[준킬러][확통] 3통계

05 확통 07 이산확률분포

01 이산확률변수

02 이산확률분포의 성질2 (확률 구하기)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 27

1. 이산확률변수 X가 취할 수 있는 값이 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} c, & x=0,\ 1,\ 2 \\ 2c, & x=3,\ 4,\ 5 \\ 5c^2, & x=6,\ 7 \end{cases} \text{(단, } c\text{는 양수)}$$

이다. 확률변수 X가 6 이상일 사건을 A, 확률변수 X가 3 이상일 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

[출처] 2011 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

2. 이산확률변수 X는 1, 2, 3, $\cdots$, 90의 값을 가질 때, 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=a\cos^2(x^\circ) \text{ (단, } a\text{는 상수)}$$

이다. 이때, 확률 $\mathrm{P}(30 \le X \le 60)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{31}{89}$ ③ $\frac{31}{90}$

④ $\frac{62}{89}$ ⑤ $\frac{31}{45}$

05 확통 07 이산확률분포

01 이산확률변수

03 확률분포 구하기

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

3. 10개의 구슬이 들어있는 주머니가 있다. 10개의 구슬 각각에는 1부터 10까지 서로 다른 자연수가 하나씩 적혀있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 집어넣는 시행을 세 번 반복하여 첫 번째 나온 수를 a, 두 번째 나온 수를 b, 세 번째 나온 수를 c라 하자. 다음과 같은 규칙으로 X를 정할 때, $X=5$일 확률은?

[규칙 1] a, b, c가 모두 다르면 중간 크기의 수를 X라 한다.

[규칙 2] a, b, c중에서 두 개 이상이 같으면 같은 수를 X라 한다.

① $\frac{18}{125}$ ② $\frac{37}{250}$ ③ $\frac{19}{125}$

④ $\frac{39}{250}$ ⑤ $\frac{4}{25}$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 16

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 16

4. 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.

(나) 두 번째 시행부터
(1) 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
(2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X=2)$의 값은?

① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{32}$

④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 19

5. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$ $(x=3,\ 4,\ 5,\ 6)$을 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로
> $\mathrm{P}(X=3)=$ (가)
>
> (ⅱ) $X=4$인 사건은
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
> $\mathrm{P}(X=4)=$ (나) $+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$
>
> (ⅲ) $X=5$인 사건은
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
> $\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+$ (다)
>
> (ⅳ) $X=6$인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로
> $\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{ab}{c}$의 값은?

① $\frac{4}{9}$　② $\frac{7}{9}$　③ $\frac{10}{9}$
④ $\frac{13}{9}$　⑤ $\frac{16}{9}$

05 확통

07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

01 도수분포에서 평균과 표준편차

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 29

6. 두 자료 A와 B가 있다. 서로 다른 5개의 수로 이루어진 A의 평균과 중앙값은 모두 25이다. 7개의 수로 이루어진 B에서 5개는 A의 자료와 일치하고, 나머지 2개는 x, y이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. (중앙값이란 작은 수부터 나열할 때 가운데 위치한 수를 의미한다.)

<보 기>

> ㄱ. B의 평균이 25이면 B의 중앙값도 25이다.
> ㄴ. B의 평균이 27이상이면 x와 y중에서 적어도 하나는 32이상이다.
> ㄷ. x와 y가 모두 25이면 B의 표준편차가 A의 표준편차보다 작다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 확통　　07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

02 평균1 (표)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 10월 22

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 22

7. 다음은 확률변수 X의 확률분포가

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{10}+(-1)^k p\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$$

인 확률변수 X의 확률분포표이다.

X	1	2	3	$\cdots$	$2n$	계
$\mathrm{P(X=k)}$	$\frac{1}{10}-p$	$\frac{1}{10}+p$	$\frac{1}{10}-p$	$\cdots$	$\frac{1}{10}+p$	1

확률변수 X의 기댓값이 $\mathrm{E}(X)=\frac{23}{4}$일 때, $\frac{1}{p}$의 값을 구하시오. (단, $0<p<\frac{1}{10}$이고, n은 자연수이다.)

05 확통　　07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

03 평균2 (확률질량함수)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 6

8. 이산확률변수 X가 값 x를 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_6\mathrm{C}_x}{k}$$

(단, $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$이고, k는 상수이다.)

일 때, 확률변수 X의 기댓값을 m이라 하면 $mk^2=2^a\times3^b\times7^c$이다. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① 8　② 9　③ 10

④ 11　⑤ 12

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 6

9. 이산확률변수 X가 값 x를 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{x}}{k}$$

(단, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이고, k는 상수이다.)

일 때, 확률변수 X의 기댓값을 m이라 하면 $mk^2=2^a\times3^b\times7^c$이다. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 28

10. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1 부터 5 까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=\mathrm{k})=\frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $\mathrm{E}(\mathrm{X})=4$ 일 때, $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\mathrm{a}$ 이다. $8a$ 의 값을 구하시오.

05 확통 07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

04 평균3 (확률분포 구하기)

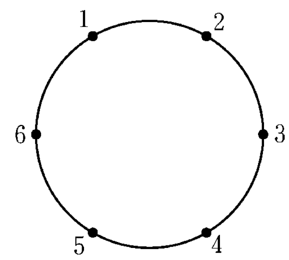
[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 10월 17

11. 정답이 하나인 오지선다형의 문항에서 맞으면 5점을 주고 적은 답이 틀리면 적당히 감점을 하며 답을 적지 않으면 0점을 준다. 이 문항의 답을 임의로 적을 때 기대되는 점수가 0이 되도록 하려면, 적은 답이 틀리면 몇 점을 감점해야 하는가?

① 0.75점 ② 0.8점 ③ 1점
④ 1.2점 ⑤ 1.25점

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 28

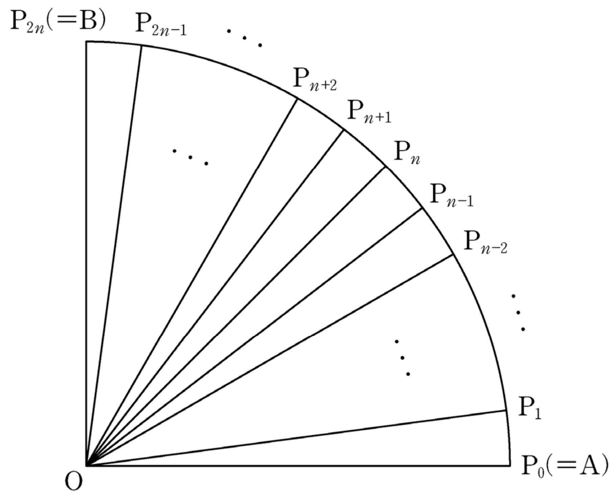
12. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 6등분한 점에 1부터 6까지의 번호를 하나씩 부여하였다. 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수에 해당하는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 확률변수 X라 할 때, X의 평균 E(X)는?



① $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

13. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A})$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $\mathrm{P}_{2n}(=\mathrm{B})$라 하자.



$n=3$일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$

④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

05 확통

07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

05 표준편차1 (표)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 29

14. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.

05 확통 07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

06 표준편차2 (확률질량함수)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 03월 30

15. 확률변수 X는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$의 값을 취하고, $X=k(1 \le k \le n)$일 확률이 $\mathrm{P}(X=k)=ck$라 한다. 확률변수 X의 표준편차가 $\sqrt{6}$이 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, c는 상수이다.)

05 확통 07 이산확률분포

02 이산확률변수의 평균과 표준편차

08 평균과 표준편차 (빈 칸 넣기)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 17

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 18

16. 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n \ge 4$)

> 자연수 $k(4 \le k \le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{(가)}}{{}_n\mathrm{C}_4}$이다.
>
> 자연수 $r(1 \le r \le k)$에 대하여
>
> ${}_k\mathrm{C}_r=\dfrac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$이므로 $k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$이다.
>
> 그러므로
>
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$
>
> $=\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)=\dfrac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}$
>
> 이다.
>
> $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$이므로 $\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 18

17. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 x_1, x_2, x_3이라 하고, 이 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{36}$이다. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정의 일부이다.

> 세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)과 같이 나타내자.
> 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q라 하고 $p-q=k$라 하자.
> (1) $k=0$일 때
> 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{(가)}$이고,
> $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6^3}\times\boxed{(가)}$
> (2) $k\neq0$일 때
> i) $k=1$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $5\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)$
> 이다.
> ii) $k=2$를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $4\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+3!\right)$
> 이다.
> ⋮
> 그러므로 $1\leq k\leq5$일 때, 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\left(\boxed{(나)}\right)\times3!\right\}$ 이고
> $\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\left(\boxed{(나)}\right)\times3!\right\}$
> (1),(2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
> $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{(다)}\right)=\frac{35}{12}$

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{f(5)\times g(3)}{a}$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 19

18. 점 P가 수직선 위의 원점에 놓여 있다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 2만큼, 6의 약수가 아니면 음의 방향으로 1만큼 움직이는 시행을 반복한다. 점 P의 좌표가 9 이상 또는 -4 이하가 되거나 시행 횟수가 6회가 되면 위 시행을 멈춘다고 할 때, 점 P의 최종 위치의 좌표를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 위의 시행을 5회 이하로 하게 되는 경우는 6의 약수인 눈이 처음부터 연속으로 5회 나오거나 6의 약수가 아닌 눈이 처음부터 연속으로 4회 나오는 경우뿐이다.
> 확률변수 X가 가질 수 있는 값의 최솟값은 -4이고 최댓값은 $\boxed{(가)}$이다.
> $\mathrm{P}(X=-4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4$
> $\mathrm{P}(X=-3)=\boxed{(나)}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^5$
> $\mathrm{P}(X=0)=\left({}_6\mathrm{C}_2-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$
> $\mathrm{P}(X=3)={}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3$
> $\mathrm{P}(X=6)={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2$
> $\mathrm{P}(X=9)=\boxed{(다)}\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^1$
> $\mathrm{P}(X=\boxed{(가)})=\left(\frac{2}{3}\right)^5$
> 따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{1420}{243}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 19

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 x_1, x_2, x_3이라 하고, 이 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{5}{36}$이다. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정의 일부이다.

> 세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)과 같이 나타내자.
> 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q라 하고 $p-q=k$라 하자.
> (1) $k=0$일 때
> 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
> $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6^3}\times\boxed{\text{(가)}}$
> (2) $k\neq 0$일 때
> (i) $k=1$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $5\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}\right)$
> 이다.
> (ii) $k=2$를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $4\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!\right)$
> 이다.
> ⋮
> 그러므로 $1\leq k\leq 5$일 때, 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times 3!\right\}$
> 이고
> $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times 3!\right\}$
> (1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\dfrac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{\text{(다)}}\right)=\dfrac{35}{12}$

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{f(5)\times g(3)}{a}$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

20. 1부터 $(2n-1)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, n은 4 이상의 자연수이다.)

> 정수 $k(0 \le k \le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $(\boxed{(가)}-k)$장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로
>
> $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$
>
> $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$
>
> $\mathrm{P}(X=2)=\boxed{(나)}$
>
> $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$
>
> 이다. 그러므로
>
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$
>
> $=\dfrac{\boxed{(다)}}{2n-1}$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $a\times f(5)\times g(8)$의 값은?

① 22 ② $\dfrac{45}{2}$ ③ 23 ④ $\dfrac{47}{2}$ ⑤ 24

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 18

21. 주머니에 1이 적힌 공이 n개, 2가 적힌 공이 $(n-1)$개, 3이 적힌 공이 $(n-2)$개, $\cdots$, n이 적힌 공이 1개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)\ge 5$가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정이다.

