=2\sin a$이므로 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-5\sin a>0$

따라서 $\tan a>0$이고, $\sin a<0$이므로 $\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\cos a=\dfrac{1}{\sec a}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\therefore\ \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because\ \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

<다른 풀이>

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x=-e^{-2x}(2\sin x-\cos x)$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a-\cos a)=0$에서 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

ⅰ) $0<a<\dfrac{\pi}{2}$일 때

$0<x<a$이면 $\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$ $\therefore\ f'(x)>0$

$a<x<\dfrac{\pi}{2}$이면 $\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$ $\therefore\ f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ⅱ) $\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$일 때

$\pi<x<a$이면 $\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$ $\therefore\ f'(x)<0$

$a<x<\dfrac{3\pi}{2}$이면 $\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$ $\therefore\ f'(x)>0$

따라서 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=\dfrac{5}{4}$에서 $\sec a=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because\ \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

<다른 풀이>

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면 $f'(x)=\dfrac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}=-\dfrac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$

이때 삼각함수의 합성에 의해서

$2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ 이므로 (단, $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$) $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$ 이때 $f'(x)=0$에서 $\sin(x-\alpha)=0$이므로

$x-\alpha=0$ 또는 $x-\alpha=\pi$ $\therefore\ x=\alpha$ 또는 $x=\pi+\alpha$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi+\alpha$ | $\cdots$ | $(2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $f(\pi+\alpha)$ | ↗ | |

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\pi+\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ a=\pi+\alpha\ \therefore$

$\cos a\ =\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

25) [정답] ②

[해설]

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$이므로

$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$

$\quad=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

$\quad=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$

이므로 $g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2)=\dfrac{3}{4}$

( i ) $x=1$일 때

$x=1$일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2)=0$이므로

$x=1$ 부근에서 $3-4\sin(6\pi(x-1)^2)>0$이다.

이때 $x-1$은 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$도 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

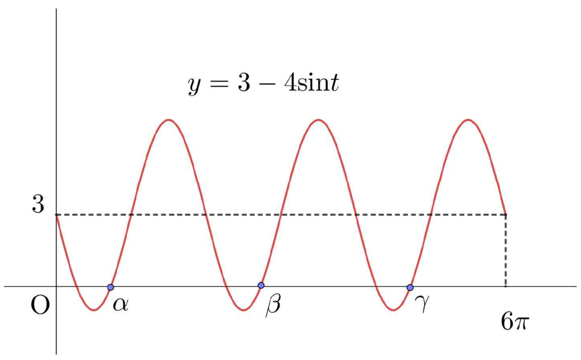
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

( ii ) $1<x<2$일 때

$12\pi(x-1)>0$이고, 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 0에서 $6\pi$까지 증가한다.

즉, $f(x)=t$라 하면 $x$의 값이 1에서 2까지 증가할 때 $t$의 값은 0에서 $6\pi$까지 증가한다.

이때 함수 $y=3-4\sin t$의 그래프는 다음과 같으므로 $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 좌우에서 $y=3-4\sin t$의 값은 음에서 양으로 변한다.




따라서 $f(x)=\alpha,\ \beta,\ \gamma$인 $x$의 좌우에서 $y=3-4\sin f(x)$의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한 $x$는 세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 $1<x<2$에서 극소가 되는 $x$의 개수는 3이다.

(iii) $0<x<1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여

$f(1-x)=f(1+x)$

가 성립한다.

이때

$g(1-x)=3f(1-x)+4\cos f(1-x)$

$\quad=3f(1+x)+4\cos f(1+x)$

$\quad=g(1+x)$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수도 3이다.

( i ), ( ii ), (iii)에서 구하는 $x$의 개수는

$1+3+3=7$

이다.

26) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=e^x(x^2+ax+b)+e^x(2x+a)$

$\quad=e^x\{x^2+(a+2)x+a+b\}$

$g'(x)=-e^{-x}(x^2+ax+b)+e^{-x}(2x+a)$

$\quad=-e^{-x}\{x^2+(a-2)x-a+b\}$

미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 각각 $x=-3,\ x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=0,\ g'(2)=0$이다.

$f'(-3)=e^{-3}\{9-3(a+2)+a+b\}=0$

$\therefore\ 2a-b=3$ ……㉠

$g'(2)=-e^{-2}\{4+2(a-2)-a+b\}=0$

$\therefore\ a+b=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=-1$

$f'(x)=e^x(x^2+3x)=e^x\cdot x(x+3)$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ m_1=f(0)=e^0\cdot(0+0-1)=-1$

$g'(x)=-e^{-x}(x^2-x-2)=-e^{-x}(x-2)(x+1)$

이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ m_2=g(-1)=e^1(1-1-1)=-e$

$\therefore\ m_1+m_2=-e-1$

27) [정답] ①

[해설]

$a=-1$일 때 구간 $[0,\ 2)$에서 $f(x)=x+1$이므로

$x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다.

이것은 모순이므로 $a\neq-1$

구간 $[0,\,2)$ 에서 $f(x)$ 가 극솟값을 갖도록 하는 $a$ 의 값의 범위를 구하면

$f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$ 에서 $f'(x)=\dfrac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(ⅰ) $a<-a-2$ 일 때
$a<-a-2$ 에서 $a<-1$ 이고,
$x=-a-2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$ 에서 $f(x)$ 는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,\,2)$ 에서 극솟값을 갖는다.
즉 $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$
$a$ 는 정수이므로 $a=-3$

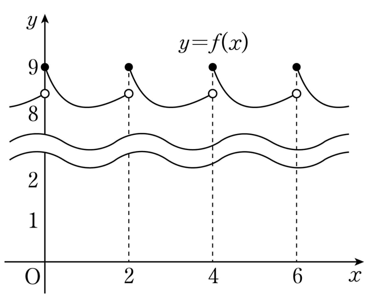
(ⅱ) $a>-a-2$ 일 때
$a>-a-2$ 에서 $a>-1$ 이고,
$x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$ 에서 $f(x)$ 는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,\,2)$ 에서 극솟값을 갖는다.
즉 $0<a<2$
$a$ 는 정수이므로 $a=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서 조건을 만족하는 정수 $a$ 의 값은 $-3$ 또는 1

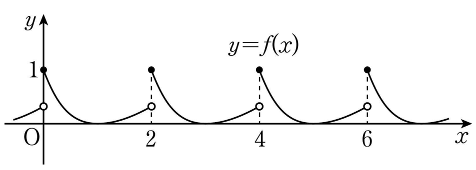
따라서 모든 정수 $a$ 의 값의 곱은 $(-3)\times1=-3$

[보충 설명]

(ⅰ) $a=-3$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.




(ⅱ) $a=1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.




28) [정답] ③

[해설]

$y=\ln x$를 $x$에 대하여 미분하면 $y'=\dfrac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\,\ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t)$

$\therefore r(t)=t-t\ln t$

점 $\mathrm{Q}(2t,\,\ln 2t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 2t=\dfrac{1}{2t}(x-2t)$

$\therefore s(t)=2t-2t\ln 2t$

$f(t)=r(t)-s(t)=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

$f'(t)=2\ln 2+\ln t=0$에서 $t=\dfrac{1}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ |

따라서 극솟값은 $-\dfrac{1}{4}$

29) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$f''(x)=\dfrac{1}{27}(12x^2-36x+24)=\dfrac{1}{27}(x-1)(x-2)$

$f''(2)=0$이고 좌우에서 부호가 바뀌므로 변곡점이다(참)

ㄴ. $f(x)=x$

$\dfrac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)=x$에서

$x^4-6x^3+12x^2-8x=0$

인수분해하면

$=\dfrac{1}{27}x(x-2)^3=0$에서 실근은 $0,\,2$이므로

양의 실근은 2뿐이다(참)

ㄷ.$f(2)=2$, $f'(2)=1$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(2)}=1$$

$0<x<2$에서 $f(x)<x$이므로 $f(x)<g(x)$

$x\geq 2$에서 $f(x)>x$이므로 $f(x)\geq g(x)$

$H(x)=|f(x)-g(x)|$라 하면

$x<2$에서 $H(x)=g(x)-f(x)$

$x\geq 2$에서 $H(x)=f(x)-g(x)$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=1$이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=0$$

같은 방법으로 $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}=0$

$\therefore H(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다(참)

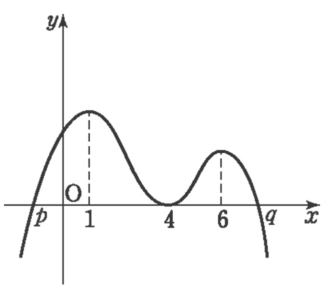
30) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=0$에서

$x=p,\ 4,\ q$이고 이 때,

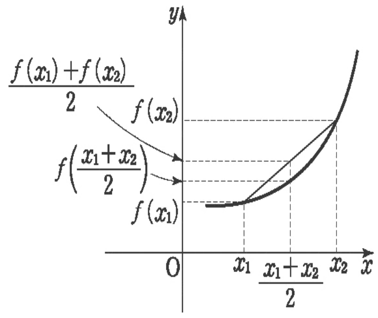
$x=p,\ q$ 각각의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다. ($x=p$에서 극소, $x=q$에서 극대) $\therefore$거짓




ㄴ. 개구간 $(4,\ 6)$에서 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$는 개구간 $(4,\ 6)$에서 아래로 볼록이다.

