제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

2×2^{-1}

2. 함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$6x^2-2x$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_5=4,\ a_7=4a_6-16$$

을 만족시킬 때, a_8 의 값은? [3점]

① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

$4r^2=16r-16$

$r^2-4r+4=0$

$r=2,\ a_8=4r^3=32$

4. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt=x^3-ax+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$x=1 \rightarrow 0=2-a,\ a=2$

$f(x)=3x^2-a,\ f(2)=12-2=10$

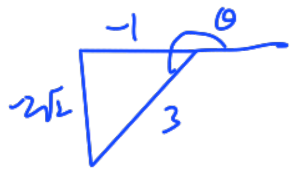
5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$ 이고 $\sin(\pi+\theta)>0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1

④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$-\cos\theta=\frac{1}{3}$ $-\sin\theta>0$

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$ $\sin\theta<0$ 3사분면



$\tan\theta=2\sqrt{2}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

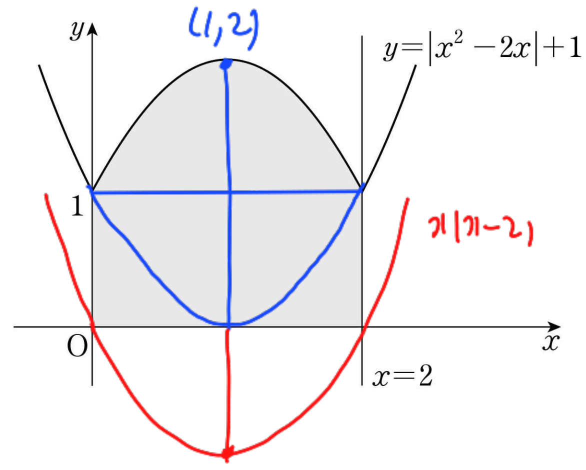
$x=2$연속 $\Rightarrow$ $(5-2a)^2=(-1)^2$

$5-2a=1, -1$

$a=2, 3$

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



$2+\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{10}{3}$

8. 두 점 $\mathrm{A}(m, m+3)$, $\mathrm{B}(m+3, m-3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

$\left(\frac{3m+6}{3}, \frac{3m-3}{3}\right)=(m+2, m-1)$

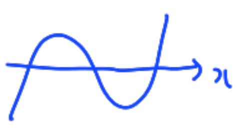
$\log_4(m+10)+m-3=m-1$

$\log_4(m+10)=2$, $m+10=16$, $m=6$

9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? (단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

$3x^2-6x=3x(x-2)$



$x=1 \to 1-3+p=0$, $p=2$

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $|a_4|+|a_6|=8$

(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k=27$

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

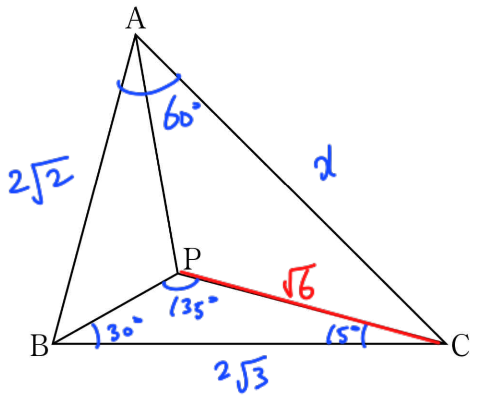
(나) $9a_5=27$, $a_5=3$

a_4　a_5　a_6

-1　3　7

$d=4$, $a_{10}=3+5d=23$

11. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=60°$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PBC}=30°$, $\angle \mathrm{PCB}=15°$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt3}{\sin 135°} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30°}$, $\overline{PC} = \sqrt6$

$\overline{AC} = x$, $12 = x^2 + 8 - 2\cdot x\cdot 2\sqrt2\cdot\frac12$

$x^2 - 2\sqrt2 x - 4 = 0$

$x = \sqrt2 \pm \sqrt6$, $x = \sqrt2 + \sqrt6$

$\triangle ABC$, $\frac{2\sqrt3}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt2}{\sin C}$, $\sin C = \frac{\sqrt6}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt2}{2}$, $\angle C = 45°$