> n 이하의 자연수 k에 대하여 k가 적힌 공의 개수는 $(n-k+1)$이므로
>
> $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{2(n-k+1)}{\boxed{(가)}}\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$
>
> 확률변수 X의 평균은
>
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(X=k)$
>
> $=\dfrac{2}{\boxed{(가)}}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$
>
> $=\boxed{(나)}$
>
> $\mathrm{E}(X)\ge 5$에서 n의 최솟값은 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(7)+g(7)+a$의 값은?

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 18

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 18

22. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 상자에 들어 있다. 이 상자에서 임의로 3장의 카드를 한 장씩 꺼내고, 꺼낸 순서대로 카드의 뒷면에 숫자 1, 2, 3을 차례로 적는다. 이 3장의 카드 중 앞뒤 양쪽 면에 서로 다른 숫자가 적혀 있는 카드의 개수를 확률변수 X라 하자.

예를 들어, 꺼낸 카드의 앞면에 적혀 있는 숫자가 차례로 4, 1, 3인 경우는 $X=2$이다. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 상자에서 꺼내기 전 카드의 뒷면에는 숫자가 적혀 있지 않고, 꺼낸 카드는 상자에 다시 넣지 않는다.)

> 상자에 들어 있는 5장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 한 장씩 꺼내고, 꺼낸 순서대로 카드의 뒷면에 숫자 1, 2, 3을 차례로 적는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$이다.
>
> 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로
>
> (i) $X=0$인 사건은 3장의 카드 모두 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 경우이다. 그러므로
>
> $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{60}$
>
> (ii) $X=1$인 사건은 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 다른 카드가 1장이고, 나머지 2장의 카드는 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 경우이다. 그러므로
>
> $\mathrm{P}(X=1)=\boxed{(가)}$
>
> (iii) $X=2$인 사건은 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 다른 카드가 2장이고, 나머지 1장의 카드는 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 경우이다. 그러므로
>
> $\mathrm{P}(X=2)=\boxed{(나)}$
>
> (iv) $X=3$인 사건의 경우에는 확률질량함수의 성질에 의하여
>
> $\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\dfrac{1}{60}+\boxed{(가)}+\boxed{(나)}\right)$
>
> 이다.
>
> 따라서 $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $10a+20b+5c$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 18

23. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 적힌 수를 더하는 시행을 반복한다. 꺼낸 공은 다시 넣지 않으며, 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이거나 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 더하다가 그 합이 짝수가 되면 이 시행을 멈추기로 한다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 모든 공의 크기와 재질은 서로 같다.)

> 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수가 되려면 그 이후 시행에서 홀수가 적힌 공이 한 번 더 나와야 한다. 이때 짝수가 적힌 공은 4개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 m이라 하면 $m=\boxed{(가)}$이다.
>
> (ⅰ) $X=1$인 경우
> 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이므로
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9}$$
>
> (ⅱ) $X=2$인 경우
> 첫 번째와 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수이므로
> $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_2}=\frac{5}{18}$$
>
> (ⅲ) $X=k\ (3\le k\le m)$인 경우
> 첫 번째와 k번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이고, 두 번째부터 $(k-1)$번째까지 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수이므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{(나)}}{{}_9\mathrm{P}_k}$
>
> 따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{m}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=2$

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $a+f(4)$의 값은?

① 246 ② 248 ③ 250
④ 252 ⑤ 254

05 확통

07 이산확률분포

03 aX+b의 평균과 표준편차

02 aX+b의 평균2 (표)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 23

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 23

24. 확률변수 X의 확률분포 표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
P(X = x)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

$p_5-p_1=\dfrac{8}{25}$, $p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n=0\,(n=1, 2, 3)$일 때, 확률변수 $100X$의 기댓값 $\mathrm{E}(100X)$의 값을 구하시오.

05 확통

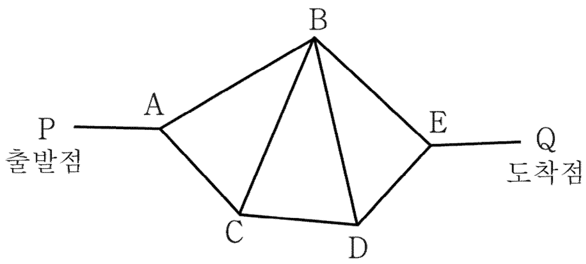
07 이산확률분포

03 aX+b의 평균과 표준편차

04 aX+b의 평균4 (확률분포 구하기)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 10월 30

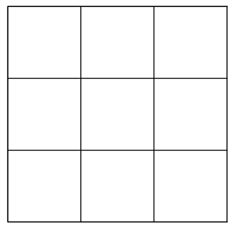
25. 그림과 같이 어느 지역의 5개의 관광지 A, B, C, D, E를 연결하는 도로망이 있다.



어느 여행사에서는 P지점을 출발하여 A, B, C, D, E 5개 지역을 모두 방문하거나 일부 지역만을 방문하면서, 한 번 방문한 관광지는 다시 지나지 않고 Q지점에 도착하는 7가지 경우의 관광코스를 만들었다. 그리고, 한 관광지를 방문할 때마다 14000원씩 요금을 부가하여 각 관광코스별 관광요금을 결정하였다.
예를 들면 P→A→B→E→Q관광코스의 요금은 3×14000원이다. 한 관광객이 임의로 7개의 관광코스 중 어느 하나를 선택하였을 때, 그 관광코스의 요금을 확률변수 X라고 하자. 이때, 확률변수 $\dfrac{X}{1000}$의 평균을 구하시오.

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 20

26. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 나누고, 이 중에서 3개를 색칠할 때 나타나는 모양은 다음과 같이 세 가지 유형으로 분류할 수 있다.



(가) 유형 1 : , 와 같은 모양

(나) 유형 2 : , , , 와 같은 모양

(다) 유형 3 : 유형 1 도 아니고 유형 2 도 아닌 모양

한 변의 길이가 1인 위의 정사각형 9개 중에서 임의로 3개를 색칠하여 얻은 모양의 유형에 따라 확률변수 X는 다음과 같다고 하자.

$$X=\begin{cases}1 & (\text{유형 1인 경우})\\ 2 & (\text{유형 2인 경우})\\ 3 & (\text{유형 3인 경우})\end{cases}$$

$E(42X)$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

27. 프로야구 한국시리즈는 두 팀이 출전하여 7번의 경기 중 4번을 먼저 이기는 팀이 우승팀이 된다. A, B두 팀이 한국시리즈에 출전하여 우승팀이 정해지기까지 치른 경기의 수를 확률변수 X라 하자. 매 경기마다 각 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같다고 할 때, $\mathrm{E}(16X)$의 값을 구하시오.

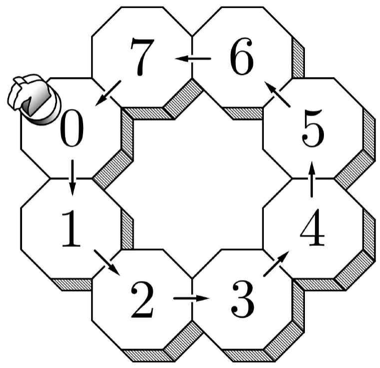
(단, 두 팀이 경기를 할 때 무승부는 없다고 가정한다.)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 29

28. 그림과 같이 8개의 칸에 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 말판이 있고, 숫자 0이 적혀 있는 칸에 말이 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 3 이상이면 말을 화살표 방향으로 한 칸 이동시키고, 나오는 눈의 수가 3보다 작으면 말을 화살표 반대 방향으로 한 칸 이동시킨다.

위의 시행을 4회 반복한 후 말이 도착한 칸에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(36X)$의 값을 구하시오.



05 확통 07 이산확률분포

04 이항분포

01 이항분포1 (확률)

[출처] 2005 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

29. 윷놀이는 네 개의 윷짝으로, 뒤집어지는 윷짝의 개수가 1, 2, 3, 4, 0일 때, 각각 순서대로 도, 개, 걸, 윷, 모라고 부르며 하는 놀이이다.
그런데 철수는 윷놀이에서 가장 나오기 어려운 것부터 적으면 모, 윷, 도, 걸, 개의 순서라고 주장한다. 각 짝이 뒤집어질 확률 p의 값은 네 짝 모두 같다고 가정하고 또 각 짝의 결과는 서로 독립적이라고 할 때, 철수의 주장이 참이 되는 p값의 범위는?
(단, 가능한 한 좁은 범위로 답하되 철수가 주장하는 순서에 맞는 p값은 모두 범위에 포함되어야 하며, $4^{\frac{1}{3}}=1.58$, $4^{-\frac{1}{3}}=0.63$, $\left(1+4^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1}=0.61$로 계산한다.)

① $p<0.5$　② $0.5<p<0.6$
③ $0.5<p<0.61$　④ $0.5<p<0.63$
⑤ $p>0.63$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 13

30. 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고, 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S 이였을 확률은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

05 확통 07 이산확률분포

04 이항분포

05 이항분포5 (aX+b의 평균과 분산의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 17

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

31. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼, 3이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17

④ 19 ⑤ 21

05 확통 07 이산확률분포

04 이항분포

07 이항분포7 (시그마 표현의 해석)

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

32. 이산확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \dfrac{1}{121}\right)$을 따른다.

함수 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{120}(x-ak)^2\mathrm{P}(X=k)$의 최솟값이 1이 되도록 하는 양수 a에 대하여 $120a$의 값을 구하시오.

05 확통 07 이산확률분포

04 이항분포

08 이항분포8 (지수꼴 확률변수의 평균)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

33. 사건 A가 1회의 시행에서 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 평균이 80이고 분산이 64라 할 때, $\sum_{r=0}^{n} 5^r \mathrm{P}(X=r)$의 값은?

(단, $\mathrm{P}(X=r)$은 $X=r$일 때의 확률이다.)

① $\left(\frac{9}{5}\right)^{400}$ ② $\left(\frac{7}{5}\right)^{450}$ ③ $\left(\frac{9}{5}\right)^{399}$

④ 2^{399} ⑤ 2^{400}

05 확통 07 이산확률분포

05 기타

01 교과외1 (급수)

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

34. 눈의 수가 1부터 6까지인 주사위를 던져서 눈의 수가 1 또는 6이 나올 때까지 반복한다. 한 번 던지고 중지하면 1000원을 받고, 두 번 던지고 중지하면 2000원을 받는다. 이와 같이 계속하여 n번 던지고 중지하면 $n\times1000$원을 받을 때, 받는 돈의 기댓값은?

① 1000원 ② 1500원 ③ 2000원

④ 2500원 ⑤ 3000원

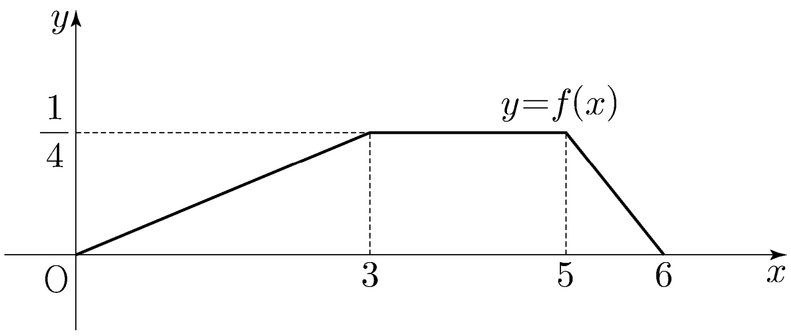
05 확통 08 정규분포

01 확률밀도함수

04 확률밀도함수4 (활용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

35. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 6$, $0 \leq Y \leq 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \leq x \leq 6$인 모든 x에 대하여

$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \leq Y \leq 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

05 확통 08 정규분포

03 정규분포의 표준화

01 확률 구하기1 (기본)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 20

36. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\frac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 $G(t)=\mathrm{P}\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$이다.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

함수 $G(t)$의 최댓값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915

④ 0.7257 ⑤ 0.7580

05 확통

08 정규분포

03 정규분포의 표준화

03 확률 구하기3 (실생활. 곱셈정리)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 13

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 13

37. 어느 재래시장을 이용하는 고객의 집에서 시장까지의 거리는 평균이 1740 m, 표준편차가 500 m인 정규분포를 따른다고 한다. 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 이상인 고객 중에서 15 %, 2000 m 미만인 고객 중에서 5 %는 자가용을 이용하여 시장에 온다고 한다. 자가용을 이용하여 시장에 온 고객 중에서 임의로 1 명을 선택할 때, 이 고객의 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만일 확률은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.52) = 0.2$로 계산한다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 15

38. 어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4 분, 표준편차가 15 분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73 분 이상인 직원들 중에서 40%, 73 분 미만인 직원들 중에서 20%가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1 명이 지하철을 이용하였을 확률은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.44) = 0.17$로 계산한다.)