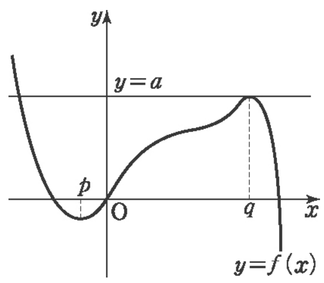
오른쪽 그림에서

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\therefore$ 참




ㄷ. ㄱ의 그림에서 $x=p$ 에서 극소, $x=q$에서 극대이며 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

이 때, $y=a$ $(a>0)$가 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 극대점을 지나야 한다. 따라서 극대값은 $a$이다.
$\therefore$ 참




31) [정답] ③

[해설]

| $x$ | $x<1$ | $x=1$ | $1<x<3$ | $x=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | 0 | | 1 |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ | 0 |
| $f(x)$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |

위의 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다. 또한, $x=1$일 때, $f'(x)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀌게 된다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서

$g'(x)=\cos(f(x))\times f'(x)$

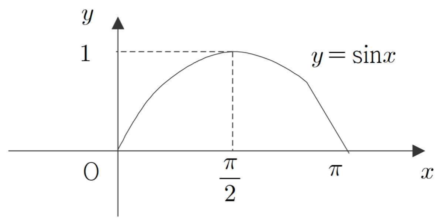
$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)$

$=\cos\pi\times f'(3)=(-1)\times 1=-1$ (참)

ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$g(x)=\sin(f(x))$의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.




$x=1$ 일 때,

$g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$

$x=3$ 일 때,

$g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)=\cos\pi\times 1=-1$

따라서 $1<a<b<3$ 에서

$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)$
$+\cos(f(x))\times f''(x)$

$x=1$ 일 때,

$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)$
$+\cos(f(1))\times f''(1)$

$=-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$

이지만 $x<1$ 과 $x>1$ 에서 $g''(x)$ 의 부호가 같으므로 $x=1$ 에서 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32) [정답] ③

[해설]

$f(x)$에 대한 증감표를 작성하면

| $x$ | − | $b$ | − | 0 | + | $c$ | + | $d$ | + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | + | 0 | − | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f'(x)$ | − | | + | | + | | − | | + |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

ㄱ. $f(x)$는 열린 구간 $(b, 0)$에서 증가한다.(참)

ㄴ. $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, e]$에서 $x=b,\ c,\ d$에서 극값을 가지므로 3개의 극값을 갖는다. (거짓)

33) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(x)=x+\sin x$에서

$f'(x)=1+\cos x,\ f''(x)=-\sin x$

$0<x<\pi$에서 $0<\sin x<1$

$\therefore -1<f''(x)<0$

따라서, $f(x)$는 $0<x<\pi$에서 위로 볼록하다. (참)

ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))f'(x)=(1+\cos f(x))(1+\cos x)$

$0<x<\pi$에서 $-1<\cos x<1$, $\cos f(x)>0$이므로

$1+\cos f(x)>0$, $1+\cos x>0\ \therefore g'(x)>0$

따라서, $g(x)$는$0<x<\pi$에서 증가한다. (참)

ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

$g(x)$가 $[0,\pi]$에서 연속이고, $(0,\pi)$에서 미분가능하므로

$f'(x)=\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$인$x(0<x<\pi)$

가 적어도 하나 존재한다. (평균값 정리) (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

34) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x,\ f''(x)=2\cos x-x\sin x$

ㄱ. $f'(0)=0,\ f''(0)=2>0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 생각하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ t\sin t)$에서의 접선의 방정식은

$y=(\sin t+t\cos t)(x-t)+t\sin t$

위 직선이 원점을 자날 때,

$0=(\sin t+t\cos t)(0-t)+t\sin t$

$t^2\cos t=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $\cos t=0$

$t=2n\pi+\frac{\pi}{2}$( $n$은 정수 )일 때, $f'(x)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(2n\pi+\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$이다.

따라서 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다. (참)

ㄷ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$이고 $f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)<0$이므로

$f(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $x=a$를 기준으로 양에서 음으로 바뀌도록 하는 $a$가 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 $a$가 구간

$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다. (참)

따라서 ㄱ, , ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄴ. 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$와 점 $(t, t)$에서 접할 때,

$f(t)=t$이고 $f'(t)=1$이다.

$f(t)=t$에서 $t\sin t=t$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$( $n$은 정수)

$t=0$일 때, $f'(t)=0$이고

$t=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$일 때, $f'(t)=1$이므로

함수 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 점

$\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}, 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 접한다. (참)

35) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $f(x)=x^ne^{-x}$에서

$f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\left(\dfrac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$ …… ㉠

또한 $f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로

$f'\left(\dfrac{n}{2}\right)=\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n-1}\times e^{-\frac{n}{2}}\times\dfrac{n}{2}=\left(\dfrac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로 $f'(n)=0$

또한 $0<x<n$일 때 $f'(x)>0$이고, $x>n$일 때

$f'(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. [반례] $f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$에서

$f''(x)=(n-1)x^{n-2}e^{-x}(n-x)+x^{n-1}(-e^{-x})(n-x)$

$+x^{n-1}e^{-x}\times(-1)$

$=x^{n-2}e^{-x}(x^2-2nx+n^2-n)$

$n=4$일 때, $f''(x)=x^2e^{-x}(x^2-8x+12)$이므로

$f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가

바뀌지 않으므로 점 $(0, 0)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라

할 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $f(x)=\cos x+2x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+2\sin x+2x\cos x=\sin x+2x\cos x$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta(0<\alpha<\beta<2\pi)$에서 극값을

가지므로

$f'(\alpha)=\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha=0$이면 $\sin\alpha=\pm1$이고, $f'(\alpha)\neq0$이므로 모순이다.

따라서 $\cos\alpha\neq0$이고 $\sin\alpha=-2\alpha\cos\alpha$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\alpha$, $\tan\alpha=-2\alpha$

함수 $y=\tan x$의 주기는 $\pi$이므로

$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$ (참)

ㄴ. ㄱ과 같은 방법으로 $\tan\beta=-2\beta$이므로 그림에서 곡선

$y=g(x)$와 직선 $y=-2x$가 만나는 두 점을 $A(\alpha, \tan\alpha)$,

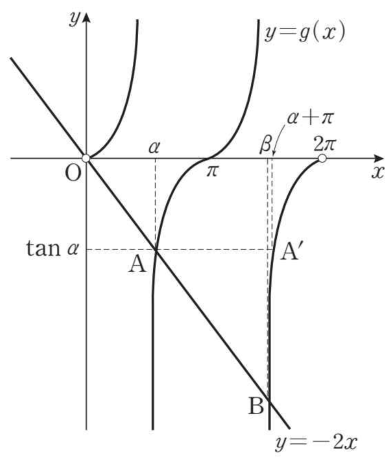
$B(\beta, \tan\beta)$라 하고, 점 A를 $x$축의 방향으로 $\pi$만큼

평행이동한 점을 $A'(\alpha+\pi, \tan\alpha)$라 하면 점 A′은 곡선

$y=g(x)$ 위의 점이고, 두 점 A′, B에서의 접선의

기울기는 각각 $g'(\alpha+\pi)$, $g'(\beta)$이므로

$g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$ (참)




ㄷ. $-2\alpha=\tan(\alpha+\pi)$, $2\beta=-\tan\beta$이므로

$\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=\dfrac{\tan(\alpha+\pi)-\tan\beta}{\alpha+\pi-\beta}$는 직선 A′B의 기울기이다.

또 $g'(x)=(\tan x)'=\sec^2x$이므로

$g'(\alpha+\pi)=\sec^2(\alpha+\pi)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha+\pi)}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$

즉, $\sec^2\alpha$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A′에서의 접선의

기울기이다.

따라서 $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

37) [정답] ⑤

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$이므로 $h(x)$는 미분가능하고,

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x=b$에서 접하므로

$f(b)=g(b)$, $f'(b)=g'(b)$

$\therefore h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$ (참)

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 접하므로

$f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$

$\therefore h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$

한편, 모든 실수의 구간에서 함수 $h(x)$는 미분가능한 함수이고 $h(a)=h(b)=0$이므로 평균값의 정리(롤의 정리)에 의하여 $h'(c)=0$을 만족하는 실수 $c$가 구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 방정식 $h'(x)=0$은 적어도 $x=a$, $b$, $c$의 3개의 근을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)$는 일차함수이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $g''(x)=0$이다.

$\therefore h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)$

그런데, 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $f''(a)=0$이고, $f'''(x)\neq 0$이다.

$\therefore h''(a)=0$, $g'''(a)\neq 0$

따라서 점 (a, h(a))는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\alpha, \beta, \gamma$는 방정식 $f(x)=x$의 근이므로

$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$

$\therefore f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta$

$f(f(\gamma))=f(\gamma)=\gamma$

따라서, $\alpha, \beta, \gamma$는 방정식 $f(f(x))=x$의 근이다. (참)

ㄴ. $f(x)-x$가 삼차식이므로

$h(x)=px^2+qx+r$로 놓을 수 있다.