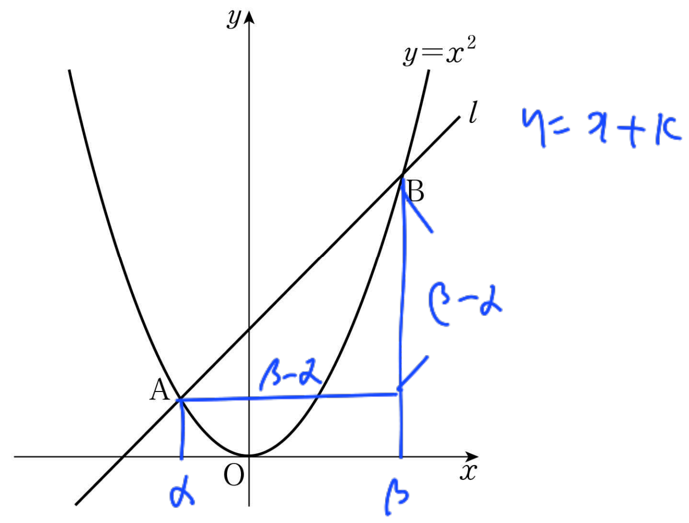
$\angle ACP = 30°$

$\therefore \triangle APC = \frac12 \times \sqrt6 \times (\sqrt2+\sqrt6) \times \sin 30°$

$= \frac{2\sqrt3+6}{4} = \frac{\sqrt3+3}{2}$

12. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



$x^2 - x - k = 0$

$\overline{AB} = \sqrt2(\beta-\alpha) = \sqrt2\cdot\frac{\sqrt{1+4k}}{1} = 2t$

$2(1+4k) = 4t^2$, $k = \frac{2t^2-1}{4} = g(t)$

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \times \frac{2t^2-1}{4} = \frac12$

13. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

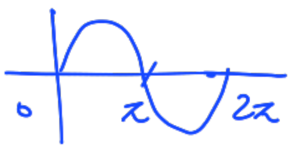
(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$ (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

(가) $\sin a\pi = \pm 1$ $a=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

(나) $\sin x = t$ $(-1 \le t \le 1)$

$f(t)=0$

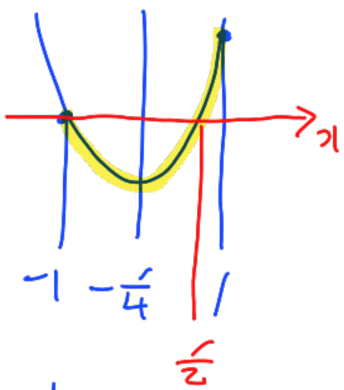


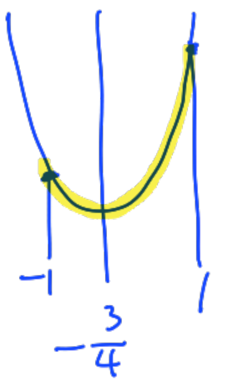
i) $a=\frac{1}{2}$

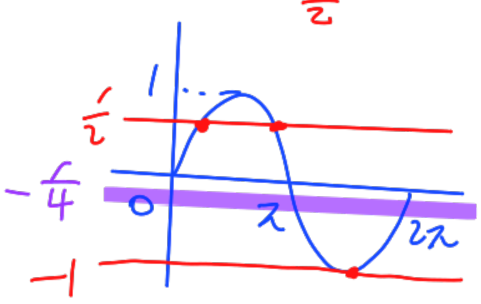
$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$

ii) $a=\frac{3}{2}$

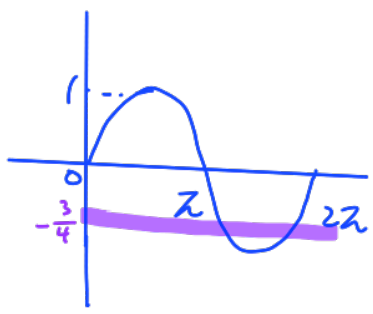
$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$







$x+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}\pi$



(x)

$f(-1)=1-\frac{1}{2}+b=0,\ b=-\frac{1}{2}$

$f(2)=4+1+b=\frac{9}{2}$

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge k) \end{cases}$$

$f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x>k) \end{cases}$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $a=1 \rightarrow x=k$ 미가 $f'(k)=a=1$

ㄴ. $k=3 \rightarrow$ $\begin{cases} 3a=-9+12b-3b^2 \rightarrow a=-3+4b-b^2 \\ a=-6+4b \end{cases}$

$-6+4b=-3+4b-b^2$

$b^2=3,\ b=\sqrt{3},\ a=-3+4\sqrt{3}-3=-6+4\sqrt{3}$

ㄷ. $ak=k \rightarrow k=1$

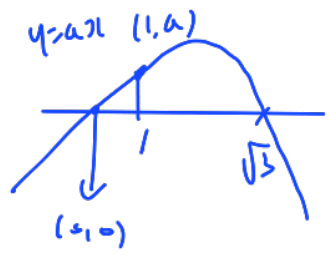
$a=-1+4b-3b^2$

$a=-2+4b$

$3b^2=1,\ b=\frac{\sqrt{3}}{3},\ a=-2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$-x^2+4bx-3b^2$