① 0.306 ② 0.296 ③ 0.286

④ 0.276 ⑤ 0.266

05 확통

08 정규분포

03 정규분포의 표준화

06 확률관계식2 (변수2개)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 29

39. 확률변수 X와 Y는 평균이 모두 0이고 분산이 각각 σ^2과 $\frac{\sigma^2}{4}$인 정규분포를 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다. 두 양수 a와 b에 대하여

$$\mathrm{P}(|X| \le a) = \mathrm{P}(|Y| \le b)$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a > b$

ㄴ. $\mathrm{P}\left(Z > \frac{2b}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Y > \frac{a}{2}\right)$

ㄷ. $\mathrm{P}(Y \le b) = 0.7$일 때, $\mathrm{P}(|X| \le a) = 0.3$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 28

40. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. 상수 a에 대하여 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y = 3X - a$
(나) $\mathrm{P}(X \le 4) = \mathrm{P}(Y \ge a)$

$\mathrm{P}(X \ge 9)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668
③ 0.1587 ④ 0.2417
⑤ 0.3085

05 확통 08 정규분포

03 정규분포의 표준화

07 확률관계식3 (실생활)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 28

41. 어느 회사 직원의 하루 생산량은 근무 기간에 따라 달라진다고 한다. 근무 기간이 n개월 $(1 \le n \le 100)$인 직원의 하루 생산량은 평균이 $an+100$(a는 상수), 표준편차가 12인 정규분포를 따른다고 한다. 근무 기간이 16개월인 직원의 하루 생산량이 84 이하일 확률이 0.0228일 때, 근무 기간이 36개월인 직원의 하루 생산량이 100 이상이고 142 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8185 ③ 0.9104
④ 0.9270 ⑤ 0.9710

05 확통 08 정규분포

03 정규분포의 표준화

08 확률관계식4 (실생활. 커트라인문제)

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

42. 지난달에 시행된 2005 학년도 모의대학 수학능력시험에서는 수험생의 상위 15.9 % 가 도심근교의 대학에 합격할 것으로 나타났다. 이 시험에 응시한 전체 수험생의 점수는 평균이 520 점이고 표준 편차가 90 점인 정규분포를 이루었고, 수험생이 3000 명 거주하고 있는 K 지역 수험생들의 점수는 평균이 580 점이고 표준편차가 20 점인 정규분포를 이루었다. K지역의 수험생 중 도심 근교의 대학에 합격할 것으로 나타난 인원수는 ?
(단, 대학이나 학과는 고려하지 않는다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.192
1	0.341
1.5	0.353
2	0.477

① 441 명 ② 430 명 ③ 419 명
④ 408 명 ⑤ 392 명

05 확통 08 정규분포

03 정규분포의 표준화

10 확률밀도함수의 해석

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 8

43. 어느 고등학교 3학년 학생의 키는 평균이 170cm이고 표준편차가 5cm인 정규분포를 따른다고 한다. 길이가 모두 10cm인 다음의 세 구간 A, B, C에 속하는 학생 수를 차례로 a, b, c라고 할 때, a, b, c사이의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

A= [165, 175]
B= [163, 173]
C= [169, 179]

① $a \geq b \geq c$ ② $a \geq c \geq b$ ③ $b \geq c \geq a$
④ $c \geq a \geq b$ ⑤ $c \geq b \geq a$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 18

44. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다.
$f(12) = g(26)$, $\mathrm{P}(Y \geq 26) \geq 0.5$일 때, $\mathrm{P}(Y \leq 20)$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.2255

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 18

45. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5 인 정규분포를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$

(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때 $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$ 의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062

④ 0.078 ⑤ 0.097

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 29

46. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$

(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때
$\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다.
$1000a$의 값을 오른쪽
표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 18

47. 확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$ 을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$$f(12) \le g(20)$$

을 만족시키는 m 에 대하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$ 의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745

④ 0.8185 ⑤ 0.9104

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 18

48. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ {\sigma_1}^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ {\sigma_2}^2)$을 따르고, 확률변수 $X,\ Y$의 확률밀도함수는 각각 $f(x),\ g(x)$이다. $\sigma_1 = \sigma_2$이고 $f(24) = g(28)$일 때, 확률변수 $X,\ Y$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(m_1 \le X \le 24) + \mathrm{P}(28 \le Y \le m_2) = 0.9544$

(나) $\mathrm{P}(Y \ge 36) = 1 - \mathrm{P}(X \le 24)$

$\mathrm{P}(18 \le X \le 21)$ 의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247

④ 0.6826 ⑤ 0.7745

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 29

49. 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(2b-a,\ \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(가) $\mathrm{P}(X \le 11) = \mathrm{P}(Y \ge 11)$
(나) $f(17) < g(10) < f(15)$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 28

50. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = f(x+6)$$

이다. 두 확률변수 X, Y와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le 11) = \mathrm{P}(Y \ge 23)$
(나) $\mathrm{P}(X \le k) + \mathrm{P}(Y \le k) = 1$

다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 $\mathrm{P}(X \le k) + \mathrm{P}(Y \ge k)$의 값이 0.1336일 때, $\mathrm{E}(X) + \sigma(Y)$의 값은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① $\dfrac{41}{2}$ ② 21 ③ $\dfrac{43}{2}$ ④ 22 ⑤ $\dfrac{45}{2}$

05 확통 08 정규분포

04 이항분포와 정규분포의 관계

05 이항분포의 확률관계식1 (정규분포화)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 16

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 16

51. 세 확률변수 X, Y, W는 각각 다음과 같다.

(가) X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

(나) Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

(다) W는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)$

ㄴ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$

ㄷ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 확통 08 정규분포

04 이항분포와 정규분포의 관계

07 정규분포를 이용한 이항분포의 확률 구하기

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

52. 어느 농장에서 생산된 포도송이의 무게는 평균 600 g, 표준편차 100 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 포도송이 중 임의로 100송이를 추출할 때, 포도송이의 무게가 636 g 이상인 것이 42송이 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.36	0.14
1.00	0.34
1.25	0.39
2.00	0.48

① 0.02 ② 0.11 ③ 0.14

④ 0.16 ⑤ 0.36

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 30

53. 어느 도시의 학생 2500 명을 대상으로 조사한 통학 시간은 정규분포를 따르고 평균이 25 분, 표준편차가 5 분이라고 한다. 이 2500 명의 학생 중 임의로 택한 한 학생의 통학 시간이 35 분 이상일 확률은 p_1이다. 또, 이 2500 명의 학생 중에서 통학 시간이 35 분 이상인 학생이 n명 이상일 확률은 p_2이다. $p_1 = p_2$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. (단, 아래 표준정규분포표를 이용한다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

54. 어느 자영업자의 하루 매출액은 평균이 30 만원이고 표준편차가 4 만원인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자영업자는 하루 매출액이 31 만 원 이상일 때마다 1000 원씩을 자선단체에 기부하고 31 만원 미만일 때는 기부를 하지 않는다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 할 때, 600 일 동안 영업하여 기부할 총 금액이 222000 원 이상이 될 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
1.00	0.34
1.50	0.43

① 0.69 ② 0.84 ③ 0.90
④ 0.93 ⑤ 0.98

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 11

55. 어느 과수원에서 수확한 사과의 무게는 평균 $400g$, 표준편차 $50g$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사과 중 무게가 $442g$ 이상인 것을 1등급 상품으로 정한다. 이 과수원에서 수확한 사과 중 100개를 임의로 선택할 때, 1등급 상품이 24개 이상일 확률을 다음 표준정규분포 표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.64	0.24
0.84	0.30
1.00	0.34
1.28	0.40

① 0.10 ② 0.16 ③ 0.20
④ 0.26 ⑤ 0.34

05 확통 09 통계적 추정

01 모평균과 표본평균

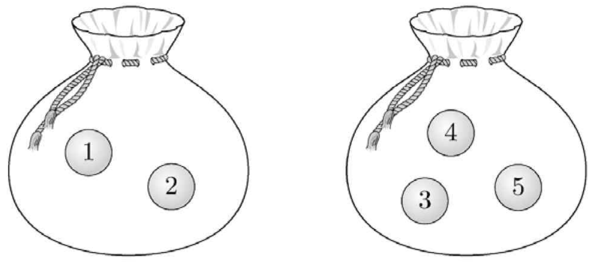
01 모평균과 표본평균1 (표본평균의 확률)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 확률과 통계 30

56. 주머니 A에는 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 다음의 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

> 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 주머니에 다시 넣는다.

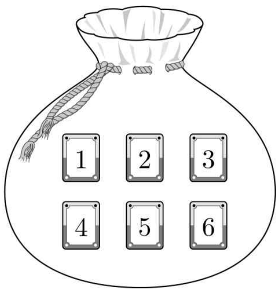
$P(\overline{X}=2)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



A B

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 29

57. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



05 확통

09 통계적 추정

01 모평균과 표본평균

05 모평균과 표본평균5 (실생활에서 표본평균의 분포)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 30

58. 주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X=4)=16\times\mathrm{P}(X=16)=\frac{1}{81}$

(나) $\mathrm{E}(X)=9$

$\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

05 확통 09 통계적 추정

02 표본평균의 확률분포

03 표본평균의 정규분포3 (실생활. 확률 구하기)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 11

59. 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게 X는 평균이 60 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 제품의 무게가 50 g 이하인 제품은 불량품으로 판정한다. 이 공장에서 생산된 제품 중에서 2500개를 임의로 추출할 때, 2500개 무게의 평균을 $\overline{X}$, 불량품의 개수를 Y라고 하자. 다음 표준정규분포 표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<표준정규분포 표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 60) = \frac{1}{2}$

ㄴ. $\mathrm{P}(Y \ge 57) = \mathrm{P}(\overline{X} \le 59.9)$

ㄷ. 임의의 양수 k에 대하여
$\mathrm{P}(60-k \le X \le 60+k) > \mathrm{P}(60-k \le \overline{X} \le 60+k)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 확통 09 통계적 추정

02 표본평균의 확률분포

05 표본평균의 정규분포5 (실생활. 확률변수의 부분합, 부분합의 확률변수)

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

60. 어느 과수원에서 생산되는 사과의 무게는 평균이 350 g이고 표준편차가 30 g인 정규분포를 따르고, 배의 무게는 평균이 490 g이고 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 총합을 X(g)이라 하고, 이 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 총합을 Y(g)이라 하자. $X \ge 3240$이고 $Y \ge 2008$일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.16
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34

(단, 사과의 무게와 배의 무게는 서로 독립이다.)

