[준킬러][기하] 2벡터

수학비서

2023.01.07

07 기하

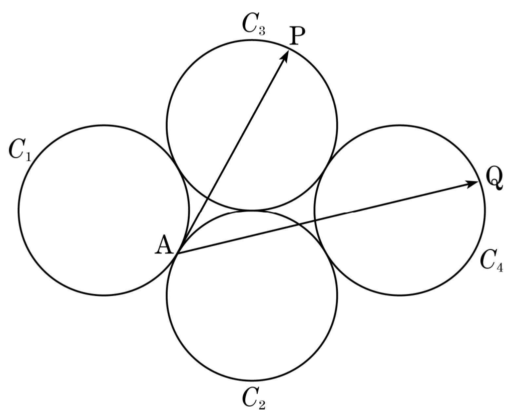
05 평면벡터의연산

02 벡터의 해석과 활용

05 벡터의 해석5 (Mm)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 21

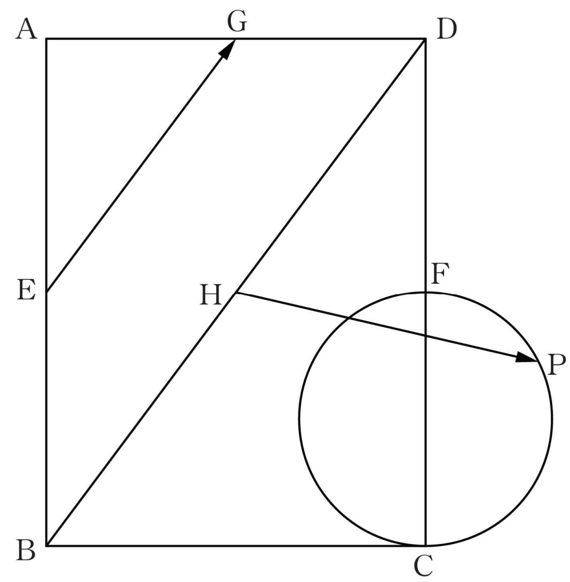
1. 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은?



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$　② 6　③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$　⑤ 7

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 18

2. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$인 직사각형 ABCD에 대하여 네 선분 AB, CD, DA, BD의 중점을 각각 E, F, G, H라 하자. 선분 CF를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은?

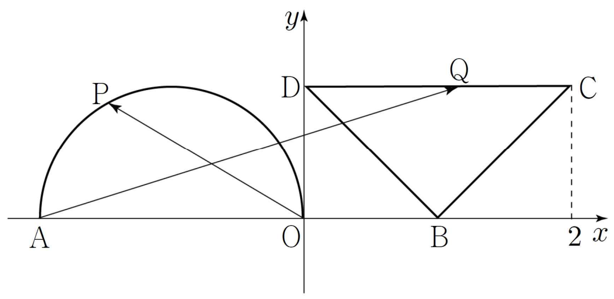


① 8　② $2+2\sqrt{10}$　③ $2+2\sqrt{11}$
④ $2+4\sqrt{3}$　⑤ $2+2\sqrt{13}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 29

3. 좌표평면 위의 네 점

A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 1)$, D$(0,\ 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1\,(0\le y\le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.)



07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

01 위치벡터

09 벡터방정식의 해석4 (삼각형 내부의 점의 위치 결정)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 16

4. 직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

01 위치벡터

10 벡터방정식의 해석5 (자취로 해석)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 9

5. 평면 위에 삼각형 OAB가 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s \ge 0,\ t \ge 0)$$

를 만족하는 점 P가 그리는 도형에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $s+t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.

ㄴ. $s+2t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 AB의 길이보다 크다.

ㄷ. $s+2t \le 1$일 때, 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB를 포함한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

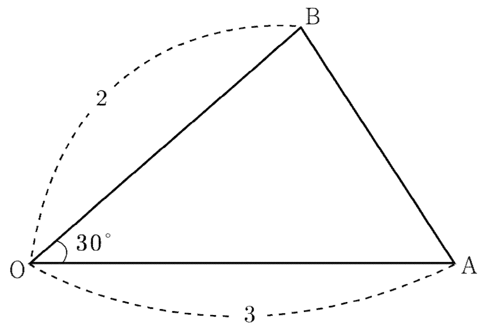
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

6. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=30^\circ$ 인 삼각형 OAB가 있다. 연립부등식

$$3x+y \ge 2,\ x+y \le 2,\ y \ge 0$$

을 만족시키는 x, y에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$의 종점 P가 존재하는 영역의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



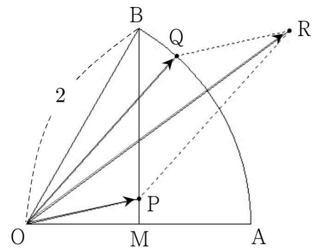
07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

02 벡터의 성분과 연산

08 벡터의 성분8 (추론과 해석)

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는?



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

8. 좌표평면에서 점 A(0, 12)와 양수 t에 대하여 점 P(0, t)와 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

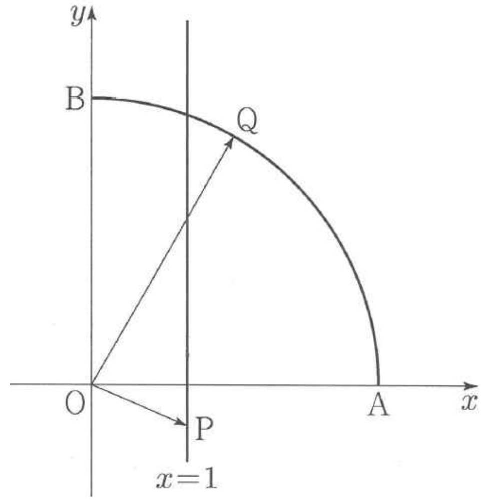
> (가) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$
> (나) $\frac{t}{3}\le|\overrightarrow{PQ}|\le\frac{t}{2}$

$6\le t\le 12$에서 $|\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 18

9. 좌표평면 위에 두 점 A(3, 0), B(0, 3)과 직선 $x=1$위의 점 P(1, a)가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.)



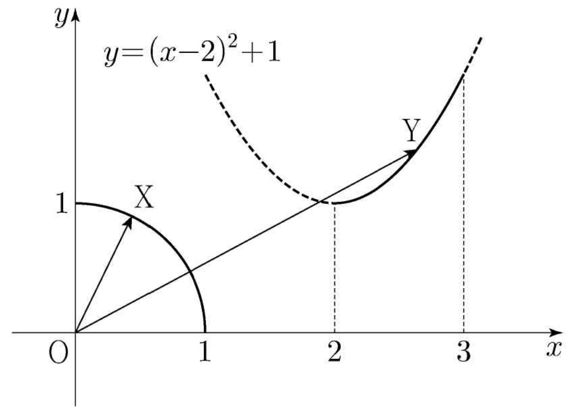
① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 19

10. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1\,(2\le x\le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$

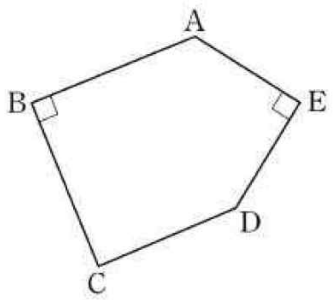
07 기하 07 평면벡터의내적

01 평면벡터의 내적

05 활용1 (도형)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 14

11. 평면에서 다음 그림의 오각형 ABCDE가 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B=\angle E=90°$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르면?