$-(x-b)(x-3b)$



$S=\frac{1}{2}\times 1\times a+\int_1^{\sqrt{3}}(-x^2+4bx-3b^2)dx$

$=\frac{1}{2}a+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{2}(-2+\frac{4}{3}\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3})-(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)$

$=-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{3}$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

$a_1=1$

$a_2=2k$

$a_3=2k+1$

$a_4=4k+1$

$a_5=3k+1$

$a_6=\begin{cases} 7k+2=34 \\ \frac{7k+2}{2}=34 \end{cases}$

(x)

$a_2=2k-1$

$a_3=k$

$k=2t$

$a_3=2t$

$a_4=6t-1$

$a_5=8t-1$

$a_6=7t-1=34$

$t=5$

$k=10$

$\boxed{a_2=19}$

$k=2t-1$

$a_3=2t-1$

$a_4=3t-2$

$a_5=5t-3$ or $\frac{5t-3}{2}$

$8t-5=34$ (x)

$\frac{8t-5}{2}=34$ (x)

$\frac{11t-7}{2}=34$ (x)

$\frac{11t-7}{4}=34$

$\downarrow$

$11t=143$

$t=13$

$k=25$

$\boxed{a_2=49}$

$\therefore 19+49=68$

단 답 형

16. $\log_2 96-\dfrac{1}{\log_6 2}$ 의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{4}$

$\log_2 \frac{96}{6}=4$

17. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{11}$

$\begin{cases} 2t^4-4t+k=4t+5 \\ 8t^3-4=4 \end{cases}$

$t^3=1,\ t=1$

$k=11$

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{427}$

$\alpha_n+\beta_n=5n$
$\alpha_n\beta_n=4n^2$

$1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n$
$=1-5n+4n^2$

$\sum_{n=1}^{7}(4n^2-5n+1)=4\cdot\frac{7\cdot8\cdot15}{6}-5\cdot\frac{7\cdot8}{2}+7$
$=560-140+7$
$=427$

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\quad v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{18}$

$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt$
$x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$) =

$2t^3-12t^2+kt=0$
$t(2t^2-12t+k)=0$
양의실근1개, 대칭축 3
$D/4=36-2k=0$, $k=18$

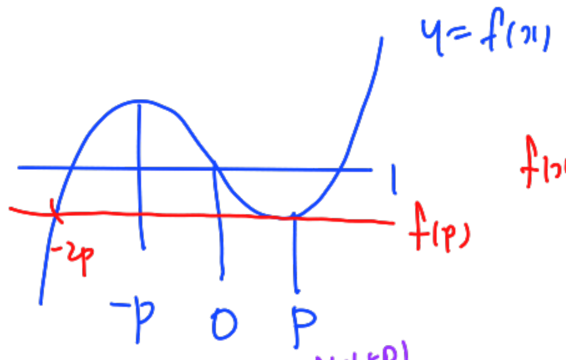
20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)=0$
>
> (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\ge0) \end{cases}$

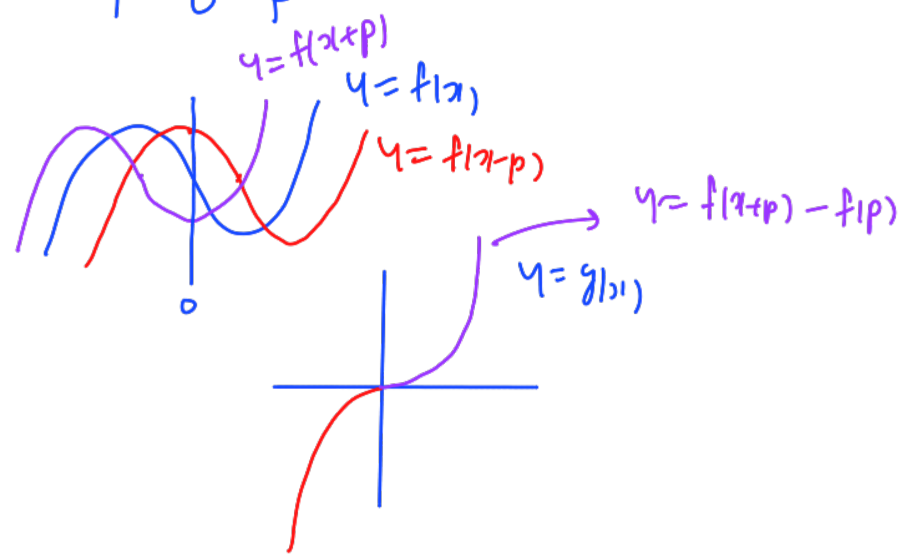
$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{66}$