① 0.0432 ② 0.0482 ③ 0.0544
④ 0.0567 ⑤ 0.0614

05 확통 09 통계적 추정

03 모평균의 추정

03 신뢰구간3 (관계식 해석)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

61. 어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리는 모평균이 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 16대를 임의추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95 %로 추정한 m에 대한 신뢰구간이 $[\overline{x}-c,\ \overline{x}+c]$이었다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 임의로 1대를 선택할 때, 이 택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 주행거리의 단위는 km이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.49	0.1879
0.98	0.3365
1.47	0.4292
1.96	0.4750

① 0.6242 ② 0.6635 ③ 0.6879
④ 0.8365 ⑤ 0.9292

05 확통 09 통계적 추정

03 모평균의 추정

05 신뢰구간5 (표본의 크기)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 29

62. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단이 있다. 어느 조사에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a, b]$일 때, 조사비용과 추정의 정확도에 따른 수익이 다음과 같다고 한다.

n	$\dfrac{\sqrt{n}}{1+\log n}$
1600	9.51
1700	9.75
1800	9.97
1900	10.19
2000	10.40

비용: $10n$, 수익: $10^{\frac{2}{b-a}}$

n이 100의 배수일 때, 수익이 비용보다 크게 되는 n의 최솟값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.)

n	$\dfrac{\sqrt{n}}{1+\log n}$
1600	9.51
1700	9.75
1800	9.97
1900	10.19
2000	10.40

① 1600 ② 1700 ③ 1800
④ 1900 ⑤ 2000

[준킬러][확통] 3통계(빠른 정답)

준킬러확통 2023.01.07

1. [정답] ③
2. [정답] ②
3. [정답] ②
4. [정답] ②
5. [정답] ①

6. [정답] ⑤
7. [정답] 20
8. [정답] ③
9. [정답] ③
10. [정답] 28

11. [정답] ⑤
12. [정답] ④
13. [정답] ②
14. [정답] 78
15. [정답] 10

16. [정답] ①
17. [정답] ②
18. [정답] ③
19. [정답] ②
20. [정답] ②

21. [정답] ①
22. [정답] ①
23. [정답] ①
24. [정답] 380
25. [정답] 60

26. [정답] 112
27. [정답] 93
28. [정답] 80
29. [정답] ②
30. [정답] ①

31. [정답] ③
32. [정답] 121
33. [정답] ①
34. [정답] ⑤
35. [정답] 31
36. [정답] ③
37. [정답] ②
38. [정답] ⑤
39. [정답] ③
40. [정답] ⑤

41. [정답] ③
42. [정답] ①
43. [정답] ①
44. [정답] ②
45. [정답] ③

46. [정답] 62
47. [정답] ①
48. [정답] ②
49. [정답] 25
50. [정답] ④

51. [정답] ③
52. [정답] ②
53. [정답] 64
54. [정답] ④
55. [정답] ②

56. [정답] 71
57. [정답] 175
58. [정답] 23
59. [정답] ③
60. [정답] ①

61. [정답] ③
62. [정답] ③

[준킬러][확통] 3통계(해설)

준킬러확통 2023.01.07

1) [정답] ③

[해설]

X	0	1	2	3	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	c	c	c	$2c$	$2c$	$2c$	$5c^2$	$5c^2$	1

위의 표에서 $3c+3\cdot(2c)+2\cdot(5c^2)=1$

$10c^2+9c-1=0$

$\therefore\ c=\frac{1}{10}\ (\because\ c>0)$

$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$

$\mathrm{P}(A)=5c^2+5c^2=10c^2=10\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(B)=3\cdot(2c)+2\cdot(5c^2)$

$=6c+10c^2=\frac{7}{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{7}$

2) [정답] ②

[해설]

$\cos^2(x^\circ)+\cos^2(90^\circ-x^\circ)=\cos^2(x^\circ)+\sin^2(x^\circ)=1$

이고 $\cos^2 45=\frac{1}{2}$, $\cos^2 90^\circ=0$이므로

$\sum_{x=1}^{90}\cos^2(x^\circ)=\sum_{x=1}^{44}\{\cos^2(x^\circ)+\cos^2(90^\circ-x^\circ)\}$

$+\cos^2 45^\circ+\cos 90^\circ$

$=44\times1+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

$\sum_{x=1}^{90}\mathrm{P}(X=x)=1$ 이므로

$\sum_{x=1}^{90}a\cos^2(x^\circ)=\frac{89}{2}a=1$

$\therefore\ a=\frac{2}{89}$

$\therefore\ \mathrm{P}(30\le X\le 60)$

$=\frac{2}{89}\times\sum_{x=30}^{60}\cos(x^\circ)$

$=\frac{2}{89}\times\left[\sum_{x=30}^{44}\{\cos^2(x^\circ)+\cos^2(90^\circ-x^\circ)\}+\cos^2 45^\circ\right]$

$=\frac{2}{89}\left[15+\frac{1}{2}\right]$

$=\frac{2}{89}\times\frac{31}{2}=\frac{31}{89}$

3) [정답] ②

[해설]

$a,\ b,\ c$가 1부터 10까지의 자연수를 가질 수 있으므로 전체 경우의 수는 $10^3=1000$가지이다. 세 수 $a,\ b,\ c$가 모두 다르고, 중간 크기의 수가 5가 되기 위해서 5와 더불어 5보다 작은 수와 5보다 큰 수가 나와야 한다. 5보다 작은 수를 택하는 방법이 4가지, 5보다 큰 수를 택하는 방법이 5가지이므로 조건을 만족하는 수의 조합은 모두 20가지이다. 또한, 세 수를 $a,\ b,\ c$에 나열하는 방법은 항상 $3!=6$가지이므로 규칙 1을 만족하는 경우는

$6\times20=120$ (가지)

한편, 세 수 $a,\ b,\ c$중 두 개 이상이 같을 때 같은 수가 5가 되기 위해서는 모두 5인 경우와 두 수가 5이고 나머지 한 수가 5가 아닌 경우이다. $a,\ b,\ c$에 배열하는 방법은 세 수가 모두 5인 경우에 한 가지이고, 두 수가 5인 경우에 3가지이므로 규칙 2를 만족하는 경우의 수는

$(1\times1)+(3\times9)=28$

따라서 구하는 확률은

$\frac{148}{1000}=\frac{37}{250}$

4) [정답] ②

[해설]

동전의 앞면이 나오는 사건을 H, 뒷면이 나오는 사건을 T라고 하자.

이 때, H가 올 수 있는 자리를 ●라고 하자.

(ㄱ). H가 2번, T가 3번인 경우

H2개가 이웃하지 않으므로

●T●T●T●가 되어 ${}_4C_2=6$가지이다.

(ㄴ). H가 3번, T가 2번인 경우

H2개는 이웃하고 나머지 H1개는 이웃하지 않으므로

●T●T●이므로 ${}_3P_2=6$가지이다.

(ㄷ). H가 4번, T가 1번 인 경우

H가 2개씩 이웃할 때 : ●T●에서 ${}_2C_2=1$

H가 3개씩 이웃하고 나머지 하나는 이웃하지 않을 때

●T●에서 ${}_2P_2=2$

$\therefore P(X=2)=\dfrac{6+6+1+2}{2^5}=\dfrac{15}{32}$

5) [정답] ①

[해설]

(i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\boxed{\dfrac{8}{27}}$

(ii) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\dfrac{4}{27}}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

(iii) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1$

$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{2}{3}+\boxed{\dfrac{8}{81}}$

(iv) $X=6$인 사건은

다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

이상에서

$a=\dfrac{8}{27}$, $b=\dfrac{4}{27}$, $c=\dfrac{8}{81}$

이다. 따라서

$$\frac{ab}{c}=\frac{\frac{8}{27}\times\frac{4}{27}}{\frac{8}{81}}=\frac{4}{9}$$

6) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 서로 다른 5개의 수로 이루어진 A의 평균과 중앙값은 모두 25이고, 7개의 수로 이루어진 B에서 5개는 A의 자료와 일치하고 나머지 2개는 x, y이므로 B의 평균이 25이면 x, y의 평균도 25이다. 따라서 B의 중앙값도 25이다. (참)

ㄴ. B의 평균이 27이상이면 다음의 식이 성립한다.

$125+x+y\geq 189$

$x+y\geq 64$

따라서 x, y중 적어도 하나는 32이상이다. (참)

ㄷ. x와 y가 모두 25이면 B의 표준편차가 A의 표준편차보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7) [정답] 20

[해설]

$\left(\dfrac{1}{10}-p\right)+\left(\dfrac{1}{10}+p\right)+\left(\dfrac{1}{10}-p\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{10}+p\right)=1$이므로

$\dfrac{2n}{10}=1$ 따라서 $n=5$

확률변수 X의 기대값이 $\dfrac{23}{4}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\left(\dfrac{1}{10}-p\right)+2\left(\dfrac{1}{10}+p\right)+\ \ldots\ +10\left(\dfrac{1}{10}+p\right)$

$=\dfrac{1}{10}(1+2+\ \ldots\ +10)+(-p+2p-\ \ldots\ +10p)$

$=\dfrac{55}{10}+5p=\dfrac{23}{4}$

따라서 $p=\dfrac{1}{20}$이므로 $\dfrac{1}{p}=20$

8) [정답] ③

[해설]

$\sum_{x=1}^{6} \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x}) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6} {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x} = \frac{1}{k}(2^6-1) = 1$이므로

$k = 2^6 - 1 = 63 = 3^2 \times 7$

$\mathrm{E(X)} = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x}) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x}$

$= \frac{2^6}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2^6}{k}\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2^6}{k} \cdot 3$

$\Big($∵ 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{1}{2}\right)$를 따르는 확률변수의 확률질량함수는

${}_6\mathrm{C}_\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right)^6$이고 평균은 $\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \times \frac{1}{2} = 3\Big)$

따라서 $m = \frac{2^6}{k} \cdot 3$에서 $k^2 m = 2^6 \cdot 3k = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$

∴ $a=6,\ b=3,\ c=1$ ∴ $a+b+c=10$

[다른 풀이]

항등식 $(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i \mathrm{x}^i$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \times {}_n\mathrm{C}_i \mathrm{x}^{i-1}$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \times {}_n\mathrm{C}_i$

∴ $\sum_{i=1}^{6} x \times {}_6\mathrm{C}_\mathrm{x} = 6 \cdot 2^5 = 3 \cdot 2^6$

9) [정답] ③

[해설]

$\sum_{x=1}^{6} \mathrm{P}(X=x) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6} {}_6\mathrm{C}_x = \frac{1}{k}(2^6-1) = 1$이므로

$k = 2^6 - 1 = 63 = 3^2 \times 7$

$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \mathrm{P}(X=x)$

$= \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x$

$= \frac{2^6}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \frac{2^6}{k}\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \frac{2^6}{k} \cdot 3$

(∵이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{1}{2}\right)$를 따르는 확률변수의 확률질량함수는

${}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6$이고 평균은 $\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \times \frac{1}{2} = 3$)

따라서 $m = \frac{2^6}{k} \cdot 3$에서 $k^2 m = 2^6 \cdot 3k = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$

∴ $a=6,\ b=3,\ c=1$

∴ $a+b+c=10$

[다른 풀이]

항등식 $(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i x^i$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \times {}_n\mathrm{C}_i x^{i-1}$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \times {}_n\mathrm{C}_i$

∴ $\sum_{i=1}^{6} x \times {}_6\mathrm{C}_x = 6 \cdot 2^5 = 3 \cdot 2^6$

10) [정답] 28

[해설]

두 이산확률변수 X, Y가 가지는 값이 각각 1 부터 5 까지의 자연수이므로

$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{5} \{k \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})\} = 4$

$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=1}^{5} \{k \times \mathrm{P}(Y=k)\}$

$= \sum_{k=1}^{5} \left[k \times \left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k) + \frac{1}{10}\right\}\right]$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} \{k \times \mathrm{P}(X=k)\} + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5} k$

$= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{10} \times \frac{5 \times 6}{2}$

$= 2 + \frac{3}{2}$

$= \frac{7}{2}$

따라서 $a = \frac{7}{2}$ 이므로

$8a = 8 \times \frac{7}{2} = 28$ 이다.