<보 기>

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

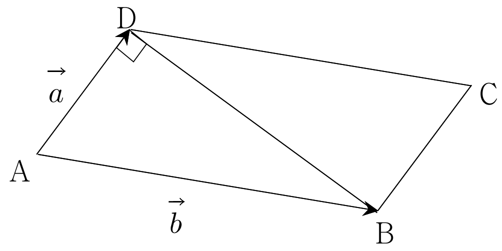
07 기하 07 평면벡터의내적

01 평면벡터의 내적

06 활용2 (벡터 분할)

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

12. 그림과 같은 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\angle ADB=90°$ 인 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라 놓는다. 꼭짓점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AE}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 실수 k의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

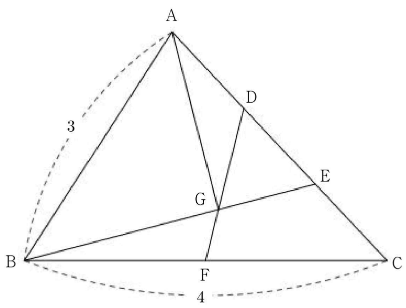
07 기하 07 평면벡터의내적

02 내적의 성분계산

03 성분과 내적3 (평행 또는 수직)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



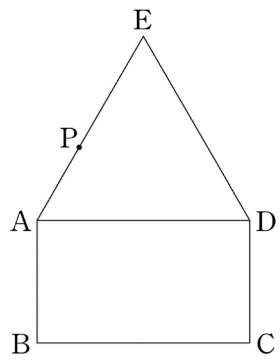
07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

01 활용1 (움직이는 점 조건과 자취)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

14. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

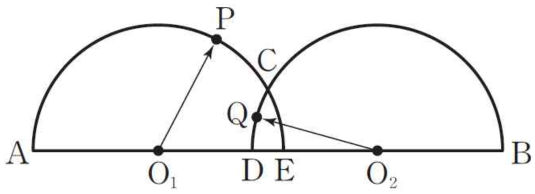
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 28

15. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$ 인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$ 인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ 라 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{\mathrm{O_1O_2}}<2$ 이고, p 와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 19

16. 좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ 에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\le 1 \text{ 이고, } \overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_k}}\ge 0 \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ 이면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ 이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=0$ 인 경우에, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이면 점 $\mathrm{A_3}$은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

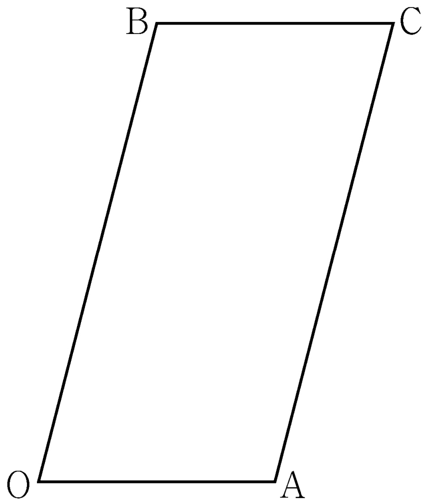
17. 좌표평면에서 $\overline{\text{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\text{OB}}=2\sqrt{2}$이고

$\cos(\angle\text{AOB})=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가

다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\text{OP}}=s\overrightarrow{\text{OA}}+t\overrightarrow{\text{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{\text{OP}}\cdot\overrightarrow{\text{OB}}+\overrightarrow{\text{BP}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\text{OP}}-\overrightarrow{\text{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)



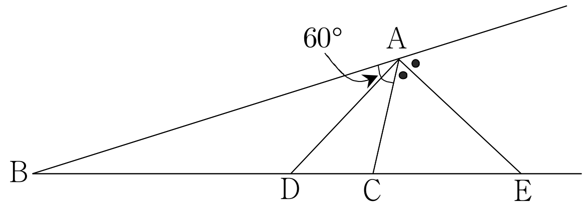
07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

02 활용2 (벡터방정식의 해석)

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

18. $\angle\text{BAC}=60^\circ$ 이고 $\angle\text{BCA}>90^\circ$ 인 둔각삼각형 ABC 가 있다. 그림과 같이 $\angle\text{BAC}$ 의 이등분선과 선분 BC 의 교점을 D, $\angle\text{BAC}$ 의 외각의 이등분선과 선분 BC 의 연장선의 교점을 E 라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AC}}=2\overrightarrow{\text{AD}}$

ㄴ. $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}>\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AE}}$

ㄷ. $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}>\overrightarrow{\text{AD}}\cdot\overrightarrow{\text{AE}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 28

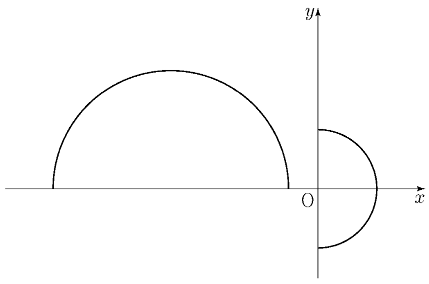
19. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4(x \geq 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2$$

를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16(y \geq 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$

④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 28

20. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=0,\ \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=3$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=-2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 실수 k의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$

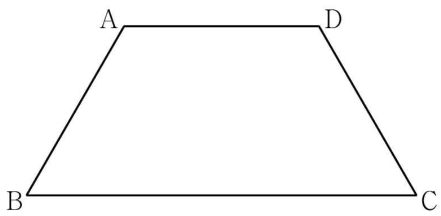
④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 29

21. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$,

$\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오.

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$
(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$



07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

04 내적의 Mm2 (도형)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 29

22. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 양수 x에 대하여 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

를 만족시킨다. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. $50S$의 값을 구하시오.

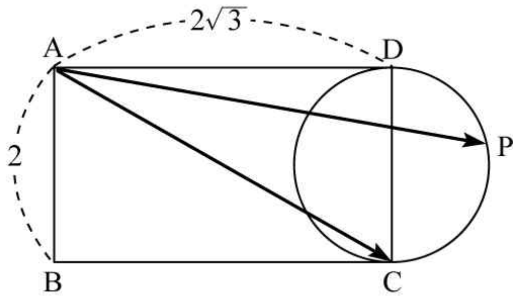
07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

05 내적의 Mm3 (벡터의 분할)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 11

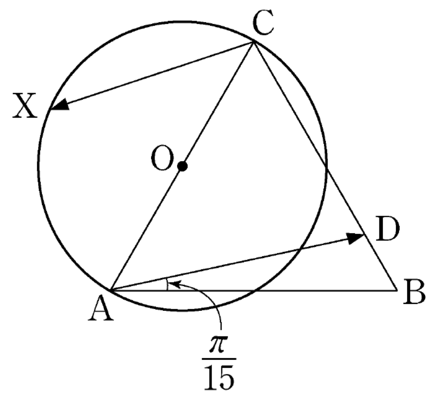
23. 그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 이 직사각형의 한 변 CD 를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은?
(단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.)