$\therefore f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+h(x)$

$=\{f(x)-x\}g(x)+px^2+qx+r$

$f(f(\alpha))=p\alpha^2+q\alpha+r=\alpha \cdots$ ㉠

$f(f(\beta))=p\beta^2+q\beta+r=\beta \cdots$ ㉡

$f(f(\gamma))=p\gamma^2+q\gamma+r=\gamma \cdots$ ㉢

㉠-㉡에서 $p(\alpha^2-\beta^2)+q(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$

$\alpha\neq\beta$이므로 $p(\alpha+\beta)+q=1 \cdots$ ㉣

㉡-㉢에서 $p(\beta^2-\gamma^2)+q(\beta-\gamma)=\beta-\gamma$

$\beta\neq\gamma$이므로 $p(\beta+\gamma)+q=1 \cdots$ ㉤

㉣-㉤에서 $p(\alpha-\gamma)=0$

$\alpha\neq\gamma$이므로 $p=0$

㉣에서 $q=1$

㉠에서 $\alpha+r=\alpha$이므로 $r=0$

$\therefore h(x)=x$ (참)

ㄷ. $f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+x \cdots (*)$

조건(나),(다)에서

$f(3)=7$, $f(f(3))=5$이므로

$f(f(3))=\{f(3)-3\}g(3)+3$에서

$5=(7-3)g(3)+3 \quad \therefore g(3)=\frac{1}{2}$

$(*)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=\{f'(x)-1\}g(x)+\{f(x)-x\}g'(x)+1$

$x=3$을 대입하면

$f'(f(3))f'(3)=\{f'(3)-1\}g(3)+\{f(3)-3\}g'(3)+1$

조건(나)에서 $f'(3)=0$이므로

$0=(0-1)\times\frac{1}{2}+(7-3)g'(3)+1$

$4g'(3)=-\frac{1}{2} \quad \therefore g'(3)=-\frac{1}{8}$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

39) [정답] ⑤

[해설]

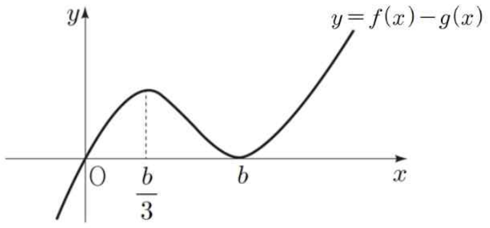
ㄱ. $f(x)=px^3+qx^2+rx$ $(p>0)$라 하고 $g(x)=mx\,(m\neq 0)$라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $-\frac{q}{3p}$이므로 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $a$이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 원점을

지나고 $x=b$에서 $x$축에 접하므로

$f(x)-g(x)=px(x-b)^2$이다.




$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$이므로

함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$

이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$이다.

$\therefore a=\frac{2b}{3}$이므로 $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

40) [정답] 15

[해설]

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 $x$ 에 대하여 미분하면

$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$

$f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$ , $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}$ , $-\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\frac{2a+b}{a}=0$ , $\frac{b+c}{a}=-3$ 이므로

$b=-2a$ , $c=-a$

$\therefore f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$

$0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1, x_2$ 에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$로

나누어 식을 정리하면 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}\ge -1$

$f(x)$ 가 $x\ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c)$ $(0\le x_1<c<x_2)$이다.

$\therefore f'(c)\ge -1$

즉, $x\ge 0$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값이 $-1$ 이고 $f(x)$ 의 변곡점에서

$f'(x)$ 의 최솟값을 가지므로

$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=0$ 에서 $x=-3, 1$

$x\ge 0$ 을 만족하는 $x=1$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 갖는다.

$f'(1)=-2ae=-1$ 에서 $a=\frac{1}{2e}$ $\therefore a\le\frac{1}{2e}$

따라서, $abc=a(-2a)(-a)=2a^3\le 2\left(\frac{1}{2e}\right)^3=\frac{\frac{1}{4}}{e^3}$이므로

$k=\frac{1}{4}$

$\therefore 60k=15$

41) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x$이고 $f''(x)=9ae^{3x}+be^x$

조건 (가)에서 $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f''(x_1)<0$, $f''(x_2)>0$ 또는 $f''(x_1)>0$, $f''(x_2)<0$

(i) $f''(x_1)<0$, $f''(x_2)>0$인 경우

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x_1\to\ln\frac{2}{3}-}f''(x_1)\le 0$, $\lim_{x_2\to\ln\frac{2}{3}+}f''(x_2)\ge 0$ …… ㉠

이고, 함수 $f''(x)$는 $x=\ln\frac{2}{3}$에서 연속이므로

$\lim_{x_2\to\ln\frac{2}{3}+}f''(x_2)=\lim_{x_1\to\ln\frac{2}{3}-}f''(x_1)=f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)\le 0$, $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)\ge 0$이므로 $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

(ii) $f''(x_1)>0$, $f''(x_2)<0$인 경우

같은 방법으로 $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

(i), (ii)에서 $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

$$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=9ae^{3\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}=9ae^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^3}+be^{\ln\frac{2}{3}}$$

$$=9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}a+\frac{2}{3}b=0$$

즉, $b=-4a$이므로

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x=3ae^{3x}-4ae^x$

$=3ae^x\left(e^{2x}-\frac{4}{3}\right)$

이때 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 구간 $[k,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이다.

$f'(x)=3ae^x\left(e^{2x}-\frac{4}{3}\right)\ge 0$에서 $a>0,\ e^x>0$이므로

$e^{2x}-\frac{4}{3}\ge 0,\ x\ge\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

즉, $k$의 값의 범위는 $k\ge\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$이므로 $k$의 최솟값은

$m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$f(x)=ae^{3x}+be^x=ae^{3x}-4ae^x$이므로

$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}=ae^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)^3}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$

$=a\times\left(\frac{4}{3}\right)^3-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}$

에서 $a=3,\ b=-4a=-4\times 3=-12$

따라서 $f(0)=a+b=3+(-12)=-9$

42) [정답] ③

[해설]

$g(x)=\sin(x^2+ax+b)$이므로

$$g'(x)=(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$$

조건 (가)에서 모든 실수 $x$에 대하여

$$(-2x+a)\cos(x^2-ax+b)=-(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$$

$x=0$을 대입하면 $a\cos b=0$

$0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos b\ne 0$이므로 $a=0$

$$g(x)=\sin(x^2+b),\ g'(x)=2x\cos(x^2+b)$$

$$g''(x)=2\cos(x^2+b)-4x^2\sin(x^2+b)$$

조건 (나)에서 점 $(k,\ g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$$g''(k)=0$$

$$2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$k=0$이면 $0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos b\ne 0$이므로 ㉠이 성립하지 않고, $\cos(k^2+b)=0$이면 ㉠에서 $\sin(k^2+b)=0$이므로 $\sin^2(k^2+b)+\cos^2(k^2+b)=1$이 성립하지 않는다.

따라서 $k\ne 0,\ \cos(k^2+b)\ne 0$

㉠에서 $\tan(k^2+b)=\frac{1}{2k^2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서

$$2k\sin(k^2+b)=2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$$

$$\tan(k^2+b)=\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $\frac{1}{2k^2}=\sqrt{3},\ k^2=\frac{\sqrt{3}}{6}$

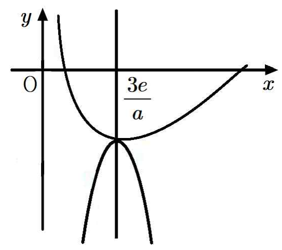
㉡에서 $\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+b\right)=\sqrt{3}$이고 $0<b<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{6}+b=\frac{\pi}{3},\ b=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

따라서 $a+b=0+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

43) [정답] ③

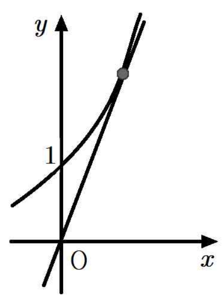
[해설]




$g(x)=-ax^2+6ex+b$라 하면
$g'(x)=-2ax+6e$ 즉, $g'(x)=0$인 점 $x=\frac{3e}{a}$에서 극대가 된다.

$h(x)=a(\ln x)^2-6\ln x$라 하면
$h'(x)=\frac{2a\ln x}{x}-\frac{6}{x}$ 즉 $h'(x)=0$인 점 $\ln x=\frac{3}{a}$, $x=e^{\frac{3}{a}}$에서 극소가 된다.

따라서 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\frac{3e}{a}$이고, (가), (나)조건에서 $e^{\frac{3}{a}}=\frac{3e}{a}$




$\frac{3}{a}=x$라 하면 $y=e^x$와 $y=ex$의 그래프는 그림과 같이 $e^x\ge ex$이고 등호는 $x=1$일 때 성립한다.

그러므로 $\frac{3}{a}=1$

$$\therefore a=3,\ c=e \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 식에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex+b & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

(가)조건에서 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=e$에서도 연속이어야 한다.

$$-3e^2+6e^2+b=3-6$$

$\therefore b=-3-3e^2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex-3-3e^2 & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\geq e)\end{cases}$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-3\left(\dfrac{1}{4e^2}\right)+\dfrac{6e}{2e}-3-3e^2$

$=-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

44) [정답] ③

[해설]

점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$사이의 거리 $g(t)$는

$g(t)=\dfrac{|t-t^3+6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-t^3+t+6|}{\sqrt{2}}$

$g(t)=0$에서 $(t-2)(t^2+2t+3)=0$

$\therefore\ t=2$

$h(t)=-t^3+t+6$이라 하면

$h'(t)=-3t^2+1$

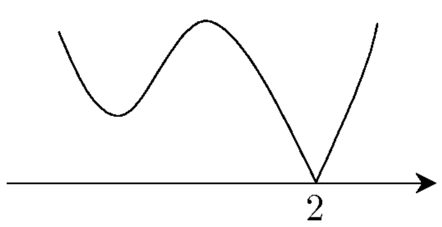
$h'(t)=0$에서 $t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이때, 함수 $y=h(t)$의 증가와 감소를 조사하면

다음 표와 같다.

| $t$ | $\cdots$ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $h(t)$ | ↘ | $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}+6$ | ↗ | $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}+6$ | ↘ |

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.




ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(t)$는 양수인 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분불가능하 다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45) [정답] 17

[해설]

$f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 $k$의 값을 $g(t)$이므로 $f'(k)=0$, 즉, $f'(g(t))=0$이 성립한다.

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x$에서

$f'(g(t))=\dfrac{2t\ln g(t)}{g(t)}-2g(t)=0$

$t\ln g(t)-\{g(t)\}^2=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)-\{g(\alpha)\}^2=0$

그런데 $g(\alpha)=e^2$이므로 $\alpha\ln e^2-(e^2)^2=0$

$2\alpha-e^4=0$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{e^4}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+\dfrac{tg'(t)}{g(t)}-2g(t)g'(t)=0$

$t=\alpha$를 대입하면

$\ln g(\alpha)+\dfrac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)}-2g(\alpha)g'(\alpha)=0$

$\ln e^2+\dfrac{\dfrac{e^4}{2}g'(\alpha)}{e^2}-2e^2g'(\alpha)=0$

$2+\dfrac{e^2}{2}g'(\alpha)-2e^2g'(\alpha)=0$

$\therefore\ g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\left(\dfrac{4}{3e^2}\right)^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9,\ q=8$이므로 $p+q=8+9=17$

46) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+1}$이므로 $f'(-x)=-f'(x)$ (참)

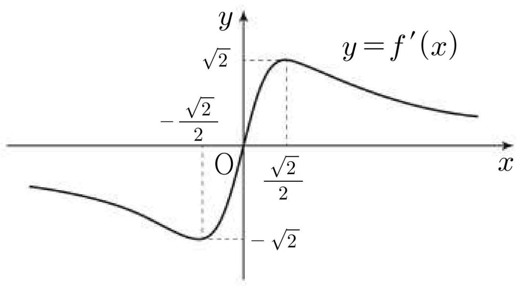
ㄴ. $f''(x)=\dfrac{4(2x^2+1)-4x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f'(x)$ | ↘ | $-\sqrt{2}$ | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ |

$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$이므로 $y=f'(x)$의

그래프는 그림과 같다.




따라서 함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다. (참)

ㄷ. ⅰ) $x_1=x_2$일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

ⅱ) $x_1\neq x_2$일 때, 닫힌 구간 $[x_1,\ x_2]$에서

평균값의 정리에 의하여 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)$인

$c$가 열린 구간 $(x_1,\ x_2)$에서 적어도 하나 존재한다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 $-\sqrt{2}\leq f'(x)\leq\sqrt{2}$이므로

$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(c)|\leq\sqrt{2}$이다.

∴ ⅰ), ⅱ)에 의하여 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에

대하여 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq\sqrt{2}\,|x_1-x_2|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

47) [정답] 24

[해설]

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이므로

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $f(x)+3=0$

$f(x)$가 이차함수이므로 조건 (가), (나)에 의해

$f'(a)=0,\ f(a)=6$

$f(b)+3=0,\ f(b+6)+3=0$이어야 한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p$라 하면

$f(b)+3=0,\ f(b+3)+3=0$이므로

$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$

즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠

이때, $f'(a)=0$이므로 $\frac{b+(b+6)}{2}=a$

$b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$이므로

$f(a)=-9p-3=6$에서 $p=-1$

방정식 $f(x)=0$에서

$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0,$

$(x-a)^2-6=0$

$\therefore x=a\pm\sqrt{6}$

따라서 $(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

48) [정답] ②

[해설]

$y'=e^t\{2t^2+(n+4)t+2n\}$, $n=3$에서부터 $n=6$일 때

$y'=0$인 경우를 찾으면 $n=3$일 때 $t=-2,\ -\frac{3}{2}$

$n=4$일 때 $t=-2$(중근), $n=5$일 때 $t=-2,\ -\frac{5}{2}$

$n=6$일 때 $t=-2,\ -3$, $g(t)=2t^2+(n+4)t+2n$이라고 하면 그래프와 t축의 교점 중 큰 값이 $y=f(x)$의 최솟값의 x좌표가 된다. $\frac{dy}{dt}=0$가 되는 $t$에 의해 결정되는 $x$의 값이 $\frac{dy}{dx}=0$가 되는 $x$이므로 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{y}{x}$에서 $\frac{y}{x}=2t^2+nt+n$

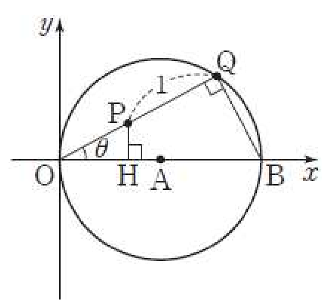
$n=3$일 때 $t=-\frac{3}{2}$, $n=4$일 때 $t=-2$, $n=5$일 때 $t=-2$,

$n=6$일 때 $t=-2$를 대입하여 계산해주면,

$\therefore 3+4+3+2=12$

49) [정답] 34

[해설]




주어진 원이 $x$축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 B라 하면

삼각형 OQB는 $\angle\mathrm{OQB}=\frac{\pi}{2}$인

직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\cos\theta$이고

$\overline{\mathrm{OP}}=2\cos\theta-1$

점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P의 $y$좌표는 선분 PH의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta=(2\cos\theta-1)\sin\theta$

$f(\theta)=(2\cos\theta-1)\sin\theta$ 라 하면

$f'(\theta)=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta$

$=-2\sin^2\theta+2\cos^2\theta-\cos\theta$

$=-2(1-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta-\cos\theta$

$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$이고

$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$이라 하면 $0<\theta<\alpha$일 때, $f'(\theta)>0$,

$\alpha<\theta<\frac{\pi}{3}$일 때 $f'(\theta)<0$이므로 $f(\theta)$는 $\theta=\alpha$에서

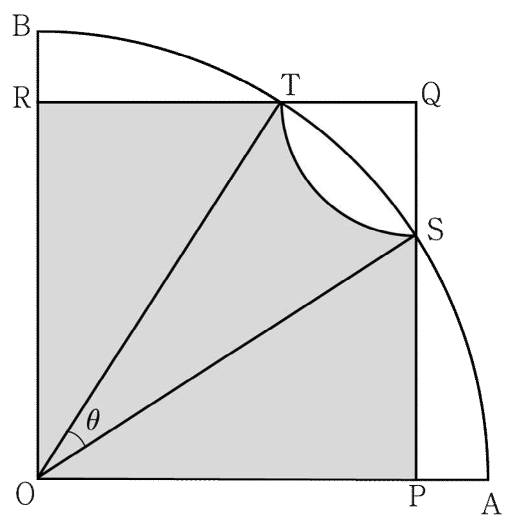
극대이면서 최대이다.

따라서 $a=1$, $b=33$이므로

$a+b=1+33=34$

50) [정답] 20

[해설]




$\angle\mathrm{SOT}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{SOP}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=t\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{4}\right)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{OP}}=\cos t$, $\overline{\mathrm{ST}}=\sin t$이므로

$D=\cos^2 t-(\cos t-\sin t)^2\frac{\pi}{4}=\cos^2 t-(1-2\sin t\cos t)\frac{\pi}{4}$

$=\cos^2 t-(1-\sin 2t)\frac{\pi}{4}$

$D'=-2\cos t\sin t+\frac{\pi}{4}\cdot 2\cos 2t=-\sin 2t+\frac{\pi}{2}\cos 2t=0$

즉, $\tan 2t=\frac{\pi}{2}$ $\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{4}\right)$를 만족하는 $t$에 대하여 $D$는 최댓값을 갖는다.

$\tan 2t=\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{2}{\pi}$ $\therefore\ 10\pi\tan\theta=10\pi\times\frac{2}{\pi}=20$

51) [정답] 109

[해설]

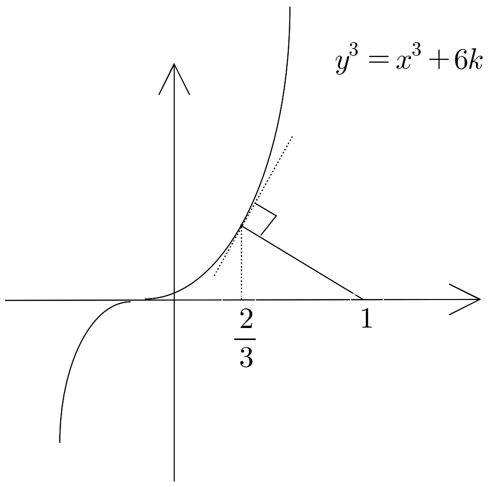
구하려고 하는 부분의 넓이는

(선분 $OB$와 포물선으로 둘러싸인 도형)

$-$(선분 $OA$와 포물선으로 둘러싸인 도형)

이므로 $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3$이다. ($\because$ 포물선과 이차곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\frac{1}{6}|a|(\beta-\alpha)^3$)이 값이 $k$이므로 $(s,\ t)$가 그리는 도형 $C$의 방정식은 $x^3-y^3=-6k\Leftrightarrow y^3=x^3+6k\cdots$ ①

곡선 $C$위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 $x$좌표가 $\frac{2}{3}$이려면 그림에서와 같이 $x=\frac{2}{3}$인 그래프 위의 점에서 접선과 수직인 직선이 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.