11) [정답] ⑤

[해설]

임의로 적은 답이 맞을 확률은 $\frac{1}{5}$이고 틀릴 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 틀린 문항의 감점 점수를 x라 하면 임의로 답을 적었을 때 기대되는 점수는 $\frac{1}{5}\cdot 5-\frac{4}{5}x=0$

$\therefore\ x=\frac{5}{4}=1.25$

12) [정답] ④

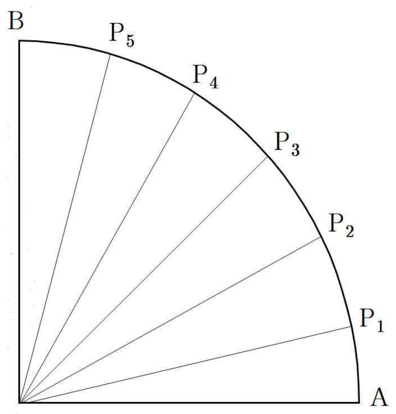
[해설]
X에 대한 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+\sqrt{3}\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})$$

13) [정답] ②

[해설]



부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차가 확률변수 X이므로 P_3를 선택할 때 넓이의 차는 0

P_1또는 P_5를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{12}$

P_2또는 P_4를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{6}$

확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\times\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$이다.

14) [정답] 78

[해설]
확률변수 X가 갖는 값이 $X=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$$\mathrm{E}(X)=5$$

또 $\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$이므로 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{31}{5}$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=25+\frac{31}{5}$$

이때,

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a$$
$$=82a+58b+25c$$

이므로 $82a+58b+25c=25+\frac{31}{5}$ …… ㉠

한편, 확률변수 Y가 갖는 값이 $Y=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로 $\mathrm{E}(Y)=5$이고,

$$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)$$
$$+7^2\times b+9^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$$
$$=82a+58b+25c+\frac{1}{20}-\frac{5}{2}+\frac{81}{20}$$
$$=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$$

㉠에서 $\mathrm{E}(Y^2)=25+\frac{31}{5}+\frac{8}{5}=25+\frac{39}{5}$

따라서 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=25+\frac{39}{5}-5^2=\frac{39}{5}$이므로

$$10\times\mathrm{V}(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$$

15) [정답] 10

[해설]

$c\sum_{k=1}^{n}k=1$에서 $c=\frac{2}{n(n+1)}$

X의 표준편차가 $\sqrt{6}$이므로 X의 분산 $V(X)$는

$V(X)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot(c\,k)-\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot c\,k\right)^2=6$에서

$c\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(\sum_{k=1}^{n}c\,k^2\right)^2=6$

위 식에 $c=\dfrac{2}{n(n+1)}$를 대입하여 정리하면

$\dfrac{2}{n(n+1)}\times\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\dfrac{2}{n(n+1)}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^2=6$

$\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{(2n+1)^2}{9}=6,\ n^2+n-110=0$

$(n+11)(n-10)=0\ \therefore\ n=10$

16) [정답] ①

[해설]

자연수 $k(4\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X 의 값이 k일

확률은 1부터 $k-1$가지의 자연수가 적혀 있는 카드
중에서

서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는

경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$P(x=k)=\dfrac{\boxed{{}_{k-1}C_3}}{{}_nC_4}$

이때, 자연수 $r(1\le r\le k)$에 대하여

${}_kC_r=\dfrac{k}{r}\times{}_{k-1}C_{r-1}$

이 성립하므로 $r=4$를 대입하면

${}_kC_4=\dfrac{k}{4}\times{}_{k-1}C_3$

$k\times\boxed{{}_{k-1}C_3}=4\times\boxed{{}_kC_4}$

이다. 그러므로

$E(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times P(X=k)\}$

$=\dfrac{1}{{}_nC_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{{}_{k-1}C_4}\right)$

$=\dfrac{1}{{}_nC_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_kC_4}$

이다.

$\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_kC_4}={}_{n+1}C_5$

이므로

$E(X)=\dfrac{4}{{}_nC_4}\times{}_{n+1}C_5$

$=4\times\dfrac{{}_{n+1}C_5}{{}_nC_4}$

$=4\times\dfrac{\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}$

$=(n+1)\times\boxed{\dfrac{4}{5}}$

따라서 $f(k)={}_{n-1}C_3$, $g(k)={}_kC_4$, $a=\dfrac{4}{5}$ 이므로

$a\times f(6)\times g(5)=\dfrac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4$

$=\dfrac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_1$

$=\dfrac{4}{5}\times10\times5$

$=40$

17) [정답] ②

[해설]
세 수 $x_1,\ x_2,\ x_3$을 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$과 같이 나타내자.
$x_1,\ x_2,\ x_3$ 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q, 나머지 수를 r,
$p-q=k\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$라 하면 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의
개수는 $p,\ q,\ r$를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.
(1) $k=0$일 때
세 수가 모두 같으므로
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 $\boxed{6}$이고,
$P(X=0)=\dfrac{1}{6^3}\times\boxed{6}$
(2) $k\ne0$일 때 $(1\le k\le5)$1719
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 각각의 k에 대하여 $6-k$이고
i) $k=1$일 때
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는
$5\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}\right)$
ii) $2\le k\le5$일 때
① $r=p$ 또는 $r=q$인 경우
$p,\ p,\ q$와 $p,\ q,\ q$를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}$
② $r\ne p$이고 $r\ne q$인 경우

r의 개수는 각각의 k에 대하여 $k-1$이고 $p,\ r,\ q$를 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로

$(k-1)\times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(k-1)\times 3!\right\}$

그러므로 $1\le k\le 5$일 때,

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$

(예를 들어)

$k=3$인 경우

$(p,\ r,\ q)$는 $(4,\ r,\ 1),\ (5,\ r,\ 2),\ (6,\ r,\ 3)$

이므로 개수는 3

$(p,\ r,\ q)$가 $(4,\ r,\ 1)$일 때

① $r=4$ 또는 $r=1$인 경우

4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는

방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$

② $r\ne 4$이고 $r\ne 1$인 경우

r는 3 또는 2이므로 r의 개수는 2

$p,\ r,\ q$를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}=3!$이므로 $2\times 3!$

①, ②에 의하여

4, r, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

$(5,\ r,\ 2),\ (6,\ r,\ 3)$일 때에도 같은 방법으로 구하면 각각

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

그러므로 $k=3$인 경우

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$3\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!\right)$

그러므로

$\mathrm{P}(X=k)$

$=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$

(1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{6k^2-k^3}\right)=\frac{35}{12}$$

$a=6,\ f(k)=k-1,\ g(k)=6k^2-k^3$

따라서 $\frac{f(5)\times g(3)}{a}=\frac{4\times 27}{6}=18$

18) [정답] ③

[해설]

주사위의 눈이 처음부터 6의 약수가 연속으로 5회 나오는 경우 확률변수 X는 최댓값을 갖고 그 값은 10이므로

$a=10$

6의 약수인 눈이 나오는 경우를 ○,

6의 약수가 아닌 눈이 나오는 경우를 ×라 하자.

$X=-3$인 경우는

6의 약수인 눈이 1회, 6의 약수가 아닌 눈이 5회 나오는 경우의 ${}_6\mathrm{C}_1$가지 중 ×××××○, ××××○× 인 경우를 제외한

${}_6\mathrm{C}_1-2$가지이므로 $b=4$

$X=9$인 경우는

6의 약수인 눈이 5회, 6의 약수가 아닌 눈이 1회 나오는 경우의 ${}_6\mathrm{C}_1$가지 중 ○○○○○×인 경우를 제외한

${}_6\mathrm{C}_1-1$가지이므로 $c=5$

따라서 $a+b+c=10+4+5=19$

19) [정답] ②

[해설]

세 수 $x_1,\ x_2,\ x_3$을 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$과 같이 나타내자.

$x_1,\ x_2,\ x_3$ 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q, 나머지 수를 r,

$p-q=k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$라 하면 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 $p,\ q,\ r$를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1) $k=0$일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 $\boxed{6}$이고, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6^3}\times\boxed{6}$

(2) $k\ne 0$일 때 $(1\le k\le 5)$

순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 각각의 k에 대하여 $6-k$이고

(ⅰ) $k=1$일 때

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 $5\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)$

(ⅱ) $2\le k\le 5$일 때

① $r=p$ 또는 $r=q$인 경우

$p,\ p,\ q$와 $p,\ q,\ q$를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$

② $r\ne p$이고 $r\ne q$인 경우

r의 개수는 각각의 k에 대하여 $k-1$이고 $p,\ r,\ q$를 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로

$(k-1)\times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(k-1)\times 3!\right\}$$

그러므로 $1\le k\le 5$일 때,

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$$

(예를 들어)

$k=3$인 경우

(p, r, q)는 $(4, r, 1)$, $(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$이므로 개수는 3

(p, r, q)가 $(4, r, 1)$일 때

① $r=4$ 또는 $r=1$인 경우

4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$

② $r\ne 4$이고 $r\ne 1$인 경우

r는 3 또는 2이므로 r의 개수는 2

p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3P_3=3!$이므로 $2\times 3!$

①, ②에 의하여

4, r, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

$(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$일 때에도 같은 방법으로 구하면 각각

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

그러므로 $k=3$인 경우

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $3\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!\right)$

그러므로

$$P(X=k)=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times 3!\right\}$$

(1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $E(X)$는 다음과 같다.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times P(X=k)\}=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}(\boxed{6k^2-k^3})=\frac{35}{12}$$

$a=6$, $f(k)=k-1$, $g(k)=6k^2-k^3$

따라서 $\frac{f(5)\times g(3)}{a}=\frac{4\times 27}{6}=18$

20) [정답] ②

[해설]

정수 $k(0\le k\le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은

짝수 $n-1$개 중에서 k장의 카드를 택하고,

홀수 n개 중에서 $(3-k)$장의 카드를 택하는

경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$P(X=0)=\frac{{}_nC_3}{{}_{2n-1}C_3}=\frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_nC_2\times{}_{n-1}C_1}{{}_{2n-1}C_3}=\frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_nC_1\times{}_{n-1}C_2}{{}_{2n-1}C_3}=\frac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_{n-1}C_3}{{}_{2n-1}C_3}=\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

이다. 그러므로

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3}\{k\times P(X=k)\}$$

$$=\frac{3n(n-1)+6n(n-2)+3(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$=\frac{3(n-1)}{2n-1}$$

따라서 $a=3$, $f(n)=\frac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$, $g(n)=3(n-1)$

$\therefore\ af(5)g(8)=3\times\frac{5}{14}\times 21=\frac{45}{2}$

21) [정답] ①

[해설]

전체 공의 개수는 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$P(X=k)=\frac{n-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(n-k+1)}{\boxed{n(n+1)}}$$

확률변수 X의 평균은

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)$$

$$=\frac{2}{\boxed{n(n+1)}}\times\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left\{(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=(n+1)-\frac{2n+1}{3}=\boxed{\frac{1}{3}(n+2)}$$

$E(X)=\frac{1}{3}(n+2)\ge 5$에서 n의 최솟값은 $\boxed{13}$이다.

$f(n)=n(n+1)$, $g(n)=\frac{1}{3}(n+2)$, $a=13$이므로

$f(7)+g(7)+a=56+3+13=72$

22) [정답] ①

[해설]

꺼낸 3장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ라 할 때, 이를 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$와 같이 나타내자.