$f'(-p)=f'(p)=0$



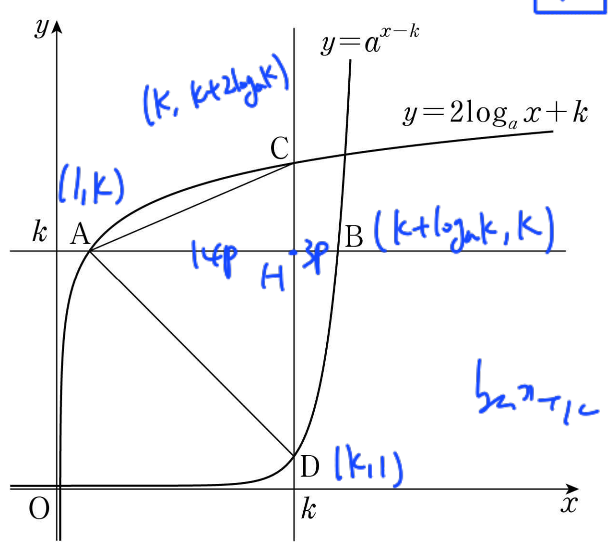
$f(x)=(x-p)^2(x+2p)+f(p)$



$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p\left(f(x+p)-f(p)\right)dx$
$=\int_0^p x^2(x+3p)\,dx=\frac{1}{4}x^4+px^3\Big|_0^p=\frac{5}{4}p^4=20$
$p^4=16$, $p=2$
$f(x)=(x-2)^2(x+4)+f(2)$
$f(0)=16+f(2)=1$, $f(2)=-15$
$f(5)=9\cdot9-15=66$

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{12}$



$\overline{AB}\times\overline{CD}=85$

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{CD}=35$ $\Rightarrow$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\frac{17}{14}$

$\overline{AB}:\overline{AH}=17:14$

$(k-1)\times\frac{3}{14}=\overline{BH}=\log_a k$

$\overline{CD}=(k-1)+2\log_a k=(k-1)+\frac{3}{7}(k-1)=\frac{10}{7}(k-1)$

$\overline{AH}\times\overline{CD}=(k-1)\times\frac{10}{7}(k-1)=70$, $(k-1)^2=49$, $k=8$

$7\times\frac{3}{14}=\log_a 8$, $8=a^{\frac{3}{2}}$, $a=4$

$a+k=4+8=12$

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

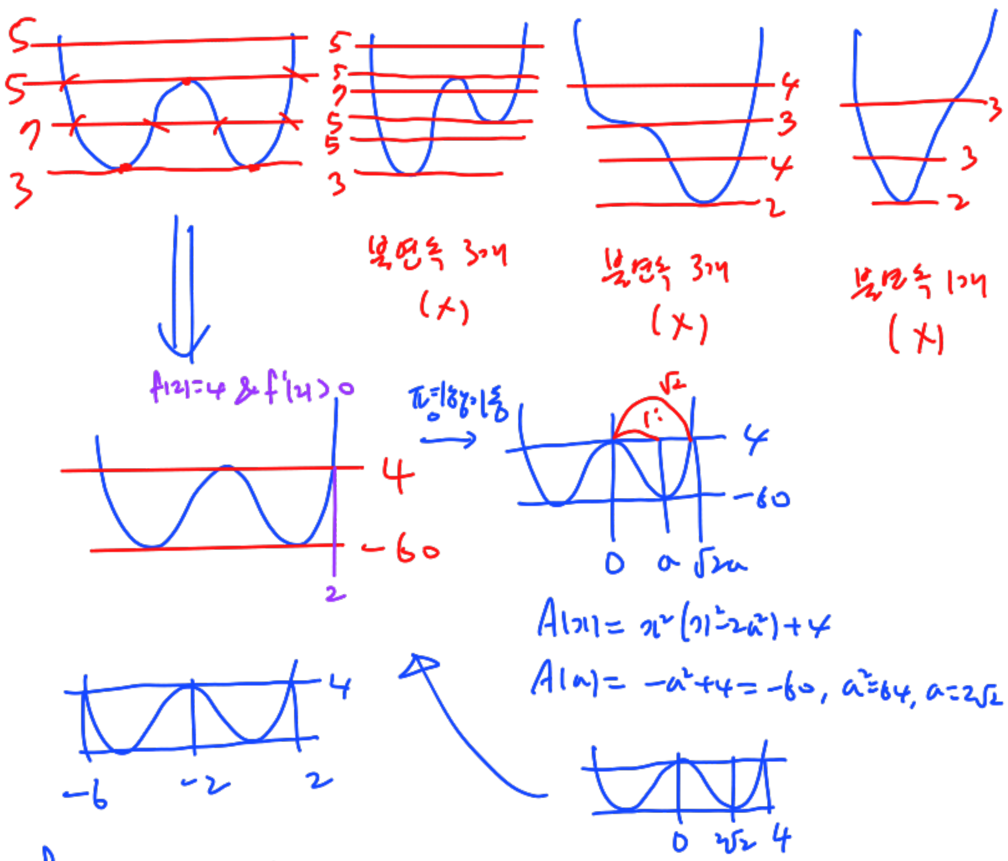
> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{729}$