①의 식을 미분하면 $3y^2y'=3x^2$, $y'=\frac{x^2}{y^2}$

$x=\frac{2}{3}$에서 $y=a$ 라 두면 접선의 기울기는 $\frac{4}{9a^2}$

따라서 접선에 수직인 접선의 기울기는 $-\frac{9a^2}{4}$

직선의 식은 $y-a=-\frac{9}{4}a^2\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$(1,\ 0)$을 지나므로 $-a=-\frac{9}{4}a^2\times\frac{1}{3}$

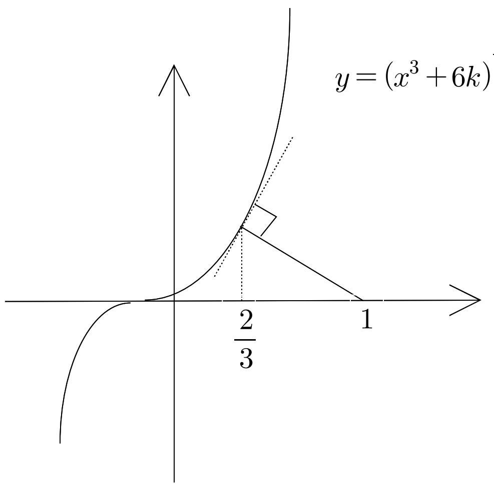
$a \neq 0$ 이므로 $a=\frac{4}{3}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3+6k$

$\therefore\ 6k=\frac{56}{27}$, $k=\frac{28}{81}$ $\therefore\ p+q=109$

<다른 풀이>

$y^3=x^3+6k \cdots$ ①

$y=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$ 곡선 $C$위의 점 중에서 점 (1, 0) 과의 거리가 최소인 점의 $x$ 좌표가 $\frac{2}{3}$ 이려면 그림에서와 같이 $x=\frac{2}{3}$인 그래프 위의 점에서 접선과 수직인 직선이 (1, 0)을 지나야 한다.




$f(x)=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$ 라 두면 $f(\frac{2}{3})=\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3+6k)^{-\frac{2}{3}}\times(3x^2)=x^2(x^3+6k)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^2\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{-\frac{2}{3}}$

$\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}=a$라 두면 $f(\frac{2}{3})=a$,

$f'(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}a^{-2}=\frac{4}{9a^2}$ 따라서 주어진 직선의 기울기를 $m$이라 두면 $f'(\frac{2}{3})\times m=-1$ $\therefore\ m=-\frac{9a^2}{4}$

따라서 직선의 식은 $y-a=-\frac{9}{4}a^2(x-\frac{2}{3})$

(1, 0)을 지나므로 $-a=-\frac{9}{4}a^2\times\frac{1}{3}$

$a \neq 0$ 이므로 $a=\frac{4}{3}$, $\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$

$(\frac{2}{3})^3+6k=\frac{64}{27}$ $\therefore\ 6k=\frac{56}{27}$, $k=\frac{28}{81}$ $\therefore\ p+q=109$

<다른 풀이>

곡선 $C$ 위의 점 $(x,\ y)$에서 $(1,\ 0)$까지의 거리를 $l$이라고 하면 $l^2=(x-1)^2+y^2$이다. $y=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$을 대입하면 ($\because$ ①)

$l^2=(x-1)^2+(x^3+6k)^{\frac{2}{3}}$이다.

$f(x)=(x-1)^2+(x^3+6k)^{\frac{2}{3}}$라고 하면 $l^2$이 최소일 때 $f(x)$도 최소이므로 주어진 조건에 의해서 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$이다.

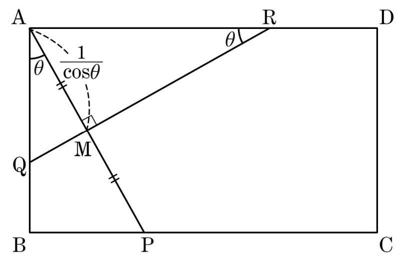
$f'(x)=2(x-1)+\frac{2}{3}(x^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot(3x^2)$

$f'\left(\frac{2}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(6k+\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3\cdot\frac{4}{9}=0$에서

$k=\frac{28}{81}$이다.

52) [정답] 27

[해설]




선분 AP의 중점을 M, $\angle\mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta\leq\frac{\pi}{3}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

삼각형 AQR에서 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 $\angle\mathrm{ARQ}=\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta-\sin^3\theta}$

$\sin\theta=t$라 하면 $\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{t-t^3}$

$f(t)=t-t^3\left(0<t\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이라 하자.

$f'(t)=1-3t^2=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 최댓값 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$을 가진다.

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{f(t)}\geq\dfrac{1}{f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ 4k^2=4\times\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27$

<다른 풀이>

$\overline{\mathrm{AQ}}=\mathrm{x}$라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{QP}}=x$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\mathrm{x}^2-(2-\mathrm{x})^2}=\sqrt{4\mathrm{x}-4}=2\sqrt{x-1}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2^2+(4\mathrm{x}-4)}=2\sqrt{\mathrm{x}}$

두 직각삼각형 ABP, RAQ는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}$에서

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}\cdot\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\dfrac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

$\overline{\mathrm{QR}}^2=f(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ (단, $1<x\leq4$)

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | (1) | $\cdots$ | $\dfrac{3}{2}$ | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $\dfrac{27}{4}$ | ↗ | $\dfrac{64}{3}$ |

$\therefore\ 4k^2=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)=27$

53) [정답] ④

[해설]

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 P라 하자.

동경 OP가 나타내는 각을 $\theta$라 하면 공통부분이 생기는 $\theta$의 범위는 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, 점 $\mathrm{G}(\cos\theta+1,\ \sin\theta+1)$이므로

공통부분의 넓이 $S(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$

$S'(\theta)=\cos2\theta-\sin\theta$

$=-(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

$\sin\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}\left(\because\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

| $\theta$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | |

$S(\theta)$는 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다.

따라서 최댓값은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

54) [정답] ⑤

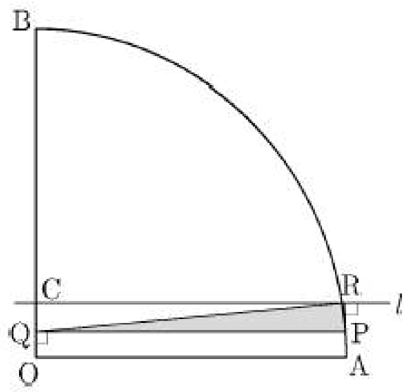
[해설]

삼각형 PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$이다.

직선 $l$이 호 AB와 만나는 점을 D라 하자.

( i ) 점 P가 점 A에서 출발하여 호 AD를 따라 점 D까지 움직일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}$와 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이가 모두 감소한다.




점 P가 점 A에 있을 때, 삼각형 PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{3}$이므로

점 P가 호 AD 위에 있을 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

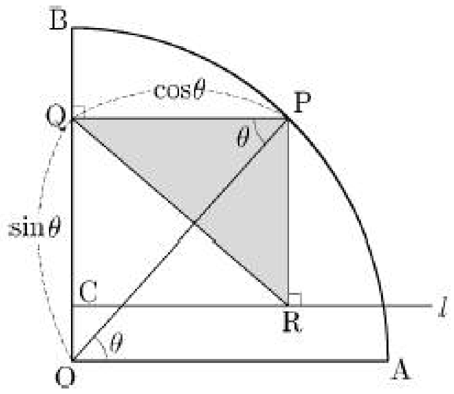
(ii) 점 P가 점 D에서 출발하여 호 AD를 따라 점 B까지 움직일 때,

$\angle\mathrm{OPA}=\theta\left(\alpha\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{DOA}=\alpha\right)$라 하면

$\angle\mathrm{OPQ}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\cos\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sin\theta$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OC}}=2\sin\theta-\dfrac{1}{3}$이다.




따라서 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$

$=\cos\theta\left(2\sin\theta-\frac{1}{3}\right)$

$=\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos\theta$

$f'(\theta)=2\cos 2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta$

$=2-4\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta$

$=-\frac{1}{3}(3\sin\theta+2)(4\sin\theta-3)$

$\alpha\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $3\sin\theta+2>0$이므로

$f(\theta)$는 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때, 극대이자 최대이다.

이때, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로

$f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{7}}{4}\left(2\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{7}}{24}$이다.

( i ), ( ii )에서 $f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{7\sqrt{7}}{24}$이다.

55) [정답] ⑤

[해설]

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

삼각형 OQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

점 R의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta,\ -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$이므로

삼각형 ORS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\cos\frac{1}{2}\theta\times 2\sin\frac{1}{2}\theta=4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$

$=2\sin\theta$

따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+2\sin\theta$

$f'(\theta)=\cos 2\theta+2\cos\theta$

$=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1$

이므로

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$f'(\theta)=0$인 $\theta$의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

$f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\theta_1$ | $\cdots$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\theta)$ | | ↗ | $f(\theta_1)$ | ↘ | |

그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다. 따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 $\theta$에 대하여$\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다.

56) [정답] ④

[해설]

$y'=-2e^{-x}$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$x=0$을 대입하면

$y=2(1+t)e^{-t}$

즉 $B(0,\ 2(1+t)e^{-t})$

$A(0,\ 2e^{-t})$이므로

$\overline{AB}=2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t$

$=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}$

$=t(2-t)e^{-t}$

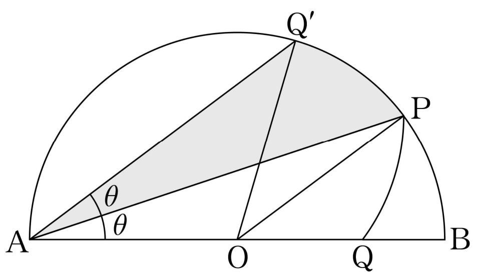
$S'(t)=0$에서 $t=2$

이때, $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로

구하는 $t$의 값은 2이다.