$X=0$인 사건은 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 (1, 2, 3)의 1가지

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{60}$$

$X=1$인 사건은 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 2로 같은 경우는 (1, 2, 4), (1, 2, 5)의 2가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 3 또는 2와 3으로 같은 경우도 각각 2가지이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2\times 3}{60}=\boxed{\frac{1}{10}}$$

$X=2$인 사건은 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1로 같은 경우는
(1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2),
(1, 4, 5), (1, 5, 2), (1, 5, 4)

의 7가지, 앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 2 또는 3으로 같은 경우도 각각 7가지이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{7\times 3}{60}=\boxed{\frac{7}{20}}$$

$X=3$인 사건의 경우에는

$$\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{10}+\frac{7}{20}\right)=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{8}{15}$$
$$=\boxed{\frac{12}{5}}$$

$$a=\frac{1}{10},\ b=\frac{7}{20},\ c=\frac{12}{5}$$

따라서 $10a+20b+5c=20$

23) [정답] ①

[해설]

확률변수 X가 가장 큰 값을 갖는 경우는 첫 번째와 6번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이고, 두 번째부터 5번째까지 꺼낸 공이 모두 짝수일 때이므로 $m=\boxed{6}$

(iii) $X=k$ $(3\le k\le m)$인 경우
9개의 공에서 k개의 공을 차례대로 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{P}_k$
첫 번째와 마지막으로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2$
두 번째부터 $(k-1)$번째까지 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_{k-2}$

그러므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_{k-2}}}{{}_9\mathrm{P}_k}$에서

$$f(k)={}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_{k-2}$$

따라서 $a=6$, $f(4)={}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_2=240$이므로

$$a+f(4)=246$$

24) [정답] 380

[해설]

수열 $\{p_n\}$은 등차수열이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$에서 $p_1+p_5=\frac{2}{5}$

$p_5-p_1=\frac{8}{25}$에서 $p_1=\frac{1}{25}$, $p_5=\frac{9}{25}$

$$\mathrm{E}(100X)=100\left(\frac{1}{25}+\frac{6}{25}+\frac{15}{25}+\frac{28}{25}+\frac{45}{25}\right)=380$$

25) [정답] 60

[해설]

모든 관광코스와 그 요금은 다음과 같다.

A→B→C→D→E : 70,000원

A→B→D→E : 56,000

A→B→E : 42,000

A→C→B→E : 56,000

A→C→B→D→E : 70,000

A→C→D→B→E : 70,000

A→C→D→E : 56,000

$E(X)=70000\cdot\frac{3}{7}+56000\cdot\frac{3}{7}+42000\cdot\frac{1}{7}=60000$이므로

$E\left(\frac{X}{1000}\right)=\frac{60000}{1000}=60$

26) [정답] 112

[해설]

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{6}{{}_9C_3}$	$\frac{16}{{}_9C_3}$	$\frac{62}{{}_9C_3}$

$\therefore\ E(X)=\frac{1}{{}_9C_3}(6+2\times16+3\times62)$

$=\frac{1}{84}(224)=\frac{56}{21}$

$\therefore\ E(42X)=42E(X)$

$=42\times\frac{56}{21}=112$

27) [정답] 93

[해설]

이산확률분포표를 작성하면 다음과 같다.

X	$P(X=x)$
4	${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times2=\frac{2}{16}$
5	$\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}\times2=\frac{4}{16}$
6	$\left\{{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\right\}\times2=\frac{5}{16}$
7	$\left\{{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\right\}\times2=\frac{5}{16}$
계	1

$\therefore\ E(16X)=16E(X)$

$=16\cdot\left(\frac{2}{16}\times4+\frac{4}{16}\times5+\frac{5}{16}\times6+\frac{5}{16}\times7\right)$

$=93$

[별해]

최소 4경이 이상 치러야 우승팀이 결정된다.

$\therefore\ P(X\le3)=0$

(ⅰ) $X=4$인 경우는 어느 한 팀이 4경기를 연달아 이기는 경우이다.

$\therefore\ P(X=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$

(ⅱ) $X=5$인 경우는 어느 한 팀이 4경기를 치루는 동안 3승 1패를 하고 5번째 경기에서 이기는 경우이다.

$\therefore\ P(X=5)=2\times\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}$

(ⅲ) $X=6$인 경우는 어느 한 팀이 5경기를 치루는 동안 3승 2패를 하고 6번째 경기에서 이기는 경우이다.

$\therefore\ P(X=6)=2\times\left\{{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{16}$

(ⅳ) $X=7$인 경우는 두 팀이 6경기를 치루면서 3승 3패를 하는 경우이다.

$\therefore\ P(X=6)={}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{16}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$E(16X)=16\times E(X)=16\left(\frac{4}{8}+\frac{5}{4}+\frac{6\cdot5}{16}+\frac{7\cdot5}{16}\right)=93$

28) [정답] 80

[해설]

3이상의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 3보다 작은 경우는 $4-x$번이다.

x에 따른 확률변수 X값은 다음 표와 같다.

x	0	1	2	3	4
X	4	6	0	2	4

이때 $x=k$일 때의 확률은 ${}_4C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}={}_4C_k\cdot\frac{2^k}{3^4}$이므로

확률변수 X에 대한 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	4	6	계
$P(X=x)$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{17}{81}$	$\frac{8}{81}$	1

$\therefore E(36X)=\frac{36}{81}(64+68+48)=\frac{4}{9}\times180=80$

29) [정답] ②

[해설]

뒤집어질 확률을 p라 하면 도, 개, 걸, 윷, 모가 나올 확률은 이항분포 $B(4,\ p)$로부터 구할 수 있으며 다음과 같다.

	도	개	걸	윷	모
뒤집어진 개수	1	2	3	4	0
확률	${}_4\mathrm{C}_1 p(1-p)$	${}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)$	${}_4\mathrm{C}_3 p^3(1-p)$	${}_4\mathrm{C}_4 p^4$	${}_4\mathrm{C}_0(1-p)^4$

철수의 주장이 참이 되기 위해서

${}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2 > {}_4\mathrm{C}_3 p^3(1-p) > {}_4\mathrm{C}_1 p(1-p)^3 > {}_4\mathrm{C}_4 p^4 > {}_4\mathrm{C}_0(1-p)^4$

을 만족해야 한다. 각각의 대소를 만족하는 p값의 범위를 구하면

1) ${}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2 > {}_4\mathrm{C}_3 p^3(1-p)$:

$6(1-p) > 4p \quad \therefore\ p < \frac{3}{5}$

2) ${}_4\mathrm{C}_3 p^3(1-p) > {}_4\mathrm{C}_1 p(1-p)^3$:

$(1-p)^2 > p^2 \quad \therefore\ p > \frac{1}{2}$

3) ${}_4\mathrm{C}_1 p(1-p)^3 > {}_4\mathrm{C}_4 p^4$:

$4(1-p)^3 > p^3$

$4(1-p)^3 - p^3 > 0$

$\left\{4^{\frac{1}{3}}(1-p)\right\}^3 - p^3 > 0$

$\left\{4^{\frac{1}{3}}(1-p) - p\right\}\left\{4^{\frac{2}{3}}(1-p)^2 + 4^{\frac{1}{3}}(1-p)p + p^2\right\} > 0$

$\therefore\ p < \dfrac{1}{1+4^{-\frac{1}{3}}} = 0.61$

4) ${}_4\mathrm{C}_4 p^4 > {}_4\mathrm{C}_0(1-p)^4$:

$p > (1-p) \quad \therefore\ p > \frac{1}{2}$

따라서, 공통해는

$\frac{1}{2} < p < \frac{3}{5}$

30) [정답] ①

[해설]

추가되는 부품 중 S의 개수는 이항분포

$B\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 S의 개수가 0개, 1개, 2개일 사건을

각각 E_0, E_1, E_2라 하면

$P(E_0) = {}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$P(E_1) = {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$P(E_2) = {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

이고 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 사건을 A라 하면 추가된 부품이 모두 S일 사건은 E_2이므로 구하는 확률은

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2\cap A)}{P(A)} = \frac{P(E_2\cap A)}{P(E_0\cap A)+P(E_1\cap A)+P(E_2\cap A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{28}}{\frac{12}{28}} = \frac{1}{6}$$

31) [정답] ③

[해설]

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를

확률변수 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$을

따르므로

$\mathrm{E}(Y) = 15\times\frac{1}{3} = 5$

이때 원점에 있던 점 P가 이동된 점의 좌표는

$(3Y, 15-Y)$

이고, 이 점과 직선 $3x+4y=0$사이의 거리 X는

$X = \dfrac{|3\times3Y+4\times(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{|5Y+60|}{5} = Y+12$

따라서

$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y+12)$

$= \mathrm{E}(Y)+12$

$= 5+12 = 17$

32) [정답] **121**

[해설]

X 가 이항분포 $\mathrm{B}\left(120, \frac{1}{121}\right)$ 을 따르므로

$m = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k}) = 120\times\frac{1}{121} = \frac{120}{121}$

$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k}) - \mathrm{m}^2 = 120\times\frac{1}{121}\times\frac{120}{121} = \frac{120^2}{121^2}$

$f(x) = \sum_{k=0}^{120}(x^2-2axk+a^2k^2)\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

$= x^2 - 2ax\sum_{\mathrm{k}=0}^{120}k\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k}) + \mathrm{a}^2\sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}^2\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

$= x^2 - 2amx + a^2\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

$$=(x-am)^2+a^2\left(\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})-\mathrm{m}^2\right)$$

$$=(x-am)^2+\frac{120^2}{121^2}a^2$$

함수 $f(x)$는 $x=am$ 일 때, 최소값 $\frac{120^2}{121^2}a^2$ 이다.

따라서 $\frac{120^2}{121^2}a^2=1$ 에서 $a=\frac{121}{120}$ $(a>0)$

$\therefore$ $120a=121$

33) [정답] ①

[해설]

$E(X)=np=80$이고 $V(X)=np(1-p)=64$로부터 $p=\frac{1}{5}$,

$n=400$ 이다. 따라서 $P(X=r)={}_{400}C_r\left(\frac{1}{5}\right)^r\left(\frac{1}{5}\right)^{400-r}$ 이 된다. 그러므로

$$\sum_{r=0}^{400}5^r\cdot{}_{400}C_r\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^r\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{400-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{400}{}_{400}C_r\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{400-r}\cdot 1^r$$

$$=\left(1+\frac{4}{5}\right)^{400}$$

$$=\left(\frac{9}{5}\right)^{400}$$

34) [정답] ⑤

[해설]

중지할 때 까지 던진 주사위 횟수를 확률변수 X라 하면,

X	1	2	3	$\cdots$
$p(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2$	$\cdots$

즉 확률질량함수 $p(x)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 이며,

$E(1000X)=\frac{1000}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 이고 멱급수 계산을 이용하여

값을 구하면, $E(1000X)=\frac{1000}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=3000$ 이다.

35) [정답] 31

[해설]

$0\le x\le 6$인 모든 실수 x에 대하여

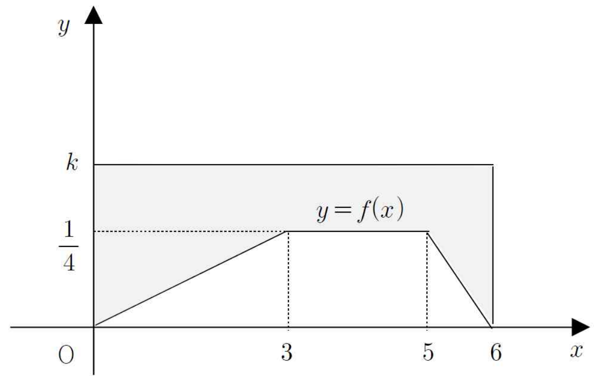
$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)

이므로

$g(x)=k-f(x)$

이때, $0\le Y\le 6$이고 확률밀도함수의 정의에 의하여

$g(x)=k-f(x)\ge 0$ 즉, $k\ge f(x)$이므로 그림과 같이 세 직선 $x=0$, $x=6$, $y=k$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 1이다.