$\lim_{x\to k^-}\frac{g(x)-g(k)}{-(x-k)}=\lim_{x\to k^+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=L$

$g(x)$의 k에서 좌미분계수 = 우미분계수 → 부호반대 아 $g'(k)=0$

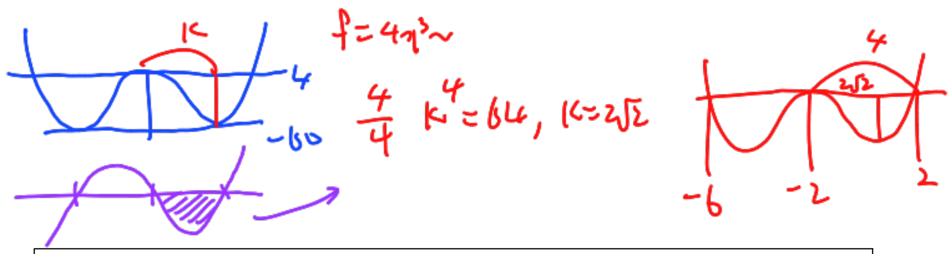


$f(x)=(x+2)^2(x+6)(x-2)+4$

$f(4)=36\cdot10\cdot2+4=724$

$h(4)=5$

729



> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지 선 다 형

23. ${}_3\mathrm{P}_2 + {}_3\Pi_2$ 의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

6+9

24. 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

25. 문자 A, A, A, B, B, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝 모두에 B가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45　② 50　③ 55　④ 60　⑤ 65

AAABCC

$\frac{6!}{3!2!} = 60$

26. 서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120　② 130　③ 140　④ 150　⑤ 160

${}_6C_3 \times 2^3 = 20 \times 8$

27. 방정식 $a+b+c+3d=10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [3점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

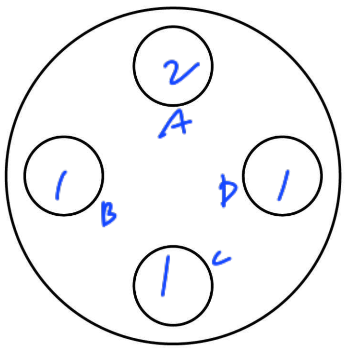
$d=1 \to {}_3H_4 = 15$

$d=2 \to {}_3H_1 = 3$

28. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
> (나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420　② 450　③ 480　④ 510　⑤ 540



빵 → ${}_5C_2=10$

$A+B+C+D=5$ $\left(\begin{array}{l} 0\le A\le 1 \\ 0\le B,C,D\le 2 \end{array}\right)$

0	2 2 1	→ 3
1	2 2 0	→ 3
1	2 1 1	→ 3

) 9

$3!\times 10\times 9 = 540$

단답형

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다. $\boxed{120}$
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

$9 \le 6$개 합 ≤ 15
11
12

123111 → 9
123333 → 15

321 321 → $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$
321 222 → $\frac{6!}{4!} = 30$
120

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{45}$

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(2) \ne 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

$f(2)$

$2 \to 2 \times ({}_4H_3 - 7) = 26$

$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$
2,3,4	4	5
2,3,4,5	5	5

$3 \to 3 \times ({}_3H_3 - 5) = 15$

$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$
3 4	4	5
3 4 5	5	5

$4 \to 4 \times 1 = 4$

$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$
4	4	4

$26 + 15 + 4 = 45$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n - 2^n < a_n < 3^n + 2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$a_n = dn \sim$