57) [정답] ④

[해설]




색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB위에 있게 되는 점을 Q′이라 하자.

도형 AQP와 도형 APQ′은 합동이므로 $S(\theta)$는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\{(\pi-2\theta)-\sin(\pi-2\theta)\}$$
$$-\frac{1}{2}\{(\pi-4\theta)-\sin(\pi-4\theta)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2\theta-\sin 2\theta+\sin 4\theta)$$

$S'(\theta)=2\cos 4\theta-\cos 2\theta+1$

$=2(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)-\cos 2\theta+1$

$=2(2\cos^2 2\theta-1)-\cos 2\theta+1$

$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$

$S'(\theta)=0$에서

$$4\left(\cos 2\theta-\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(\cos 2\theta-\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)=0$$

따라서 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\cos 2\theta<1$이므로

$\cos 2\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$인 $\theta$에서 $S(\theta)=0$이다.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $\cos 2\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$를 만족시키는 $\theta$를 $\theta_0$이라 하면

$\theta<\theta_0$일 때 $S'(\theta)>0$이고

$\theta>\theta_0$일 때 $S'(\theta)<0$이므로

$S(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 최댓값을 갖는다.

그러므로 $\theta_0=\alpha$ 따라서 $\cos 2\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

58) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^2e^{-x+2}$에서

$f'(x)=(-x^2+2x)e^{-x+2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$y=(f\circ f)(x)$에서 $\dfrac{dy}{dx}=f'(f(x))f'(x)$

$\dfrac{dy}{dx}=0$인 $x$의 값을 구하면

( i ) $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

( ii ) $f'(f(x))=0$에서

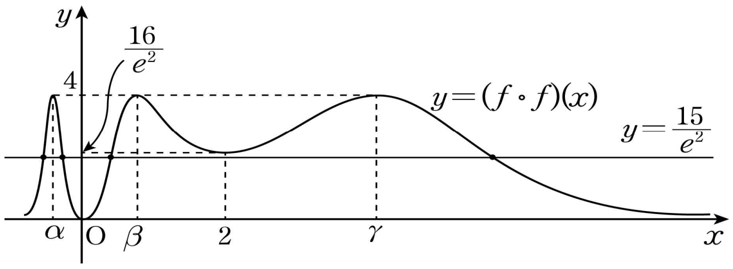
$f(x)=0$일 때, $x=0$

$f(x)=2$일 때,

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$로 놓으면 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | $\gamma$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − |
| $f'(f(x))$ | − | 0 | + | 0 | + | 0 | − | 0 | − | 0 | + |
| $\dfrac{dy}{dx}$ | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − |
| $y$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | $\dfrac{16}{e^2}$ | ↗ | 4 | ↘ |

위의 표를 이용하여 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.




따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$가 만나는 점의 개수는 4이다.

59) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=\infty$, $\lim_{x\to+0}(\ln x)^6=\infty$이므로 $\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=\infty$이다.

$$f'(x)=\frac{6(\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)^6\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

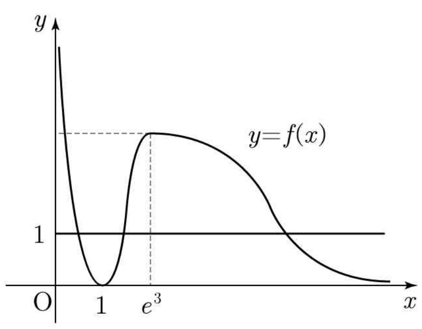
$$=\frac{2x(\ln x)^5(3-\ln x)}{x^4}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$, $x=e$이고 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $e^3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\left(\frac{3}{e}\right)^6$ | $\searrow$ |

또한, $x>0$인 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=0$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




ㄱ. (참)

ㄴ. (거짓)

ㄷ. $e<3$이므로 $\left(\frac{3}{e}\right)^6>1$이다. 따라서 위의 그림과 같이 방정식 $f(x)=1$을 만족하는 실근의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

60) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $g'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4x^3}{x^4+2n}$이므로

$g'(f(1))=g'(0)=0$

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=0$ (참)

ㄴ. $h(x)=g(f(x))=\log_3[\{f(x)\}^4+2n]$

$$h'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4\{f(x)\}^3f'(x)}{\{f(x)\}^4+2n}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{(x^n-1)^4+2n}$$

열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $-1<x^n-1<0$이므로 $h'(x)<0$이다.

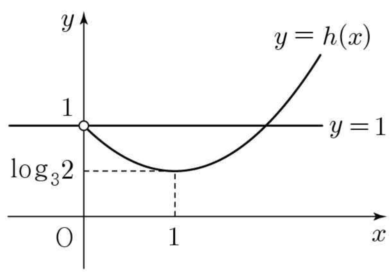
열린 구간 $(0,\ 1)$에서

함수 $h(x)$는 감소한다. (거짓)

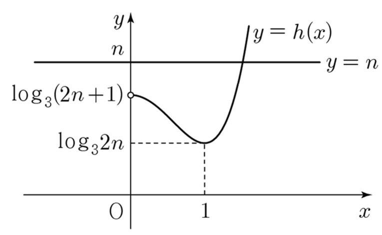
ㄷ. $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $\log_3 2n$을 갖는다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

( i ) $n=1$일 때,




( ii ) $n\ge 2$일 때,




( i ), ( ii )에 의하여 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

61) [정답] ⑤

[해설]

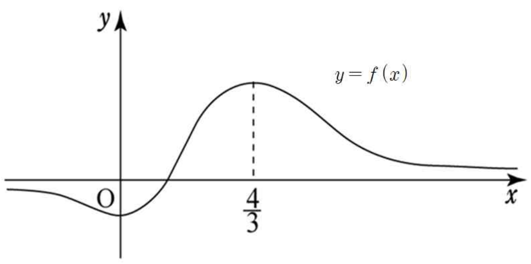
ㄱ. $f'(x)=\dfrac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$ , $f'(1)=1$

접선의 방정식은 $y=x-\dfrac{1}{2}$ 이므로

∴ 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ∴ 참

ㄴ. $x=0$ 에서 최솟값 $-\dfrac{1}{8}$ 을 갖는다. ∴ 참

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.




$f(x)-f(10)=0$ 의 근은 2 개다. ∴ 참

62) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=2x\cos x$에서

$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

ㄱ. (참) $a=0$이면 $f'(a)=2$이므로 $a\neq 0$

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$에서

$\cos a=a\sin a$, $\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{1}{a}$

∴ $\tan a=\dfrac{1}{a}$

ㄴ. (참) $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$에서

$\cos x=0$ 또는 $\tan x=\dfrac{1}{x}$

$\tan x=\dfrac{1}{x}$의 근을 $\alpha\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

방정식 $f'(x)=0$의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가 또는 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 2 | + | 0 | − | 0 | − | $-2$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 극대 | ↘ | 0 | ↘ | $-2\pi$ |

$x=\alpha$에서 함수 $f(x)$는 극대이므로

$a=\alpha\left(\text{단, } 0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f'(x)$는 $0\le x\le\pi$에서 연속이고 미분가능하다.

또한, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{4}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}\left(1-\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$

따라서 중간값의 정리에 의해 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

그런데 ㉠에서 $f'(a)=0\left(0\le a\le\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로

$a$는 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.

ㄷ. (참) ㄴ에서 $\dfrac{\pi}{4}<a<\dfrac{\pi}{3}$이고

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\times\dfrac{\pi}{3}\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}>1$이므로 $f(a)>1$

또, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서

방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

63) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $g(-x)=\dfrac{\sin f(-x)}{-x}=\dfrac{\sin f(x)}{-x}=-g(x)$

이므로 모든 양의 실수 $x$에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

조건 (다)에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이고,

조건 (가)에서 $f'(x)=-f'(-x)$이므로

$f'(0)=0$이다.

$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right)$

$=1\times f'(0)=0$ (참)

ㄷ. $g(\alpha)=\frac{\sin f(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}>0$이고,

$\lim_{x\to0} g(x)=0$이므로 $0<x<\alpha$에서

함수 $g(x)$가 증가하는 구간이 있다.

$g'(x)=\frac{xf'(x)\cos f(x)-\sin f(x)}{x^2}$에서

$g'(\alpha)=\frac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha)-\sin f(\alpha)}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}<0$

그러므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \alpha)$에서 $\frac{1}{\alpha}$보다 큰 극댓값을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=\frac{1}{\alpha}$은 $0<x\le\alpha$에서 적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다.

$g(-x)=-g(x)$이므로 방정식 $g(x)=-\frac{1}{\alpha}$은 구간 $-\alpha\le x<0$에서 적어도 2개의 서로 다른 실근을 가지므로 방정식 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$은 적어도 4개의 서로 다른 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

64) [정답] ②

[해설]

$x\ne-1$일 때, $f'(x)=\frac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$

ㄱ. $n=3$이면 $x<-1$일 때, $f'(x)=\frac{3-6x^3}{(x^3+1)^2}>0$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이 성립한다.

$n$이 홀수일 때, $x\to-1$이면 (분모)$\to0$이고 (분자)$\to-n$이므로 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

$n$이 짝수일 때, $\lim_{x\to-1} f(x)=-\frac{n}{2}$이고 $f(-1)=2$이므로 $n=4$이다.

따라서 $n=4$일 때만 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f'(x)=\frac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이다.

$x<0$일 때 $f(x)<0$이고, $x\ge0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt[4]{27}$ | $\searrow$ |

$2<\sqrt[4]{27}$이므로 방정식 $f(x)=2$는 $x\ge0$에서만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=0$에서 $x^n=\frac{1}{n-1}$ $(n\ne1)$

(ⅰ) $n$이 홀수일 때 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다.