또한, $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로

$k\times 6=2$

따라서, $k=\frac{1}{3}$

이때,

$\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$

이고 이 값은 세 직선 $x=2$, $x=5$, $y=\frac{1}{3}$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고,

$0\le x\le 3$에서 $f(x)=\frac{1}{12}x$이므로

$\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)$

$=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$

$=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\{f(2)+f(3)\}\times 1\right]+\left(\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{4}\times 2\right)$

$=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\right\}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{24}+\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{24}$

따라서, $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=31$

36) [정답] ③

[해설]

$$Z=\frac{X-t}{\frac{1}{t^2}}\le\frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}=t^2\left(\frac{3}{2}-t\right)$$

$f(t)=\frac{3}{2}t^2-t^3$이라 하면 $f'(t)=3t-3t^2$이므로 $t=1$일 때 $f(t)$가 최대이다.

$$\therefore G(t)_{\max}=P\left(Z\le\frac{1}{2}\right)=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{1}{2}\right)=0.6915$$

37) [정답] ②

[해설]

집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1740,\ 500^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{X-1740}{500}$이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 2000)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{260}{500}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.52)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.3\end{aligned}$$

이고, $\mathrm{P}(X<2000)=1-\mathrm{P}(X\ge 2000)=0.7$이다.

집에서 시장까지의 거리가 2000m 이상일 사건을 A, 자가용을 이용하여 시장에 오는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=0.3\times 0.15+0.7\times 0.05=0.08\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\,|\,E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.7\times 0.05}{0.08}=\frac{0.035}{0.08}=\frac{7}{16}$$

38) [정답] ⑤

[해설]

이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-66.4}{15}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-66.4}{15}\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17=0.33\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<73)&=1-\mathrm{P}(X\ge 73)\\&=1-0.33=0.67\end{aligned}$$

이때 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중 40%, 73분 미만인 직원들 중 20%가 지하철을 이용하였으므로 구하는 확률은

$$0.33\times 0.4+0.67\times 0.2=0.266$$

39) [정답] ③

[해설]

$$X\sim N(0,\ \sigma^2),\quad Y\sim N\left(0,\ \frac{\sigma^2}{4}\right)$$

$$P(|X|\le a)=P\left(\left|\frac{X-0}{\sigma}\right|\le\frac{a-0}{\sigma}\right)=P\left(|Z|\le\frac{a}{\sigma}\right)$$

$$P(|Y|\le b)=P\left(\left|\frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}\right|\le\frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)=P\left(|Z|\le\frac{2b}{\sigma}\right)$$

$P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)$에서 $a=2b$

ㄱ. $a=2b$이고, $a>0,\ b>0$이므로 $a>b$ (참)

ㄴ. $P\left(Y>\frac{a}{2}\right)=P\left(\frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}>\frac{\frac{a}{2}-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)=P\left(Z>\frac{2b}{\sigma}\right)$ (참)

ㄷ. $P(Y>b)=1-P(Y\le b)=0.3$이므로

$$\begin{aligned}P(|Y|\le b)&=1-P(|Y|>b)\\&=1-2P(Y>b)\\&=1-2\times 0.3=0.4\end{aligned}$$

$\therefore\ P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)=0.4$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $Y=3X-a$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-a)=3\mathrm{E}(X)-a=3m-a$$

$m=3m-a$에서 $a=2m$

$$\sigma(Y)=\sigma(3X-a)=3\sigma(X)=6$$

$$\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4-m}{2}\right)$$

$$\mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge 2m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m}{6}\right)$$

조건 (나)에 의하여 $\frac{4-m}{2}=-\frac{m}{6}$에서 $m=6$

그러므로 확률변수 Y는 정규분포 $N(6,\ 6^2)$을 따른다.
따라서

$$P(Y\geq 9)=P\left(Z\geq \frac{9-6}{6}\right)$$
$$=P(Z\geq 0.5)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 0.5)$$
$$=0.5-0.1915$$
$$=0.3085$$

41) [정답] ③

[해설]
근무 기간이 16개월인 직원의 하루 생산량을 X라 하면
$X\sim N(16a+100,\ 12^2)$
$P(X\leq 84)=P\left(Z\leq \frac{-16a-16}{12}\right)=0.0228$이고
$P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로
$\frac{-16a-16}{12}=-2$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$
근무 기간이 36개월인 직원의 하루 생산량을 Y라 하면
$Y\sim N(118,\ 12^2)$
$P(100\leq Y\leq 142)=P(-1.5\leq Z\leq 2)=0.9104$

42) [정답] ①

[해설]

i) 전체 수험생의 점수 X는 정규분포 $N(520,\ 90^2)$을 따르고 수험생의 상위 15.9%가 도심근교의 대학에 합격할 것으로 나타났으므로 상위 15.9%에 들기 위한 최저점수를 k라 하면
$P(X\geq k)=0.159$

$Z=\frac{X-520}{90}$ 라 하면 점수 X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{k-520}{90}\right)=0.159$

$P(0\leqq Z\leqq \frac{k-520}{90})=0.341$

주어진 표준정규 분포표에서
$P(0\leqq Z\leqq 1)=0.341$ 이므로
$\frac{k-520}{90}=1$ 이고 $k=610$ (점)이다.

ii) K지역 수험생 3000명의 점수 Y는 정규분포 $N(580,\ 20^2)$을 따르므로

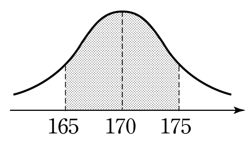
$P(Y\geqq 610)=P(Z\geqq \frac{610-580}{20})=P(Z\geqq 1.5)$

$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.147$

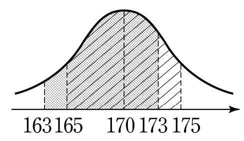
$\therefore\ 3000\times 0.147=441$ (명)

43) [정답] ①

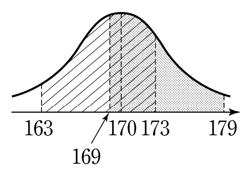
[해설]
세 구간 A, B, C를 곡선 위에 나타내면 각각 [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 어두운 부분은 학생수 $a,\ b,\ c$를 나타낸다.



〔그림1〕



〔그림2〕



〔그림3〕

이때, [그림 2]의 어두운 부분의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이보다 작다.
$\therefore a\geq b\cdots\cdots$ ㉠
또, [그림 3]의 빗금 친 부분의 넓이는 어두운 부분의 넓이보다 크다.
$\therefore b\geq c\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$a\geq b\geq c$

44) [정답] ②

[해설]

표준정규분포곡선을 $h(x)$라고 하자.

$f(12)=g(26),\ P(Y\geq 26)\geq 0.5$

X의 정규분포에서 변수를 Z로 표준화하면

$f(12)=h\left(\frac{12-10}{4}\right)$

마찬가지로 Y의 정규분포에서 변수를 Z로 표준화하면

$g(26)=h(\frac{26-m}{4})$

$P(Y\geq 26)\geq 0.5$이므로 $\frac{26-m}{4}<0$

$\therefore \frac{12-10}{4}=-\frac{26-m}{4}\ \therefore m=28$

$P(Y\leq 20)$

$=P\left(Z\leq \frac{20-28}{4}\right)$

$=P(Z\leq -2)$

$=0.5-P(0 \le Z \le 2)$

$=0.0228$

45) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서

$f(10)>f(20)$이므로 $m<15$이어야 한다.

조건 (나)에서

$f(4)<f(22)$이므로 $m>13$이어야 한다.

즉, $13<m<15$

이때, m이 자연수 이므로

$m=14$

따라서

$\mathrm{P}(17 \le \mathrm{Z} \le 18)=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5} \le \mathrm{Z} \le \frac{18-14}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0.6 \le \mathrm{Z} \le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le 0.9)-\mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le 0.6)$

$=0.288-0.226$

$=0.062$

46) [정답] 62

[해설]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $f(10)>f(20)$이므로

$m<\frac{10+20}{2}$

즉, $m<15$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f(4)<f(22)$이므로

$m>\frac{4+22}{2}$

즉, $m>13$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $13<m<15$이고 m은 자연수이므로 $m=14$

이때 $Z=\frac{X-14}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(17 \le X \le 18)=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5} \le Z \le \frac{18-14}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$=0.288-0.226$

$=0.062$

따라서 $a=0.062$이므로

$1000a=62$

47) [정답] ①

[해설]

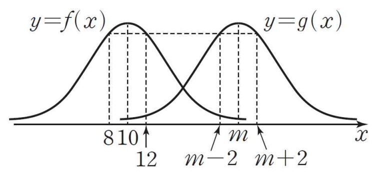
두 확률변수 X와 Y는 모두 정규분포를 따르고, $\sigma(X)=\sigma(Y)=2$이므로

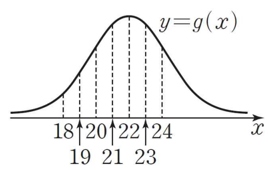
두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고,

$y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

오른쪽 그림과 같이





$f(8)=f(12)=g(m-2)=g(m+2)$이다.

이때 $f(12) \le g(20)$에서

$m-2 \le 20 \le m+2$

즉, $18 \le m \le 22$에서 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 값은

오른쪽 그림과 같이 $m=22$일 때 최대이다.

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(22, 2^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\frac{Y-22}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{21-22}{2} \le Z \le \frac{24-22}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$=0.1915+0.3413$

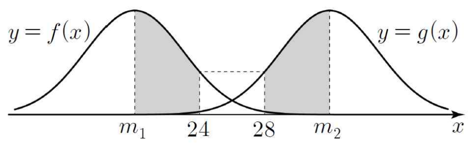
$=0.5328$

48) [정답] ②

[해설]

표준편차가 같은 정규분포곡선의 모양은 항상 일정하다.
확률변수 X, Y는 표준편차가 같은 정규분포를 따르고,

조건 (가)에 의하여 $m_1 < 24 < 28 < m_2$, $f(24)=g(28)$인 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하자.

$$\mathrm{P}(m_1 \le X \le 24)=\mathrm{P}(28 \le Y \le m_2)=0.4772$$

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{24-m_1}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{28-m_2}{\sigma} \le Z \le 0\right)$$
$$=0.4772$$

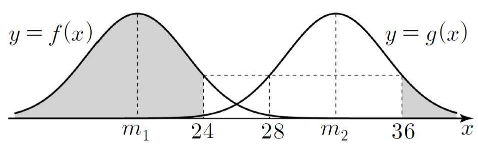
$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)=0.4772$$

이므로 $\dfrac{24-m_1}{sigam}=2$, $\dfrac{28-m_2}{\sigma}=-2$

$24-m_1=2\sigma$, $m_2-28=2\sigma$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에 의하여

$$\mathrm{P}(Y \ge 36)=1-\mathrm{P}(X \le 24)$$
$$=1-\mathrm{P}(Z \le 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z \ge 2)$$



$\dfrac{36-m_2}{\sigma}=2$, $36-m_2=2\sigma$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m_2-28=36-m_2$

$m_2=32$이므로 $\sigma=2$, $m_1=20$

$$\therefore \mathrm{P}(18 \le X \le 21)=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)$$
$$=0.3413+0.1915$$
$$=0.5328$$

49) [정답] 25

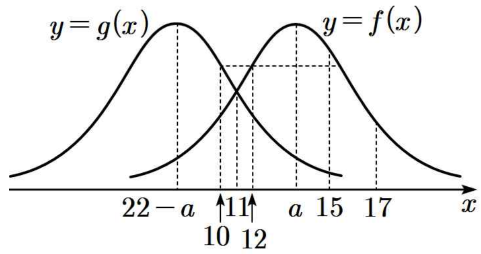
[해설]
조건 (가)에서
$\mathrm{P}(X \le 11)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{11-a}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Y \ge 11)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{11-2b+a}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X \le 11)=\mathrm{P}(Y \ge 11)$ 이므로

$\dfrac{11-a}{\sigma}+\dfrac{11-2b+a}{\sigma}=0$ $\quad\quad \therefore b=11$

확률변수 X의 평균이 a, 확률변수 Y의 평균이 $22-a$이고, 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=11$에 대하여 대칭인 함수이다.