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

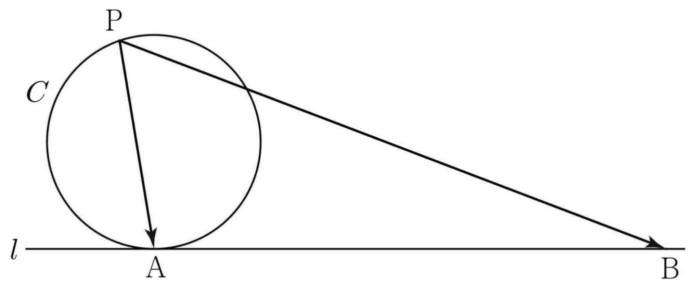
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 22

24. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



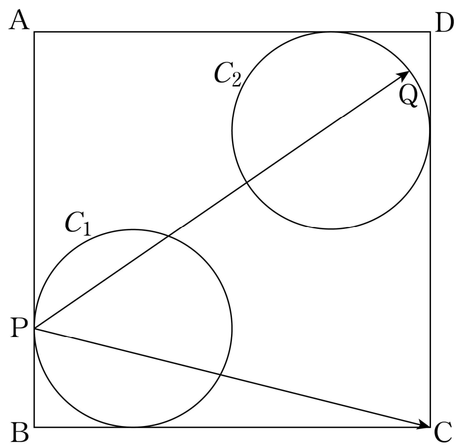
[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

25. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오.



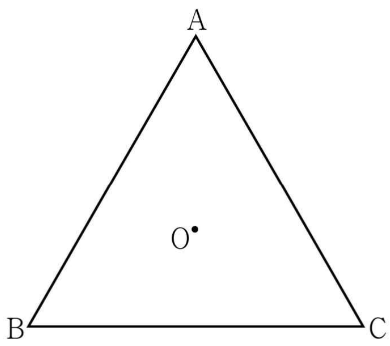
[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 28

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 있다. 원 C_1과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 $a+\sqrt{b}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 29

27. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OA}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

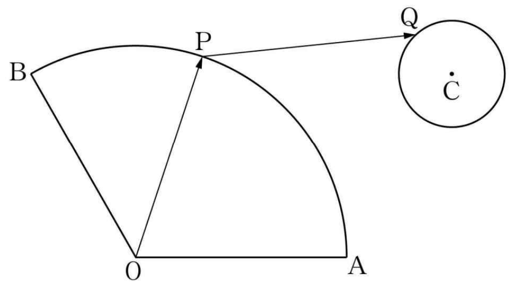


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 28

28. 그림과 같이 한 평면 위에 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB와 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$가

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=24,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?



① $12\sqrt{3}-34$ ② $12\sqrt{3}-32$ ③ $16\sqrt{3}-36$
④ $16\sqrt{3}-34$ ⑤ $16\sqrt{3}-32$

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

02 원의 방정식

03 원의 방정식3 (원과 접선)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 26

29. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고, 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.)

[준킬러][기하] 2벡터(빠른 정답)

준킬러기하 2023.01.07

1. [정답] ②
2. [정답] ②
3. [정답] 115
4. [정답] ⑤
5. [정답] ①

6. [정답] 16
7. [정답] ③
8. [정답] ④
9. [정답] ③
10. [정답] ①

11. [정답] ⑤
12. [정답] ②
13. [정답] 37
14. [정답] ⑤
15. [정답] 19

16. [정답] ⑤
17. [정답] 100
18. [정답] ④
19. [정답] ⑤
20. [정답] ①

21. [정답] 12
22. [정답] 60
23. [정답] ④
24. [정답] 17
25. [정답] 180

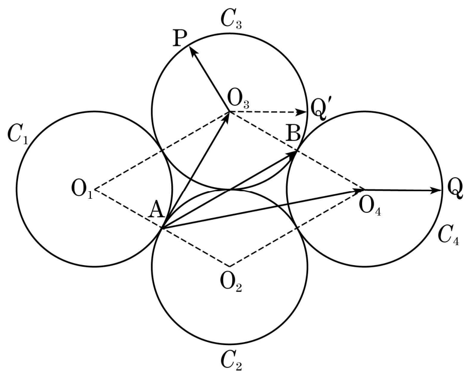
26. [정답] 27
27. [정답] 15
28. [정답] ⑤
29. [정답] 48

[준킬러][기하] 2벡터(해설)

준킬러기하 2023.01.07

1) [정답] ②

[해설]



네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$, $\mathrm{O_4}$라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.

사각형 $\mathrm{O_1O_2O_4O_3}$은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 $\mathrm{O_1O_2}$, 변 $\mathrm{O_3O_4}$의 중점이다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AO_3}}+\overrightarrow{\mathrm{AO_4}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$

한편, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}$를 시점이 $\mathrm{O_3}$이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$이므로

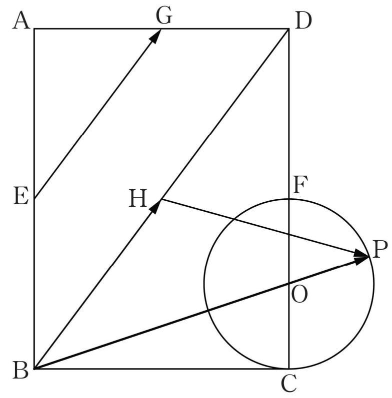
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AO_3}}+\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AO_4}}+\overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}\right)$
$=\left(\overrightarrow{\mathrm{AO_3}}+\overrightarrow{\mathrm{AO_4}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}\right)$
$=2\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}+\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$

이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$이 $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$과 방향이 같아야 한다.

$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\le 3\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}\right|=6$

2) [정답] ②

[해설]



$\left|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$ 이므로

$\left|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|$ 의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$ 의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B에서 원 위의 점 P에 이르는 거리의 최댓값이다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 $\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$ 의 최댓값은

$\overline{\mathrm{BO}}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

3) [정답] 115

[해설]

(i) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right)$
$=\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 방향이 같고

$\left|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|$의 값이 최대일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|$의 값은 최대이다.

그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면

점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때

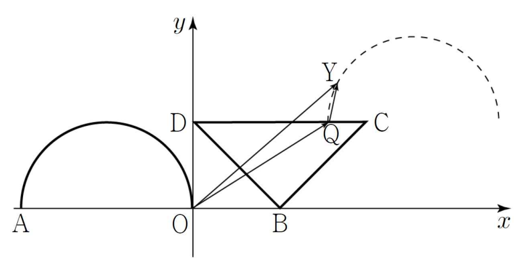
$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|$의 값은 최대이다.

$\overline{\mathrm{MC}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|\le\left|\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|=\sqrt{10}+1$

따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$
$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여

$\overrightarrow{QY}=\overrightarrow{AP}$인 점을 Y라 하자.

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OY}|\geq|\overrightarrow{OQ}|$

이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이다.

