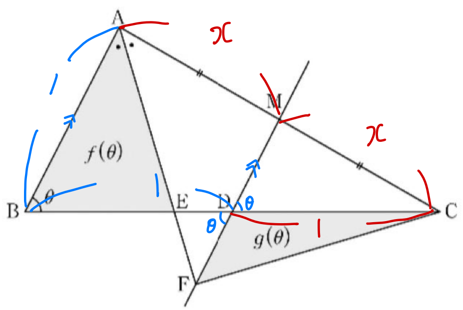
28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)

3 [4점]




① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ V ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

$\triangle CMD \backsim \triangle CAB$ (AA 닮음)

$\Rightarrow \overline{CM}:\overline{CA}=\overline{CD}:\overline{CB}$

$1:2=\overline{CD}:2$

$\therefore \boxed{\overline{CD}=1}$

$\triangle BAE \backsim \triangle DFE$ (AA닮음)

닮음비 $\overline{BE}:\overline{DE}$

넓이비 $\overline{BE}^2:\overline{DE}^2$

$\Rightarrow f(\theta)=[\triangle DFE]\times\frac{\overline{BE}^2}{\overline{DE}^2}$

$g(\theta)=[\triangle DEF]\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$

$\Rightarrow \frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{\overline{DE}\times\overline{CD}}{\overline{BE}^2}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}^2}$

$\overline{AM}=\overline{MC}=x$ 라 해 보자.

$\triangle ABC$에서 cos 법칙을 이용하면

$4x^2=5-4\cos\theta$

$\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$ 식을 $x$에 대해 표현해보자.

$\overline{BE}=2\times\frac{1}{1+2x}$ ($\because$ 각이등분선 정리)

$\overline{ED}=2\times\frac{2x}{1+2x}-1$ ($\because \overline{CE}-\overline{CD}$)

$\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}^2}=\frac{\frac{2x-1}{1+2x}}{\left(\frac{2}{1+2x}\right)^2}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{4}$

$=\frac{4x^2-1}{4}=\frac{4-4\cos\theta}{4}=1-\cos\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2 f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$

답 : ③