$g(10)=f(12)$이므로 조건 (나)에서
$f(17)<g(10)=f(12)<f(15)$
$|15-a|<a-12<17-a$
$\dfrac{27}{2}<a<\dfrac{29}{2}$ $\quad\quad \therefore a=14$
$\therefore a+b=14+11=25$

50) [정답] ④

[해설]
곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같다.
확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면
확률변수 Y의 평균은 $m-6$, 표준편차는 σ이다.
표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여
조건 (가)에서
$\mathrm{P}(X \le 11)=\mathrm{P}(Y \ge 23)$
$\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{11-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{29-m}{\sigma}\right)$
$\dfrac{11-m}{\sigma}=-\dfrac{29-m}{\sigma}$에서 $m=20$
조건 (나)에서
$\mathrm{P}(X \le k)+\mathrm{P}(Y \le k)=1$
$\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{k-20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{k-14}{\sigma}\right)=1$
$\dfrac{k-20}{\sigma}=-\dfrac{k-14}{\sigma}$에서 $k=17$
$\mathrm{P}(X \le 17)+\mathrm{P}(Y \ge 17)$
$=\mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{3}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{3}{\sigma}\right)$
$=2\times\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{3}{\sigma}\right)$
$\mathrm{P}(X \le 17)+\mathrm{P}(Y \ge 17)=0.1336$에서

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.0668$

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$, 즉 $\mathrm{P}(Z \geq 1.5) = 0.0668$

$\frac{3}{\sigma} = 1.5$에서 $\sigma = 2$

따라서 $\mathrm{E}(X) + \sigma(Y) = m + \sigma = 20 + 2 = 22$

51) [정답] ③

[해설]

세 확률변수 X, Y, W 를

X : $\mathrm{N}(20, 4^2)$, Y :$\mathrm{N}(45, 6^2)$,

W : $\mathrm{N}(80, 8^2)$

라 하고 표준정규분포를 Z : $\mathrm{N}(0, 1^2)$이라 두면

$\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}$ 에서 $|X-20| < 10$

$\therefore \left|\frac{X-20}{4}\right| < \frac{10}{4} = 2.5$

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) = \mathrm{P}(|z| < 2.5)$

같은 방법으로

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{225} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}\right) = \mathrm{P}(|z| < 1.5)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) = \mathrm{P}(|z| < 5)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}\right) = \mathrm{P}(|z| < 2)$

따라서, 옳은 것은 ㄱ. ㄷ

52) [정답] ②

[해설]

포도송이 한 송이의 무게를 확률변수 X라 두면 $X \sim N(600, 100^2)$이므로 한 송이의 무게가 636g 이상일 확률은 $P(X \geq 636) = P(Z \geq 0.36) = 0.36$포도송이를 100송이 뽑았을 때 636g 이상인 포도송이의 개수를 확률변수 Y라 두면 $Y \sim B(100, 0.36)$가 되고 이 이항분포는 정규분포 $N(36, (4.8)^2)$에 근사해 간다.

$\therefore P(Y \geq 42) = P(Z \geq 1.25) = 0.11$

53) [정답] 64

[해설]

한 학생의 통학 시간을 확률변수 X라 하면

$p_1 = \mathrm{P}(X \geq 35) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{35-25}{5}\right) = 0.02$

따라서 2500명 중 통학 시간이 35분 이상인 학생의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500, 0.02)$를 따르므로 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 7^2)$을 따른다. 이때,

$p_2 = \mathrm{P}(Y \geq n) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{n-50}{5}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 2)$이어야 하므로

$\frac{n-50}{7} = 2$이다.

$\therefore\ n = 64$

54) [정답] ④

[해설]

자영업자의 하루 매출액을 확률분포 X라 하고 확률변수 Z를 $Z = \frac{X-30}{4}$ 라 하면, 어느 날 자영업자가 기부할 확률은 $\mathrm{P}(Z \geqq 0.25) = 0.4$ 이다. 600 일 동안의 자선단체 기부가능성 확률분포 Y 라 하면 이항분포 B(600, 0.4) 로 나타낼 수 있고, 이를 정규분포로 근사하면 $\mathrm{N}(240, 12^2)$ 이다. 따라서 600 일 중에서 222 일 이상 자선단체에 기부할 확률은

$\mathrm{P}\left(\mathrm{m} - \frac{3}{2}\sigma \leqq \mathrm{Y}\right) = \mathrm{P}(-1.5 \leqq \mathrm{Z}) = 0.93$ (단, $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{Y}-240}{12}$)

55) [정답] ②

[해설]

사과의 무게 X는 정규분포 $N(400, 50^2)$을 따른다.

1등급 상품이 될 확률은

$\mathrm{P}(X \geq 442) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{442-400}{50}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 0.84) = 0.2$

사과 100개 중 1등급 상품의 개수 Y는 이항분포 $B(100, 0.2)$를 따르고 근사적으로 $N(20, 4^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y \geq 24) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{24-20}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1) = 0.16$

56) [정답] 71

[해설]

모집단의 분포는

X	1	2	3	4	5	합계
P $(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)=2$인 경우는

$(x_1, x_2, x_3)=(1,1,4),\ (1,4,1),\ (4,1,1)$

$(1,2,3),\ (1,3,2),\ \cdots,\ (3,2,1)$

$(2,2,2)$

이므로 구하는 확률은

$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+6\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$

$\therefore p+q=64+7=71$

57) [정답] 175

[해설]
각 시행에서 뽑힌 숫자를 $x_i(1\le i\le 4)$라 하면

$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{11}{4}$이므로 $x_1+x_2+x_3+x_4=11$이다.

$1\le x_i\le 6(1\le i\le 4)$이므로

$x_i{}'=x_i-1(1\le i\le 4)$이라 두면 $0\le x_i{}'\le 5$이고,

$x_1{}'+x_2{}'+x_3{}'+x_4{}'=7$이다.

이 꼴을 만족하는 순서쌍 $(x_1{}', x_2{}', x_3{}', x_4{}')$의 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_7$이다.

$0\le x_i{}'\le 5$이어야 하므로 $x_i{}'\ge 6$인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{H}_1$이다.

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=11,\ 1\le x_i\le 6(1\le i\le 4)$을 만족하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_7-{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{H}_1=120-16=104$

이므로 구하는 확률은 $104\times\frac{1}{6^4}=\frac{13}{162}$

따라서 $p+q=162+13=175$

[다른 풀이]

$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{11}{4}$이므로 $x_1+x_2+x_3+x_4=11$이다.

총 네 수의 합이 11이 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(6, 3, 1, 1), (6, 2, 2, 1)
(5, 4, 1, 1), (5, 3, 2, 1), (5, 2, 2, 2)
(4, 4, 2, 1), (4, 3, 3, 1), (4, 3, 2, 2)
(3, 3, 3, 2)

위 숫자들의 조합은

(a, a, a, b)2가지, (a, a, b, c)6가지, (a, b, c, d)1가지이다.

(i) (a, a, a, b)를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$가지

따라서 (3, 3, 3, 2), (5, 2, 2, 2)의 확률은 $2\times\frac{4}{6^4}$

(ii) (a, a, b, c)를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$가지

따라서 (6, 3, 1, 1), (6, 2, 2, 1), (5, 4, 1, 1), (4, 4, 2, 1), (4, 3, 3, 1), (4, 3, 2, 2)의 확률은 $6\times\frac{12}{6^4}$

(iii) (a, b, c, d)를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$가지

따라서 (5, 3, 2, 1)의 확률은 $\frac{24}{6^4}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{8+72+24}{6^4}=\frac{13}{162}$

$\therefore p+q=175$

[다른 풀이]

각 시행에서 뽑은 수를 X_1, X_2, X_3, X_4라 하면,

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}=\frac{11}{4}$이므로

$X_1+X_2+X_3+X_4=11$

가능한 경우는

$6+3+1+1=6+2+2+1$

$=5+4+1+1+=5+3+2+1=5+2+2+2$

$=4+4+2+1=4+3+3+1=4+3+2+2=3+3+3+2$

가 존재하고,

○○○◆꼴의 경우 뽑는 순서 정하는 경우 4가지이므로

4×2

○○△꼴의 경우 뽑는 순서 정하는 경우는 $\frac{4!}{2!}$이므로

$\frac{4!}{2!}\times 6=72$

$5+3+2+1$의 경우 모두 다르므로, 뽑는 순서 정하는 경우는 $4!$이므로

$4!\times 1=24$

따라서 $8+72+24=104$

구하는 확률은 $\frac{104}{6^4}=\frac{13}{162}=\frac{q}{p}$

따라서 $p+q=162+13=175$

58) [정답] 23

[해설]

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=4)=a^4$

$a^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$X=16$인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=16)=d^4$

$16d^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le d\le 1$이므로 $d=\frac{1}{6}$

$a+b+c+d=1$이므로

$b+c=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

확인한 4개의 수의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$X=4\overline{Y}$이다.

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4\overline{Y})=4\mathrm{E}(\overline{Y})=4\mathrm{E}(Y)$

$=4\left(\frac{1}{3}+2b+3c+\frac{4}{6}\right)=4(1+2b+3c)$

$\mathrm{E}(X)=9$에서 $4(1+2b+3c)=9$이므로

$2b+3c=\frac{5}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(4\overline{Y})=16\mathrm{V}(\overline{Y})=4\mathrm{V}(Y)$

$=4[\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2]$

$=4\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{9}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}$

$=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)=\frac{19}{4}$

따라서 $p=4$, $q=19$이므로 $p+q=23$

59) [정답] ③

[해설]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 0.1^2)$을 따른다. 또한, 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(X\leq 50)=\mathrm{P}(Z\leq -2)=0.02$

이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르고, 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 60)=\frac{1}{2}$ ∴ 참

ㄴ. $\mathrm{P}(Y\geq 57)=\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.16$

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq 59.9)=\mathrm{P}(Z\leq -1)=0.16$ ∴ 참

ㄷ.

$\mathrm{P}(60-k\leq X\leq 60+k)=\mathrm{P}(-\frac{k}{5}\leq Z\leq \frac{k}{5})$

$\mathrm{P}(60-k\leq \overline{X}\leq 60+k)=\mathrm{P}(-\frac{k}{0.1}\leq Z\leq \frac{k}{0.1})$

$\mathrm{P}(60-k\leq X\leq 60+k)<\mathrm{P}(60-\mathrm{k}\leq \overline{X}\leq 60+k)$

∴ 거짓

60) [정답] ①

[해설]

과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(350, \left(\frac{30}{3}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$을 따른다.

또한, 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(490, \left(\frac{40}{2}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(490,\ 20^2)$을 따른다.

$X=9\overline{X}$, $Y=4\overline{Y}$이고 확률변수 X와 Y는 독립이다.

∴ $\mathrm{P}(X\geq 3240,\ Y\geq 2008)$

$=\mathrm{P}(X\geq 3240)\times \mathrm{P}(Y\geq 2008)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\geq 360)\times \mathrm{P}(\overline{Y}\geq 502)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1)\times \mathrm{P}(Z\geq 0.6)$

$=(0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1))\times(0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)$

$=(0.5-0.34)\times(0.5-0.23)$

$=0.0432$

61) [정답] ③

[해설]

이 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X, X의 표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

표본의 크기가 $n=16$, 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{4}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{4}$$

이므로 $c=1.96\times\frac{\sigma}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq m+c)&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{1.96}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 0.49)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.49)\\&=0.5+0.1879\\&=0.6879\end{aligned}$$

62) [정답] ③

[해설]

$b-a=2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$이므로

$10n<10^{\frac{2}{b-a}}$에서 $10n<10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 10n<\log 10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

$1+\log n<\frac{\sqrt{n}}{9.8}$, $9.8<\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}$

따라서 $n=1700$일 때 $\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}=9.75$

$n=1800$일 때 $\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}=9.97$

이므로 n의 최솟값은 1800이다.