점 Q가 선분 BD 위에 있고

$\overline{OQ}\perp\overline{BD}$일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이므로

$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{2}+2\sqrt{10}$

따라서 $p=\dfrac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

4) [정답] ⑤

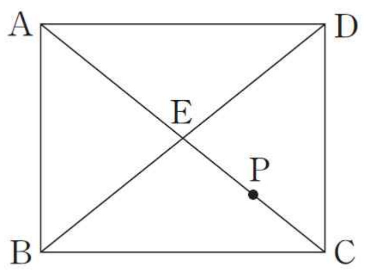
[해설]

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$에서
$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$(참)

ㄴ. $\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=-\overrightarrow{PC}$

선분 BD의 중점을 E라 하면 $\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PC}$



그림에서 점 P는 선분 BC의 중점이므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\dfrac{4}{3}$이므로

삼각형 ADC의 넓이는 $3\times\dfrac{4}{3}=4$

그러므로 사각형 ABCD의 넓이는 $4\times2=8$이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) [정답] ①

[해설]

ㄱ. $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ $(0\leq t\leq1)$이므로

점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다. (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$ 이므로

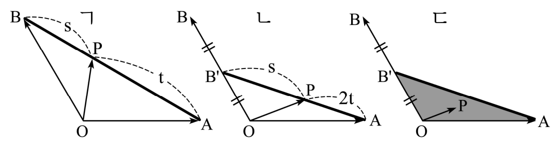
점 P가 그리는 도형은 선분 AB′

(이 때, $\overrightarrow{OB'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$)이고, 그 길이는 선분AB의 길이보다

작은 경우도 있다. (거짓)

ㄷ. 양수 s, t가 $s+2t\leq1$이면 점 P가 그리는 영역은

삼각형OAB′ 이므로 삼각형OAB에 포함된다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

6) [정답] **16**

[해설]

$\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y\geq1$ 이고

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{2}\mathrm{x}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\dfrac{1}{2}\mathrm{y}\cdot(2\overrightarrow{OB})$ …… ㉠

이므로 $\overrightarrow{OP}$는 점 $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$와 점 $2\overrightarrow{OB}$를 연결하는 선분을

경계로 점 O가 있지 않은 영역을 의미한다.

또한, $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\leq1$ 이므로

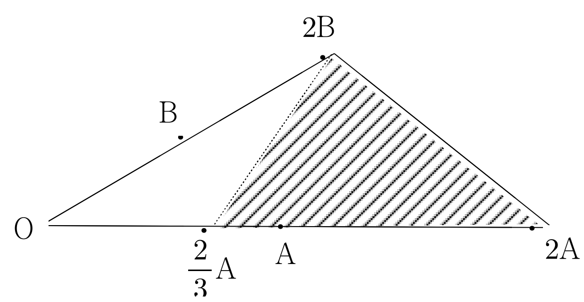
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{x}\cdot(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{1}{2}\mathrm{y}\cdot(2\overrightarrow{OB})$ …… ㉡

이므로 두 점 $2\overrightarrow{OA}$와 $2\overrightarrow{OB}$를 연결한 선분을 경계로 점

O가 있는 영역을 의미한다.

따라서 $y\geq0$ 범위에서 두 조건 ㉠과 ㉡을 동시에 만족하는

영역은 다음 그림과 같다.

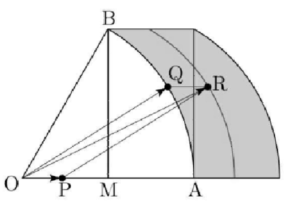


$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times 4\sin 30^\circ \times\left(\frac{2}{3}\times 6\right)=4$

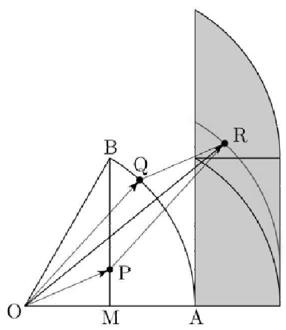
$\therefore\ S^2=16$

7) [정답] ③

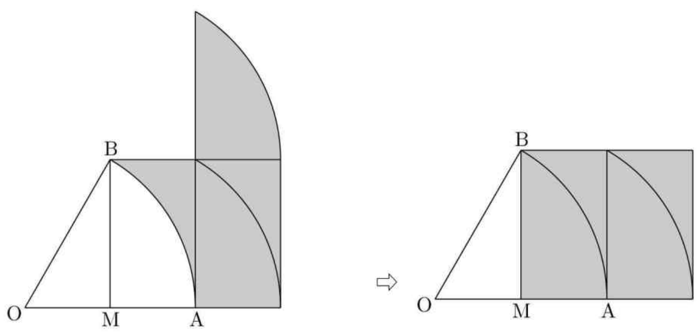
[해설]
점 P가 선분 OM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



점 P가 선분 BM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 점 R이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



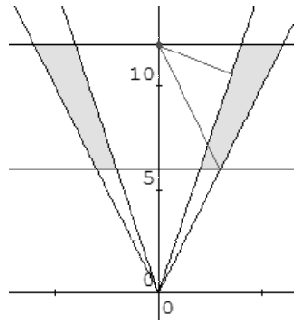
위 영역의 넓이는 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$인 직사각형의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

8) [정답] ④

[해설]
점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(0,\ 12)\cdot(x,\ y-t)=12(y-t)=0,\ y=t$
$\frac{t}{3}\le\sqrt{x^2+(y-t)^2}\le\frac{t}{2}$

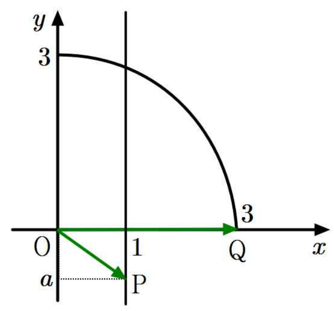
따라서 $y=t,\ \frac{t}{3}\le|x|\le\frac{t}{2},\ 6\le t\le 12$

즉 $2|x|\le y\le 3|x|,\ 6\le y\le 12$
이것을 좌표평면에 나타내면 아래그림과 같다.
따라서 구하려는 최솟값은 $A(0,\ 12)$에서 직선 $y=3x$에 이르는 거리 $m=\frac{12}{\sqrt{10}}$
최댓값은 $A(0,\ 12)$에서 $Q(3,\ 6)$의 거리 $M=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$
$\therefore\ Mm=\frac{12}{\sqrt{10}}\times 3\sqrt{5}=18\sqrt{2}$



9) [정답] ③

[해설]
(i) $a<0$일 때,



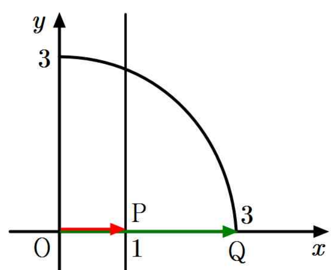
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최대가 되는 경우는 점 Q가 점 $A(3,\ 0)$에 존재할 때이다.
따라서 $\overrightarrow{OP}=(1,\ a),\ \overrightarrow{OQ}=(3,\ 0)$

$f(a)=\sqrt{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}$
$=\sqrt{4^2+a^2}$

따라서 $\sqrt{4^2+a^2}=5,\ a^2=9$

$\therefore\ a=-3(\because\ a<0)$

(ii) $a=0$일 때,



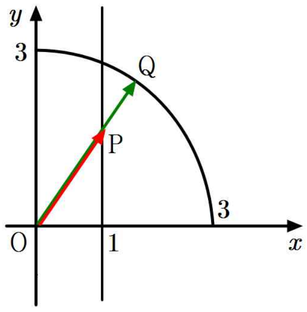
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최대가 되는 경우는 점 Q가 점 $A(3,\ 0)$에

존재할 때이다.