$\frac{2d-6}{d}=4$, $d=-3=a_2-a_1$

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

$a_n=\frac{3}{n^2+1}$, $a_n+b_n=\frac{1}{4n^2+1}$

$2a_n+2b_n=\frac{2}{4n^2+1}$, $a_n+2b_n=\frac{2}{4n^2+1}-\frac{3}{n^2+1}$

$1-6=-5$

27. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=\frac{-6}{n(n+1)}$ $(n\geq 2)$

$\frac{a_1}{b_1}=3$, $b_1=1$

$\frac{a_2}{b_2}=-1$, $b_2=4$) $d=3$

$b_n=3n-2$

$a_n=\frac{-6(3n-2)}{n(n+1)}$

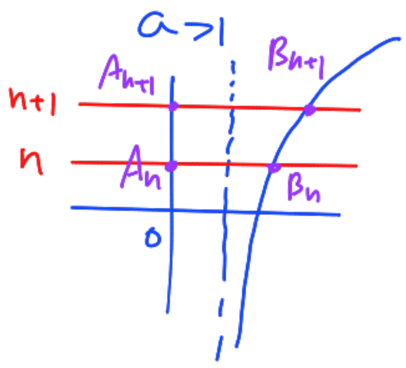
$a_nb_n=\frac{-6(3n-2)^2}{n(n+1)}\to -54$

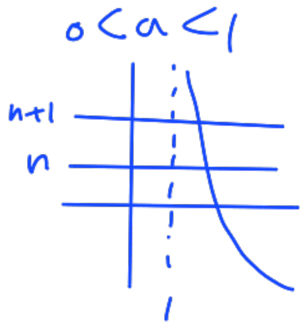
28. $a>0$, $a\neq 1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3





$\mathrm{A}_n(0,n)$ $\mathrm{B}_n(a^n+1,n)$

$\mathrm{A}_{n+1}(0,n+1)$ $\mathrm{B}_{n+1}(a^{n+1}+1,n+1)$

$S_n=\frac{1}{2}(a^n+1+a^{n+1}+1)=\frac{2+(a+1)a^n}{2}$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\sqrt{((a-1)a^n)^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{2+(a+1)a^n}$

$a>1\to\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$

$4(a-1)=3$

$a=\frac{7}{4},\frac{1}{4}$

(o) (x)

$0<a<1\to 1=\frac{3}{2a+2}$, $a=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$

단답형

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{50}$

$x^2-4nx+4n^2 < n+4n^2$

$(x-2n)^2 < 4n^2+n$

$-0.\times\times\times$

$\underbrace{2n-\sqrt{4n^2+n}} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$

$\sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2+n} < \sqrt{(2n+1)^2}$

$0 \le x \le 2n+2n$, $a_n=4n+1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-pn\right)=q \quad (p>0)$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=q$, $\quad p=2$

$\dfrac{1}{2+p}=q=\dfrac{1}{4}$

$100pq=100\times2\times\frac{1}{4}=50$

30. 함수

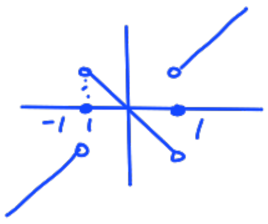
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2 \le |x| < 2k$일 때,
>
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=\begin{cases} |x|<1 \to -x \\ |x|>1 \to x \\ x=1 \to 0 \\ x=-1 \to 0 \end{cases}$