(ⅱ) $n$이 짝수일 때

$n=2$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않고,

$n\ge4$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10이하의 모든 자연수 $n$은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

65) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\ne1$인 모든 실수 $x$에서 연속이므로

$\begin{cases} x=1\text{일 때}, & f(1)=0 \\ x\ne1\text{일 때}, & f(x)\ne0 \end{cases}$ ……㉠

한편,

$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\ne0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$

이므로

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}(f(x)\ne0)$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$f'(2)=0$ ……㉡

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식 $g(x)=0$은

$\ln|f(x)|=0$

$|f(x)|=1$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

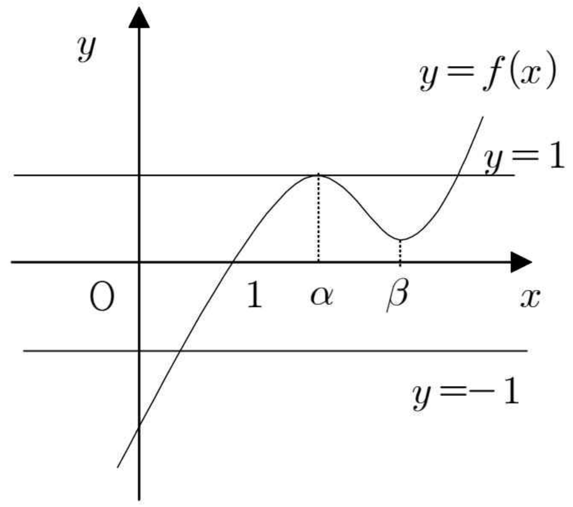
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0 \ (1<\alpha<\beta)$

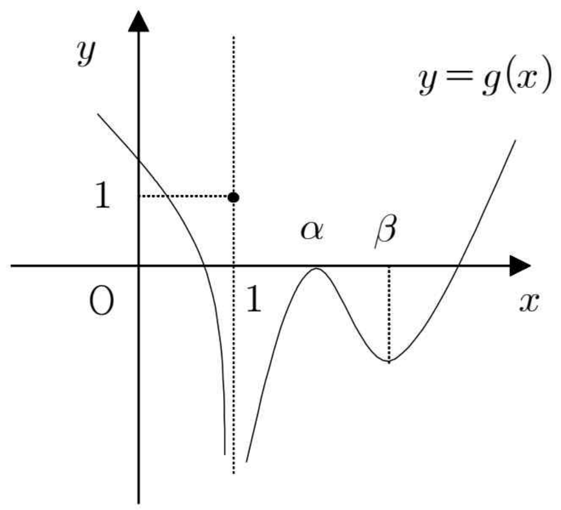
로 놓을 수 있다.

이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

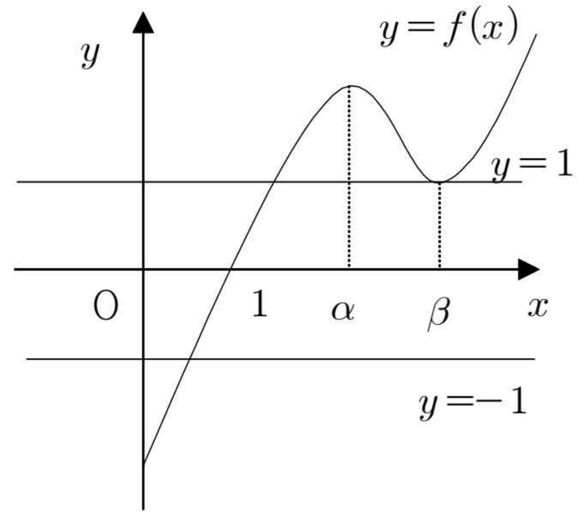
이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

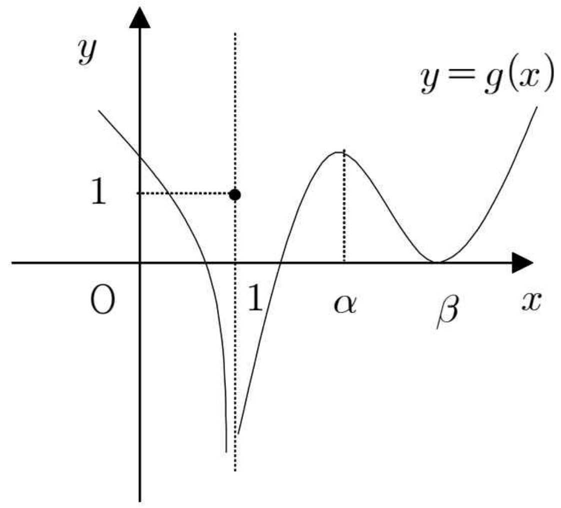
( i )




( ii )




이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 ( i )과 같아야 하고

$\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$($k$는 상수 )

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$

이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$1-k=-2$

$k=3$

이때,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

이므로

$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2$

$=\frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\}$

$=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

그러므로 $\beta=\dfrac{8}{3}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$\ln\left|f\left(\dfrac{8}{3}\right)\right|=\ln\left|\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1\right|$

$=\ln\dfrac{25}{27}$

66) [정답] ④

[해설]

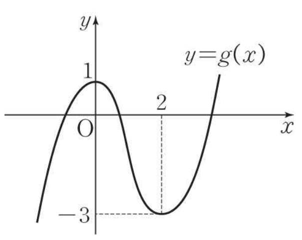
$g(x)=x^3-3x^2+1$로 놓으면

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $g(x)$의 증가 또는 감소를 표로 나타내고, 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |




곡선 $y=x^3-3x^2+1$ 위의 점 $(t,\ t^3-3t^2+1)$에서의 접선의 방정식은 $y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=(3t^2-6t)(-t)+t^3-3t^2+1$

$2=-2t^3+3t^2+1$

$2t^3-3t^2+1=0,\ (t-1)^2(2t+1)=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=1$

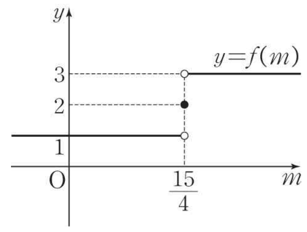
따라서 주어진 직선은 곡선 $y=x^3-3x^2+1$ 위의

두 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ 또는 $(1,\ -1)$에서 접한다.

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{4}$에 대하여

$m<\dfrac{15}{4}$일 때, 주어진 곡선과 직선은 한 점에서 만나고,

$m>\dfrac{15}{4}$일 때, 주어진 곡선과 직선은 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(m)$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 $a$의 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$이다.

67) [정답] 34

[해설]

$f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$에 대하여

(ⅰ) $x>0$일 때

$f(x)=\dfrac{2\ln x}{x},\ f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

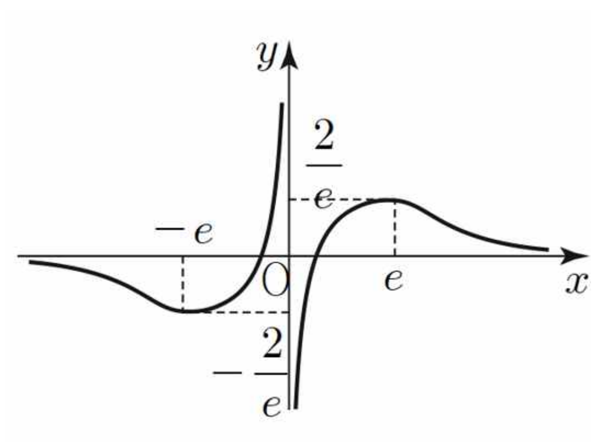
$x=e$ 에서 $f'(x)=0$ 이고

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{2}{e}$ | $\searrow$ |

$\therefore$ 극댓값 $\alpha=\dfrac{2}{e}$

(ⅱ) $x\neq0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$y=\dfrac{2}{en}x$는 원점을 지나는 직선이고 원점에서 곡선

$y=\dfrac{2\ln x}{x}$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의

방정식은

$y=\dfrac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)+\dfrac{2\ln t}{t}$ 이고 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{2-2\ln t}{t^2}(0-t)+\dfrac{2\ln t}{t}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

$\therefore$ 접점은 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$이고 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{e}x$

$n=1$일 때, 직선 $y=\dfrac{2}{e}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $0 \therefore a_1=0$

$n=2$일 때, 직선 $y=\dfrac{1}{e}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $2 \therefore a_2=2$

$3 \le n \le 10$일 때, 직선 $y=\dfrac{2}{en}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $4 \therefore a_n=4$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=0+2+4\times 8=34$

68) [정답] 30

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재하려면

모든 실수 $x$에 대하여

$f'(x)=3x^2+2ax-a \ge 0$이다.

따라서 $\dfrac{D}{4}=a^2+3a=a(a+3)\le 0$,

$-3 \le a \le 0$

이제 $f(k)=n$이라고 하면 $g(n)=k$이고

$n\times g'(n)=\dfrac{n}{f'(k)}=\dfrac{f(k)}{f'(k)}=1$

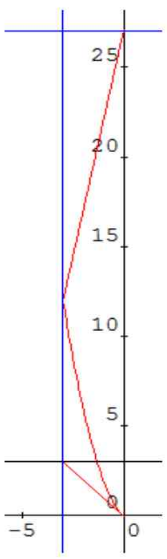
이므로 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 경우는

$f(k)=f'(k)=n$

그러므로 자연수 $n$에 대하여

$-3\le a\le 0,\ f(k)=f'(k)=n$

을 만족시키는 실수 $a$의 개수를 알아보면 된다.