$\therefore |\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=4$

그런데, 최댓값이 5이어야 하므로 모순이다.

(iii) $a>0$일 때,



$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$은 그림과 같이 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$의 방향이 같을 때 최댓값을 갖는다.

$\overrightarrow{OP}=(1,\ a)$이므로

$f(a)=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$

$=|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OQ}|$

$=\sqrt{a^2+1}+3$

따라서 $\sqrt{a^2+1}+3=5,\ a^2+1=4,\ a^2=3$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\,(\because\ a>0)$

따라서 $f(a)=5$가 되도록 하는 실수 a의 값은 $a=-3,\ \sqrt{3}$

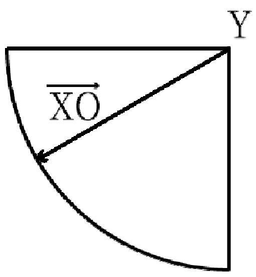
따라서 만족하는 a의 값의 곱은 $(-3)\times\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$

10) [정답] ①

[해설]

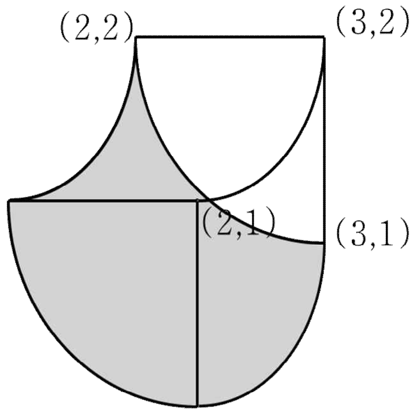
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{XO}$이고, 모든 $\overrightarrow{XO}$의 시점을 점 Y로 평행이동하면

다음 그림과 같이 점 Y를 중심으로 하는 반지름이 1인 사분원이다.



이때 점 Y는 $y=(x-2)^2+1(2\le x\le 3)$위를 움직이므로

영역 R은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



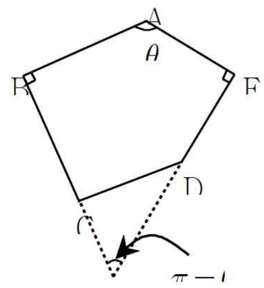
따라서 점 O로부터 거리의 최댓값은 P가 $(3,\ 1)$일 때 $M=\sqrt{10}$

최솟값은 원점과 $(2,\ 1)$사이의 거리에서 반지름 1을 뺀 $m=\sqrt{5}-1$이다.

$M^2+m^2=16-2\sqrt{5}$

11) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 평행하다.(참)

ㄴ. $\angle B=\angle E=90^\circ$이므로 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각은 $\pi-\theta$이다. 따라서,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta$

이때, $\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}+|\overrightarrow{ED}|^2$

$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

이때, $\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED}$이고,

'ㄴ'에 의해 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$이 성립하므로

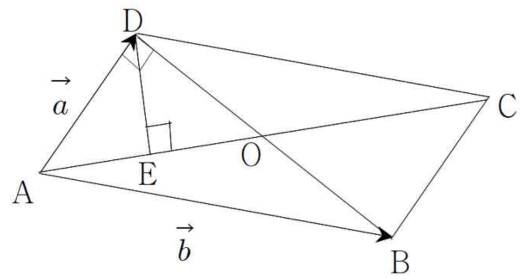
$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$,

$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$이 성립한다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12) [정답] ②

[해설]



$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ 이므로

$(-\vec{a})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

또한, 그림에서 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 이다. $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})$ 라 놓으면

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})=(k-1)\vec{a}+k\vec{b}$

이므로

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AE}=\{(k-1)\vec{a}+k\vec{b}\}\cdot k(\vec{a}+\vec{b})$

$=k(k-1)|\vec{a}|^2+k(2k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2$

$=k(k-1)+k(2k-1)+6k^2=0$

$9k^2-2k=0$

$\therefore\ k=\dfrac{2}{9}$

[다른 풀이]

피타고라스 정리를 이용하면 선분 BD 는 $\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{OD}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

삼각형 ABD 에서 중선 정리를 이용하면

$\overline{AD}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OD}^2)$

에서

$1+6=2\left(\overline{AO}^2+\dfrac{5}{4}\right)$

$\therefore\ \overline{AO}=\dfrac{3}{2}$

삼각형 ADH 에서 $\overline{AH}=x$ 라 하면 $\overline{AD}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AO}$ 이므로

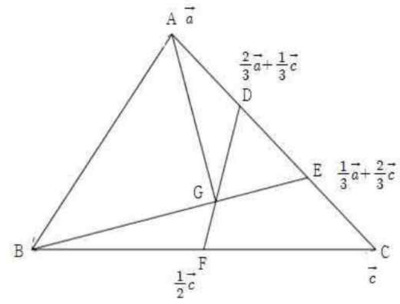
$1=x\cdot\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$

따라서 $k=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{2}{3}}{3}=\dfrac{2}{9}$

13) [정답] 37

[해설]



그림과 같이
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$라 놓으면

$\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{BG}$는 실수 t, s에 대하여

$\dfrac{t}{3}\vec{a}+\dfrac{2t}{3}\vec{c}=s\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+(1-s)\left(\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$\dfrac{t}{3}=\dfrac{2s}{3}$, $\dfrac{2t}{3}=\dfrac{s}{3}+\dfrac{1-s}{2}$,

$t=\dfrac{2}{3}$, $s=\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=-\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{c}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{27}(-7\vec{a}+4\vec{c})(\vec{a}+2\vec{c})$

$=\dfrac{1}{27}\{-7|\vec{a}|^2+8|\vec{c}|^2-10(\vec{a}\cdot\vec{c})\}$

$=\dfrac{1}{27}\{-63+128-10(\vec{a}\cdot\vec{c})\}=0$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{13}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\dfrac{\frac{13}{2}}{3\times4}=\dfrac{13}{24}=\dfrac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=37$

14) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로 선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ. △ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로

$\angle CAD=30°$

△EAD가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$

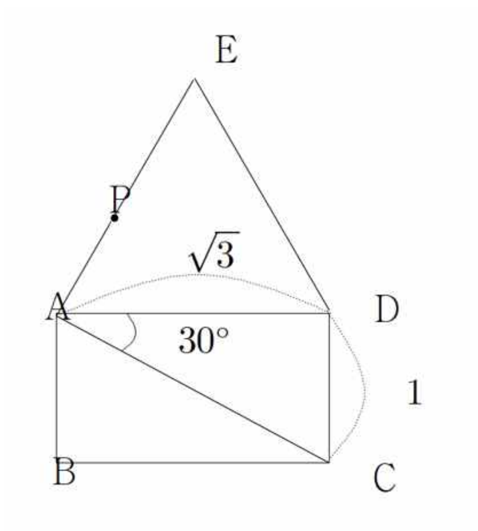
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