$\boxed{25}$

$0\le|x|<2 \to g(x)=f(x)$

$2\le|x|<4 \to g(x)=3f\left(\frac{x}{3}\right)$

$4\le|x|<6 \to g(x)=5f\left(\frac{x}{5}\right)$

$\vdots$

$2\le|x|<3 \to -x$

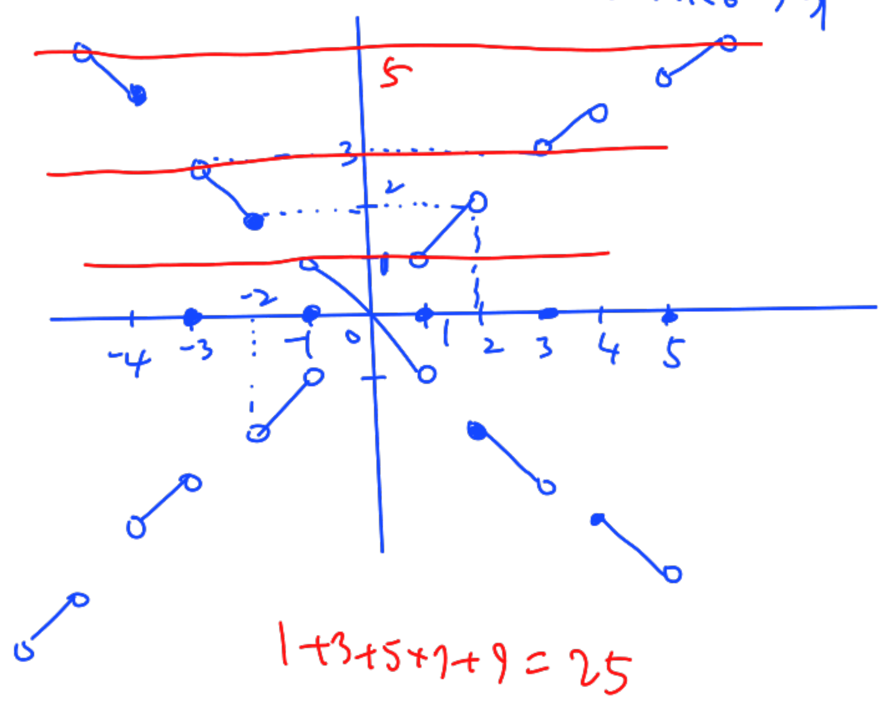
$|x|=3 \to 0$

$3<|x|<4 \to x$

$4\le|x|<5 \to -x$

$|x|=5 \to 0$

$5<|x|<6 \to x$



$1+3+5+7+9=25$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ 8

24. 포물선 $x^2=8y$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

거=4·2y

25. 한 초점이 F(3, 0)이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것을 l이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$　② 2　③ $\sqrt{5}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

$a=2$
$c=3$
$b=\sqrt{5}$

$l : y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$

$(3,0) \sim \sqrt{5}x-2y=0$

$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{5+4}}=\sqrt{5}$

26. 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 포물선과 만나는 두 점을 A(a, b), B(c, d)라 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$(y-2)^2=4(x+2)$

$y^2=4x$　$(1,0) \longrightarrow (-1, 2)$

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

$4(x+2)=4-(x+1)^2$

$4x+8=-x^2-2x+3$

$x^2+6x+5=0$　$x=-5, -1$

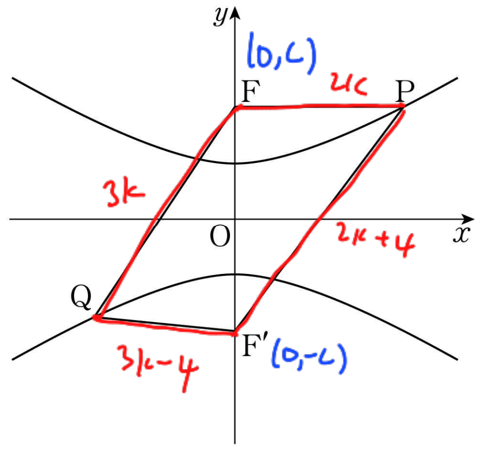
$\times$　$y=4, 0$

$(-1,4), (-1,0)$

27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)\ (c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$이 있다. 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 쌍곡선 위의 제3사분면에 있는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'}=5,\ \overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$$

를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$의 값은? [3점]



① 10 ② $\frac{35}{3}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ 15 ⑤ $\frac{50}{3}$

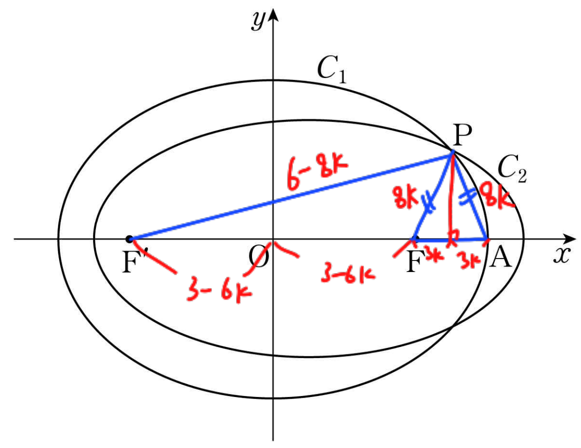
$(2k+4)-(3k-4) = -k+8 = 5$

$k=3$

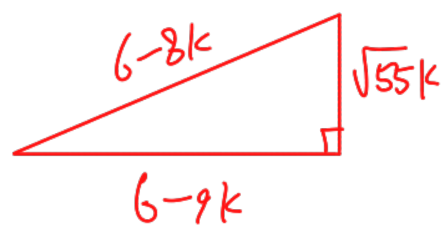
$5k=15$

28. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{AFP})=\frac{3}{8}$일 때, 삼각형 PFA의 둘레의 길이는? [4점]

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



$\overline{PF'}+\overline{PF}=6=\overline{PF'}+\overline{PA}$ ∴ $\overline{PF}=\overline{PA}$