$f(k)=f'(k)$에서

$k^3+ak^2-ak-a=3k^2+2ak-a$

$k^3+(a-3)k^2-3ak=0,\ k(k-3)(k+a)=0$

따라서 $k=0$ 또는 $3$ 또는 $-a$인데,

각각에 대하여 $f'(k)=n$을 풀면

( i ) $k=0$이면 $-a=n$

( ii ) $k=3$이면 $27+5a=n$

( iii ) $k=-a$이면 $a^2-a=n$

이제 자연수 $n$에 대하여 위의 등식 ( i ), ( ii ), ( iii )을 만족하는 실수 $a(-3\le a\le 0)$의 개수를 구해본다.

그림에서와 같이

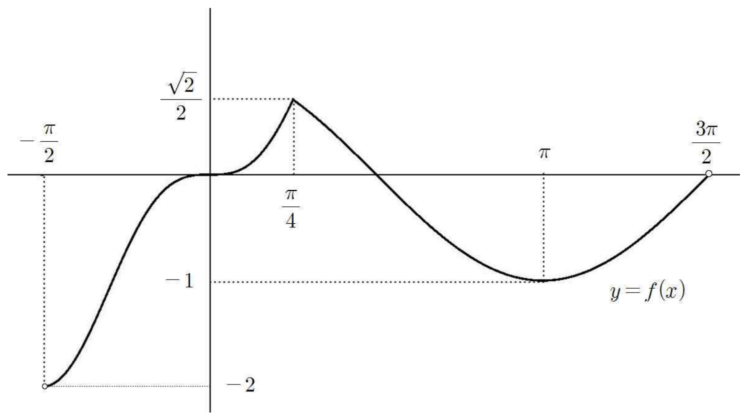
$a_1=a_2=a_3=2,\ a_4=a_5=\cdots=a_{27}=1$이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{27} a_n=30$

69) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.




$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t} & (f(x)\ge t)\\ \sqrt{-f(x)+t} & (f(t)<t)\end{cases}$를 $x$에 대해

미분하면 $y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} & (f(x)\ge t)\\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}} & (f(x)<t)\end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서

연속이다.

하지만, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않다.

$t=-1$일 때 즉, $y=\sqrt{1+\cos t}$의 $x=\pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2\sin^2\dfrac{h}{2}}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{h}{2}\right|}{h}$

에서

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

$t$의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t\le -2) \\ 2 & (-2<t<-1) \\ 3 & (t=-1) \\ 4 & (-1<t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 3 & \left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 1 & \left(t\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 $a=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\ b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$이다.

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$이 성립하고

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$라 할 수 있다.

$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-f(5)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

70) [정답] ③

[해설]

점 P에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 기울기를 $m$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-mt+4$

원 $x^2+y^2=9$의 중심에서 접선까지의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$\dfrac{|mt-4|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$m$에 대한 이차방정식 $(t^2-9)m^2-8tm+7=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 접선의 기울기의 곱은

$f(t)=\dfrac{7}{t^2-9}$이다.

ㄱ. $f(\sqrt{2})=-1$ (참)

ㄴ. $f'(t)=-\dfrac{14t}{(t^2-9)^2}$, $f''(t)=\dfrac{42(t^2+3)}{(t^2-9)^3}$이므로 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 $f''(t)<0$ (참)

ㄷ. $9f(x)=3^{x+2}-7,\ f(x)=3^x-\dfrac{7}{9}$

방정식 $f(x)=3^x-\dfrac{7}{9}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x),\ y=3^x-\dfrac{7}{9}$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

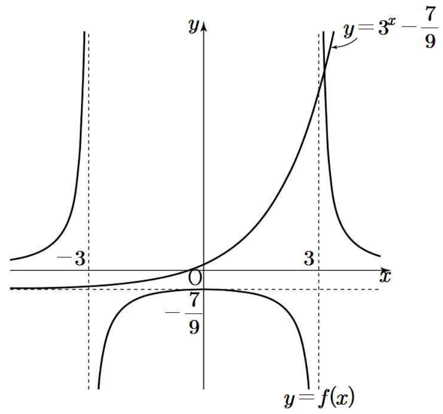
| $x$ | $\cdots$ | $(-3)$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $(3)$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ | $-\dfrac{7}{9}$ | ↘ | | ↘ |

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to -3-}f(x)=\infty,$

$\lim\limits_{x\to -3+}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 3-}f(x)=-\infty,$

$\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x-\dfrac{7}{9}$의 그래프는 그림과 같다.




따라서 실근의 개수는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

71) [정답] ④

[해설]

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선

$f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}\{2x+(n-2)\}+a$

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$이다

이때

$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=a$이므로

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선

$f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f''(x)$를 구하면

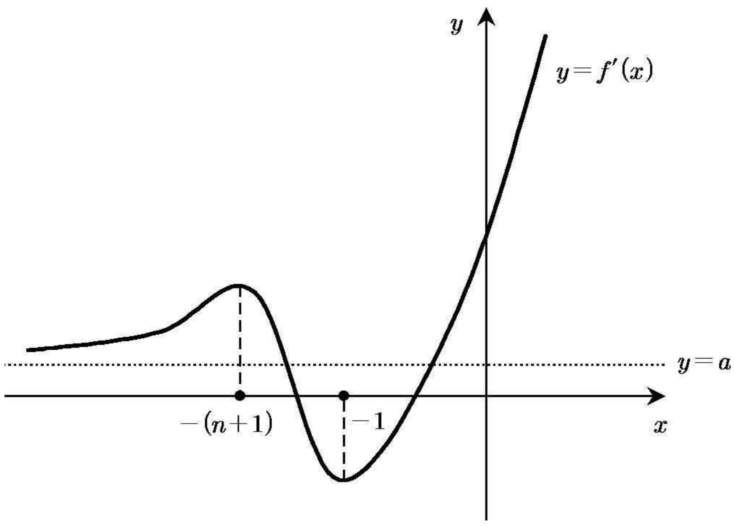
$f''(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$

$f''(x)=e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1)$

$=e^{x+1}(x+1)\{x+(n+1)\}$이므로

$f'(x)$는 $x=-1$에서 극소이며 최솟값이므로

$f'(x)$의 그래프를 그려보면




따라서

$f'(-1)=e^0\{(-1)^2+n(-1)+1\}+a=2-n+a\geq 0$

$\therefore a\geq n-2$

따라서

$\therefore g(n)=n-2$

$1\leq g(n)\leq 8$

$\Leftrightarrow 1\leq n-2\leq 8$

$\Leftrightarrow 3\leq n\leq 10$

따라서 $n=3,\ 4,\ \ldots,\ 10$이고

$\therefore \sum\limits_{k=3}^{10}k=\sum\limits_{k=1}^{10}k-\sum\limits_{k=1}^{2}k=55-3=52$

72) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(1-\ln x)$

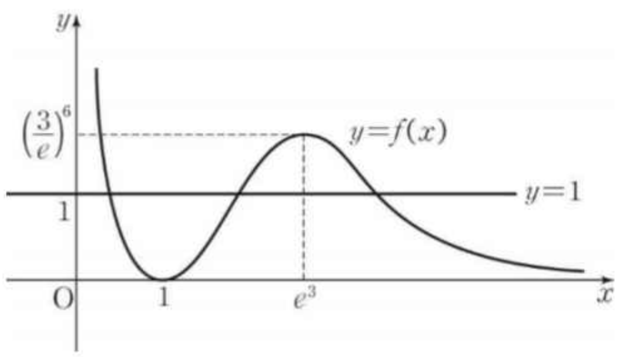
$f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}(1-\ln x)-\dfrac{1}{x^3}=-\dfrac{1}{x^3}(3-2\ln x)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | | |
| $f''(x)$ | | − | | | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 변곡 | ↘ |

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln x=0$

이므로 $y=f(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.




ㄱ. $y=f(x)$는 $x=e$일 때, 최댓값 $f(e)=\dfrac{1}{e}$를 갖는다. (참)

ㄴ. $x>e$일 때, $f(x)$는 감소함수이므로

$\dfrac{1}{2011}\ln 2011>\dfrac{1}{2012}\ln 2012$

위 부등식을 변형하면

$2012\cdot\ln 2011>2011\cdot\ln 2012$에서

$\ln 2011^{2012}>\ln 2012^{2011}$

$\therefore\ 2011^{2012}>2012^{2011}$ (참)

ㄷ. 열린구간 $(0,\ e)$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (참)

73) [정답] 6

[해설]

$t$초 후에 P$(10t+\cos t, \sin t)$이고, 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sin t}{\cos t}(x-10t)$이므로 점 Q의 $x$ 좌표는

$x=10t+2\cot t$

$\therefore\ \dfrac{dx}{dt}=10-2\csc^2 t\ \ \therefore\ \left[\dfrac{dx}{dt}\right]_{t=\frac{3}{4}\pi}=6$

74) [정답] 8

[해설]

점 P는 호 AB 위의 점이고 시각 $t$일 때

$\angle \mathrm{POA}=t\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 점 P의 좌표는

$(\cos t,\ \sin t)$이다.

점 Q$(x, 0)$의 시각 $t$에서의 위치는

$x=\cos t+\sqrt{5-\sin^2 t},\ y=0$

점 Q의 $x$좌표의 시간에 대한 변화율

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{5-\sin^2 t}}$$

$\therefore \angle \mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 $x$좌표의 시간에 대한 변화율

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $9r^2=8$