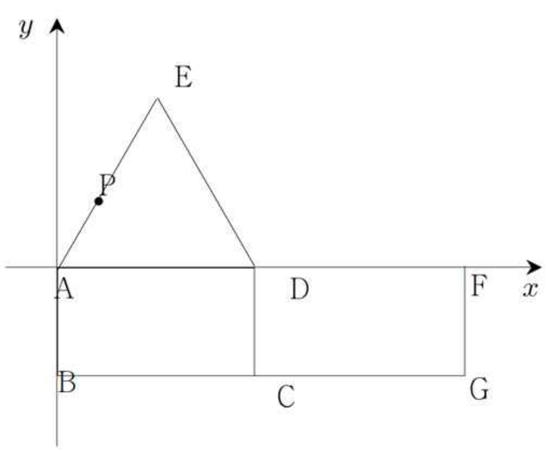
$=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)



ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AD}=\overline{DF}$인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

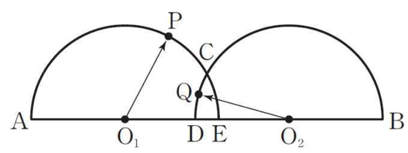
직선 AE의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$ 이므로

구하는 최솟값은 $\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15) [정답] **19**

[해설]



점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 호 AC와 만나는 다른 한 점을 F라 하면 $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다. $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$이고 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 G가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다.

따라서 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}|\geq|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=\dfrac{1}{2}$

$\angle AO_1C=\theta$라 하자.

$|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{O_1C}|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+|\overrightarrow{O_1A}|^2=\frac{1}{4}$$

$$1+2|\overrightarrow{O_1C}||\overrightarrow{O_1A}|\cos\theta+1=\frac{1}{4}$$

$$2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}-2$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{8}$$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{O_1H}=\overline{O_1C}\cos(\pi-\theta)=1\times(-\cos\theta)=\frac{7}{8}$$

이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로

$$\overline{AB}=\overline{AO_1}+\overline{O_1H}+\overline{HO_2}+\overline{O_2B}$$

$=1+\dfrac{7}{8}+\dfrac{7}{8}+1$

$=\dfrac{15}{4}$

따라서 $p=4$, $q=15$이므로 $p+q=4+15=19$

16) [정답] ⑤

[해설]

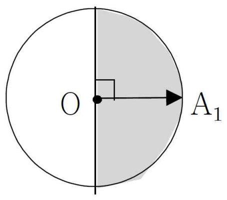
$|\overrightarrow{OX}| \le 1$ 이므로 점 X는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부와 경계이다.

또, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta \ge 0$

$\cos\theta \ge 0$

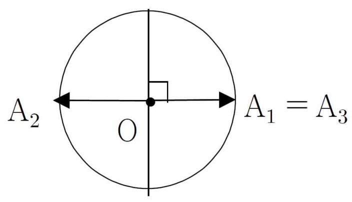
그러므로 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$ 이므로 조건을 만족시킬 점 X를 나타내는 도형 D는 반원과 이 반원의 내부이다.



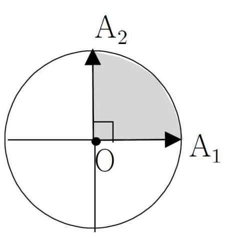
그러므로 도형 D의 넓이는 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \pi = \frac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$ 이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$ 이면 아래 그림과 같다.
이때, 점 X를 나타내는 도형 D는 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름이다.



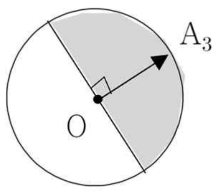
그러므로 D의 길이는 2이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$ 이면 $\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$
이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 다음과 같은 사분원의 경계 및 내부이다.



[그림1]

또, 벡터 $\overrightarrow{OA_3}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 그림과 같이 반원과 이 반원의 내부이다.



[그림2]

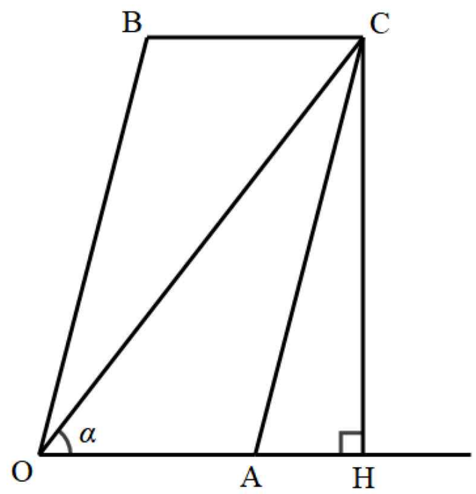
이때, 도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이기 위해서는 위의 두 도형의 공통부분이 [그림1]과 같은 사분원의 경계 및 내부이어야 한다. 그러므로 점 A_3는 호 A_1A_2 위에 있어야 한다. 즉, D에 포함되어야 한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17) [정답] 100

[해설]
조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.
조건 (나)에서
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA}$
$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
$= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$
$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$
$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2$
이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$

(ⅰ) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다.
다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$에서
$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$ 이므로
$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos(\angle CAH)$
$= \overline{OB} \times \frac{1}{4}$

$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편,

$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=2+8+2=12$

이므로

$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$

그러므로

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha$

$=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{OP}|=3$

이므로 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OX}|$이므로

$M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(ii) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|$

$=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}=3$

이므로 $|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|-|\overrightarrow{OX}|$이므로

$m=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여

$M\times m=4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)$

$=6\sqrt{6}-8$이므로

$a^2+b^2=6^2+(-8)^2=100$

18) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $\overrightarrow{AD}\neq\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ ($\because$D는 중점이 아님) (거짓)

ㄴ. A에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overrightarrow{HA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{HB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{HC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{HD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{HE}=\vec{e}$라 두면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{e}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{e}>0$

$(\because\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\vec{e}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{d}>0,\ \vec{c}\cdot\vec{e}<0)$

(참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{e}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{e}>0$

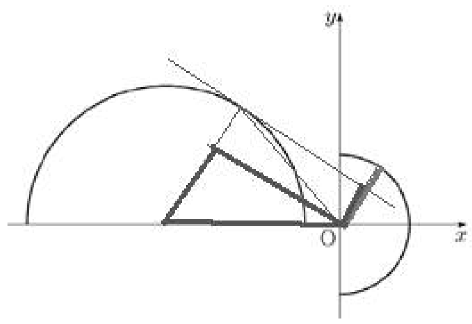
$(\because\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\vec{e}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}>0,\ \vec{d}\cdot\vec{e}<0)$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19) [정답] ⑤

[해설]



그림과 같이 $\overrightarrow{OP}$위로 $\overrightarrow{OQ}$의 정사영의 길이가 1이다.

따라서 직선 OP의 기울기는 $\tan\theta\frac{4}{3}$이고,

$a+b=2\cos\theta+2\sin\theta\frac{6}{5}+\frac{8}{5}=\frac{14}{5}$

20) [정답] ①

[해설]

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.