$64k^2+\cancel{36}-96k = 81k^2+\cancel{36}-108k+55k^2$

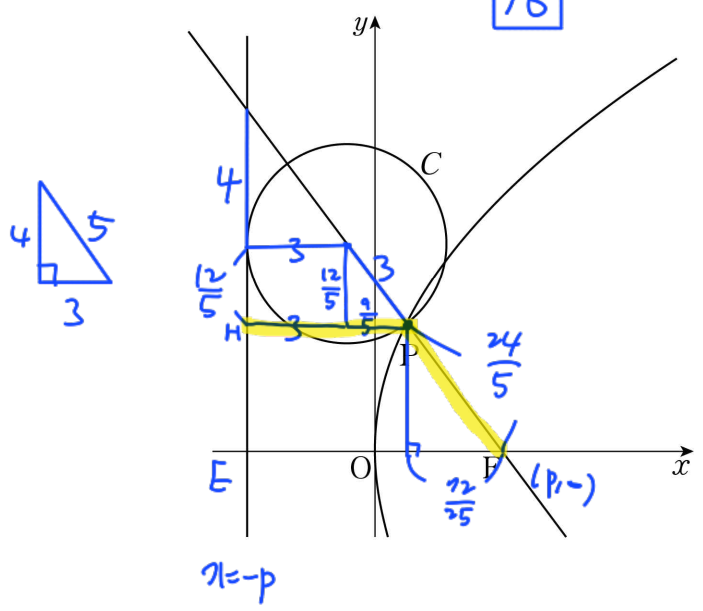
$72k^2-12k=0$ $12k(6k-1)=0$ $k=\frac{1}{6}$

$22k=\frac{11}{3}$

단답형

29. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 직선 FP 위의 점을 중심으로 하는 원 C가 점 P를 지나고, 포물선의 준선에 접한다. 원 C의 반지름의 길이가 3일 때, $25p$의 값을 구하시오. (단, 원 C의 중심의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.) [4점]

$\boxed{96}$



$\overline{PH} = \frac{24}{5} = \overline{PF}$

$\overline{EF} = 2p = \frac{24}{5} + \frac{72}{25} = \frac{192}{25} = 2p, \quad p = \frac{96}{25}$

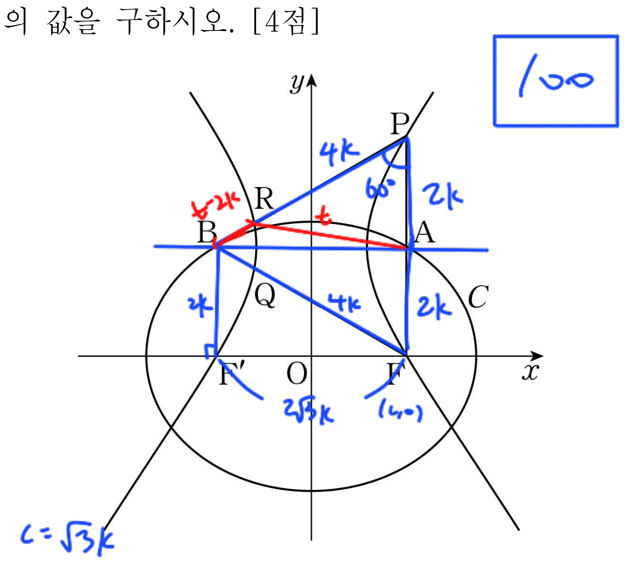
$\therefore 25p = 96$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자.
두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자.
세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
> (나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.

$60 \times \overline{AF}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{100}$



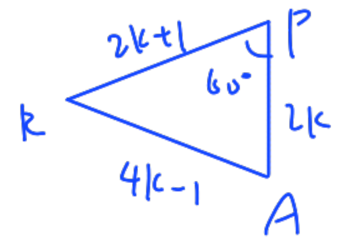
$c = \sqrt{3}k$

$\overline{PB} - \overline{PA} = \overline{RA} - \overline{RB} = 2k$

(나) $6k - 3(t-2k) = 3, \quad 2k - t + 2k = 1$

$t = 4k-1, \quad t - 2k = 2k-1$

$\overline{PR} = 2k+1$



$(4k-1)^2 = (2k+1)^2 + (2k)^2 - 2\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot\frac{1}{2}$

$16k^2 + 1 - 8k = 8k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 2k$

$12k^2 - 10k = 0, \quad k = \frac{5}{6}$

$\overline{AF} = 2k = \frac{5}{3}$

$60 \times \frac{5}{3} = 100$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.