$\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$에서 $|\overrightarrow{PC}|=t\,(t>0)$이라 하면 $|\overrightarrow{PA}|=3t$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=135°$에서

$|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{PC}|$이므로 $|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}t$

$\angle APB=\angle BPC=135°$, $\angle CPA=90°$이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각

S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1 : S_2 : S_3=3t^2 : t^2 : \frac{3}{2}t^2=6:2:3$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로

$\overline{AD}:\overline{DP}=(S_1+S_2+S_2):S_2=11:2$

따라서 $\overrightarrow{AD}=\frac{11}{2}\overrightarrow{PD}$이므로 $k=\frac{11}{2}$

21) [정답] 12

[해설]

조건 (가)에서

$$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$$

이므로 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

따라서 점 P는 선분 AB를 $3:1$으로 외분하는 점이고,

$$\overline{AP}=\frac{3}{2}\overline{AB}=3$$

한편, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\angle CBA=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\angle BAC=\frac{\pi}{2},\ \overline{AC}=2\sqrt{3}$$

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\\&=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\\&=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{AH}|=6\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{3}$

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ=\angle BAQ+\angle BQA$$

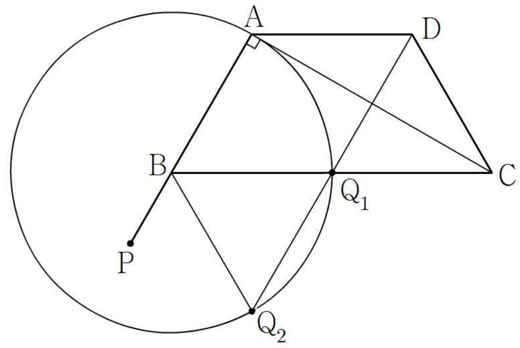
이므로 $2\times\angle BQA=\angle PBQ$를 만족시키려면

$$\angle BAQ=\angle BQA$$

즉, $\overline{AB}=\overline{BQ}$이어야 한다.

따라서 점 Q는 점 B를 중심으로 하고 반지름이 2인 원과 직선 DH의 교점이므로 그림과 같이 점 Q_1 또는 점 Q_2가 가능하다.

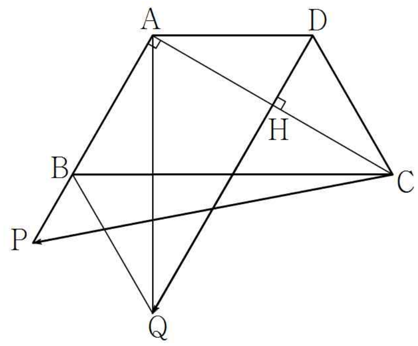
점 Q_1은 조건 (다)에서 $\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$라는 조건에 어긋나므로 점 Q_2가 조건을 만족하는 점이다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD}=2,\ \overline{AQ}=2\sqrt{3}$$

이므로 $\overline{DQ}=\sqrt{4+12}=4$



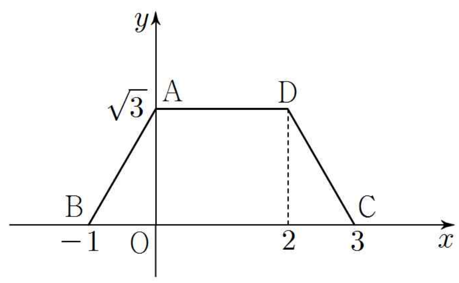
$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{DQ}\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DQ}\\&=0+|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{DQ}|\\&=12\end{aligned}$$

[다른 풀이]

그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$$A(0,\ \sqrt{3}),\ B(-1,\ 0),\ C(3,\ 0),\ D(2,\ \sqrt{3})$$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a,\ b)$라 하면

$$\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$$

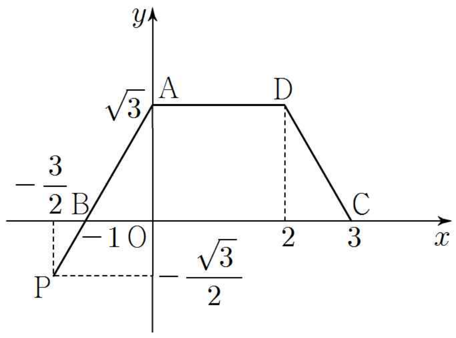
에서 $(3,\ -\sqrt{3})=2\{(2,\ 0)+(a+1,\ b)\}$

$3=2(a+3)$에서 $a=-\frac{3}{2}$

$-\sqrt{3}=2b$에서 $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $P\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 그림과 같이 세 점 A, B, P는 한

직선 위에 있고 $\overline{BP}=1$이다.



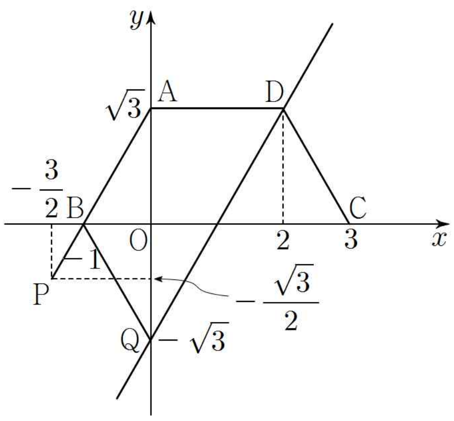
또, 점 Q의 좌표를 Q(x, y)라 하면

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ}=6$에서

$$(3,\ -\sqrt{3}) \cdot \left(x+\frac{3}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6$$

$$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ=\angle BAQ+\angle BQA$$

이므로 $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$를 만족시키려면

$$\angle BAQ=\angle BQA$$

즉, $\overline{AB}=\overline{BQ}$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 Q$(0,\ -\sqrt{3})$이므로

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}=\left(-\frac{9}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2,\ -2\sqrt{3})$$

$$=9+3$$

$$=12$$

22) [정답] 60

[해설]

세 점 A, B, C는 원 위의 점이므로

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$$

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$에서

$$x^2|\overrightarrow{OA}|^2+10x(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})+25|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=9|\overrightarrow{OC}|^2$$

$x^2+10x(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})+25=9$이고

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=\frac{-x^2-16}{10x}=-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right)$$

$x>0$이므로

$$x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{16}{x}}=8$$

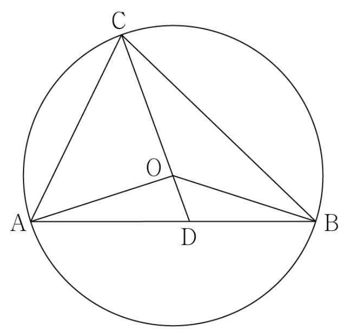
(등호는 $x=4$일 때 성립한다.)

$$-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right)\leq-\frac{4}{5}$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$는 $x=4$일 때 최댓값 $-\frac{4}{5}$를 갖는다.

$x=4$일 때 주어진 식은

$$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\frac{4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{9}$$



선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{OD}=\frac{4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{9}$이다.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OD}$에서 $\overline{CO}:\overline{OD}=3:1$이므로

$$\overline{CD}:\overline{OD}=4:1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라

하면 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$에서 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$$\sin\theta=\frac{3}{5}$$

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta=\frac{3}{10}$$

㉠에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{6}{5}$

따라서 $50S=60$

23) [정답] ④

[해설]

점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 직선 AB를 y축으로 하면 점 C의 좌표는 $C(2\sqrt{3}, -2)$이다.

원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $P(x, y)$에 대하여

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$라 하면 $10\le k\le 18$일 때, 직선과 원이 만나므로 k의 최댓값은 18이다.

24) [정답] **17**

[해설]

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$

이고, 네 점 A, C, D, O는 모두 정점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$는 상수이다. 즉, 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

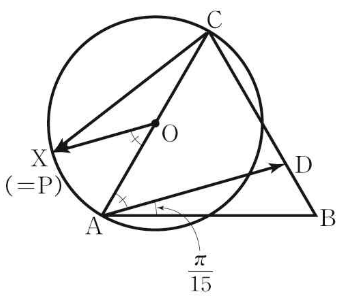
이제, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{OX}|\cdot\cos\theta$이고,

$|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OX}|$의 값은 상수이므로 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되기 위해서는 $\cos\theta$의 값이 최소가 되어야 한다.

그러므로 $\theta=-\pi$일 때 즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 반대 방향일 때, 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 된다.

따라서 다음 그림에서



$\angle AOP=\angle CAD$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$

이고, $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP$이므로

$\angle ACP=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore\ p=15,\ q=2$

$\therefore\ p+q=17$

25) [정답] **180**

[해설]

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}$

여기서, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=25$, $\overrightarrow{OP}^2=25$ 이고

AB의 중점을 Q라 하면

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 반대방향일 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 최댓값을 가진다

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 25+25-2(-5\times13)=180$

26) [정답] **27**

[해설]

원 C_2의 중심을 O_2라 하면,

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$

$=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.

그러므로

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}=(4,\ -1)\cdot(3,\ 2)=12-2=10$

$\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 θ라 하면

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$

$=\sqrt{17}\times1\times\cos\theta$

$\le\sqrt{17}$

에서

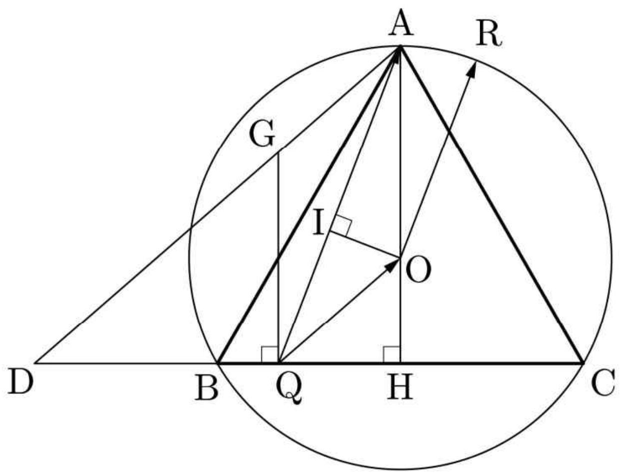
$\theta=0$일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은 $\sqrt{17}$

그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$

따라서 $a+b=10+17=27$

27) [정답] 15

[해설]



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3OB-OC}{3-1}$이므로 점 D는 선분 CB를 $3:1$로 외분하는 점이다.

선분 DA를 $2:1$로 내분하는 점을 G라 하면

$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$이므로 선분 PG의 길이가 최소일 때 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.

그러므로 점 Q는 점 G에서 선분 CD에 내린 수선의 발이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=6\overline{QH}=\dfrac{1}{3}\overline{DH}=2,\ \overline{AH}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{QA}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$

$\overline{OA}=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로 점 R는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이다.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})$

$\quad=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_1(0\le\theta_1\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AI}:\overline{AH}=\overline{OA}:\overline{QA}$

$\overline{AI}:3\sqrt{3}=2\sqrt{3}:\sqrt{31}$

$\overline{AI}=\dfrac{18}{\sqrt{31}}=\dfrac{18\sqrt{31}}{31}$

$\overline{QI}=\overline{QA}-\overline{AI}=\sqrt{31}-\dfrac{18\sqrt{31}}{31}=\dfrac{13\sqrt{31}}{31}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

$\quad=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QI}|$

$\quad=\sqrt{31}\times\dfrac{13\sqrt{31}}{31}=13$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{OR}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_2(0\le\theta_2\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|\cos\theta_2$

$\quad=\sqrt{31}\times2\sqrt{3}\times\cos\theta_2$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{OR}$가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 최댓값은

$\sqrt{31}\times2\sqrt{3}\times\cos0=2\sqrt{93}\,\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$

$=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

$\le13+2\sqrt{93}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값은 $13+2\sqrt{93}$

$p=13,\ q=2$

따라서 $p+q=15$

28) [정답] ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$에서 $\angle COB=90^\circ$, $\angle AOC=30^\circ$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OC}|\times\cos30^\circ=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{OC}|$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=24$에서 $|\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-|\overrightarrow{OP}|^2$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-16$ …… ㉠

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$0^\circ\le\theta\le90^\circ$이고

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ})$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$\quad=16\sqrt{3}\cos\theta+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$\theta=0^\circ$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le16\sqrt{3}+4$ …… ㉡

$\theta=90^\circ$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 반대일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최소이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge-4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-4-16\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}\le16\sqrt{3}+4-16$

$M=16\sqrt{3}-12,\ m=-20$

따라서 $M+m=16\sqrt{3}-32$

29) [정답] 48

[해설]

$|\overrightarrow{OP}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은

$x^2+y^2=10^2$

따라서 이 도형 위의 점 $A(a,\ b)$에서의 접선 l의 방정식은

$$l\ :\ ax+by=100$$

즉, $y=-\frac{a}{b}x+\frac{100}{b}$이므로 기울기 $u'=-\frac{a}{b}$이다.

또한, 점 $A(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$$a^2+b^2=100 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선을 m이라 하면 기울기 $u=1$이다.

두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기를 θ가

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$이므로

$$\tan\theta=7\ (\because\ \text{피타고라스정리})$$

따라서 $\tan\theta=\left|\frac{u-u'}{1+uu'}\right|$에서 $u=1,\ u'=-\frac{a}{b}$이므로

$$\tan\theta=\left|\frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}\right|$$

$$=\frac{1+\frac{a}{b}}{-\left(1-\frac{a}{b}\right)}$$

$=7(\because\ a>b>0)$

$$-7+\frac{7a}{b}=1+\frac{a}{b},\ \frac{6a}{b}=8,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{3} \qquad \therefore a=\frac{4}{3}b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡을 연립하면

$$\left(\frac{4}{3}b\right)^2+b^2=100,\ b^2\left(\frac{16}{9}+1\right)=100,\ b^2\left(\frac{25}{9}\right)=100$$

$$b^2=36 \qquad \therefore\ b=6(\because\ b>0)$$

$$\therefore\ a=\frac{4}{3}\times6=8$$

따라서 두 수 $a,\ b$의 곱 $ab=48$