규 토
고득점
N 제

CONTENTS

규토 고득점 N제 오리엔테이션

문제편

해설강의편

오리엔테이션

책소개

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 제자들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D 처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 제자들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다. 수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다. 최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다.
고득점 N제 미적분은 총 63문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 제자들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다. 틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다. 다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

4점짜리 자작문제들만 수록

쉽지만 중요한 4점부터 까다로울 수 있는 준킬러급 4점은 물론 어려운 킬러급 4점까지 모두 수록하였습니다. 따라서 1등급, 2등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다. ① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 [1)]표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 복합적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

검토후기

김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 규토 N제 시리즈 검토자 김태민입니다. 라이트 N제 시리즈 검토에 이어 고득점 시리즈 검토에도 참여하게 되었습니다.

'고난도' 라는 말을 듣기만 해도 거부감이 들고 무수한 조건들을 보면 어떻게 해야할지 막막한 친구들이 많을 것이라고 생각이 들어요. 하지만 극복해내야죠 ㅎㅎ 이러한 부분들을 극복하기 위해서는 처음 문제를 접근할 때 어느 부분을 포인트로 잡아서 시작할지, 여러 조건들 중 내가 이미 알고 있는 표현들이나 익숙한 표현의 변형들은 없는지 등을 빠르게 파악하는 것이 중요한 것 같아요. 이 교재의 해설은 그러한 측면들을 수험생들의 시선에서 아주 적절하게 제시합니다. 교재에 수록되어 있는 문제들은 기출 고난도의 단순한 변형 문제가 아니라 다른 개념들과 접목시키거나 익숙하지 않은 새로운 표현들을 잘 담았다는 생각이 듭니다. 기출 문제들에서 나온 필수 개념들을 충분히 숙지하고 학습한 후 관련 내용에 대한 추가적인 심화학습을 하고 싶거나 새로운 문제들을 통해 고난도 문제에 대한 훈련을 하고 싶은 많은 수험생 여러분들에게 강력하게 추천할 만한 좋은 문제들이라고 생각합니다.

이 책을 검토하면서 수학 공부에 대하여 여러 생각이 들었어요. 특히 수능 고난도 문제들에 나오는 조건들이나 문제 상황들은 확실하게 알고 있는 상황이라기 보다는 어디선가 비슷한 것을 본 듯한 애매한 느낌이거나 완전히 새로울 수도 있을 것 같아요. 이런 상황이 이번 수능에서도 여러분 앞에 펼쳐질 것이고 그런 상황들을 이겨내기 위해서는 가능한 한 다양한 표현들을 접해보고 그것들의 의미를 풀어내는 연습이 핵심이라고 생각합니다. 시험장에서 아는 표현들이 나오면 당연히 좋겠지만 아닐 경우에는 스스로 이겨낼 힘을 길러야 하니까요. 규토 고득점 N제 시리즈가 수험생 여러분들의 힘을 기르는데 도움이 되었으면 하고 잘 이겨내시길 응원하겠습니다.

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 요즈음 날씨를 보면, 봄은 이미 가고 여름을 맞이하는 기분입니다. 너무나 빠르게 계절이 지나가는 만큼이나, 훌쩍 앞으로 다가온 6평이 입시의 시작을 알리는 것 같아요.

규토 고득점 미적분의 가장 큰 장점을 꼽자면, 문제가 어떤 의도로 출제되었는지 해설에 고스란히 담겨 있다는 것입니다. 미적분의 어려움은 단순히 미분하고, 적분하는 것에 있는 것이 아닙니다. 문제에 접근하고, 미분과 적분을 어떻게 활용할 지 파악하는 데에 어려움이 있습니다. 그렇기에 문제의 출제 의도와 출제자가 전달하고 싶은 메시지를 그대로 전달받는 것이 학생 여러분들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다. 규토 고득점 미적분에 담긴 모든 내용을, 가볍게 넘기지 않고 모두 가져가실 수 있으시면 좋겠습니다.

더워지는 계절입니다. 더위를 이겨낼 만큼이나 뜨거운 여러분들의 열정이, 올해 무엇보다 값진 결실을 맺기를 기원합니다. 감사합니다.

문지유 / 울산대학교 의학과

규토 고득점 N제 문제집을 검토하며 처음부터 끝까지 느낀 것은 이 문제집을 학생들에 대한 무수한 애정을 가지고 만들었는지에 대한 감탄이었습니다. 구어체로 과외를 받는다고 느끼게끔 해설이 써져 있는 수학 문제집은 살면서 규토 N제가 처음이었어요. 문제도 사설 고득점 N제임에도 불구하고 터무니 없이 어렵게 꼬아서 낸 느낌이 전혀 없고, 깔끔한 case 분류 문제 위주로 구성되어 있어서 검토하는 내내 제가 고등학생 때 이 문제집을 알았더라면 참 좋았겠다는 생각이 끊이질 않았답니다.

계절이 또 하나 지나갑니다. 무더운 여름이 가고, 날씨가 쌀쌀해지면 이제 수능이 다가옴을 몸과 마음으로, 피부로 느낄 거예요. 규토 고득점 N제로 실력도 다지고, 실수하지 마시고, 검토 꼭 하시고! (그러려면 자신이 어떻게 푼 건지 한눈에 보기 좋게 풀이를 잘 정리해서 써내려가는 연습도 필요하겠죠?) 수능 날까지, 그리고 수능이 끝나는 오후까지! 끝까지 잘 버텨내서 좋은 결과, 본인이 바라는 결과 얻기를 간절히 바랍니다. 조금만 더 힘내세요! 파이팅~!! :D

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 고득점 N제는 2016년에 처음 출판되어서 올해로 8년 차인 N제입니다. 꽤 오랜 기간 동안 많은 학생들에게 선택을 받았으니 문제의 퀄리티는 이미 보장되어 있다고 생각합니다. 특히 아직 평가원이 출제하지 않은 소재들로 구성된 Case 분류 문제가 상당히 많습니다. Case 분류 문제가 어렵고 막막하다고 느낀다면 규토 고득점 N제로 많은 연습을 할 수 있습니다.

규토 시리즈의 큰 장점 중 하나는 해설이 친절하고 자세하다는 것입니다. 규토 고득점 N제에서는 해설이 구어체로 서술되어 있어서 딱딱하고 불친절한 해설에서 벗어나 재밌게 해설을 읽으면서 공부할 수 있습니다. 문제를 풀고 해설은 크게 참고하지 않는 학생들도 규토 시리즈는 꼭 해설을 읽어보면서 공부하는 걸 추천드립니다. 라이트 N제부터 한 줄기로 이어지는 저자의 일관된 풀이 방법을 따라가면 수학 실력 향상에 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

마지막으로 규토 100% 공부법을 참고하면서 규토 고득점 N제를 공부하면 좋을 것 같습니다. 사람마다 생각이 다른 부분이지만 저도 규토 100% 공부법처럼 하나의 N제를 여러번 풀어보면서 틀린 문제에 대한 피드백을 확실하게 해야 한다고 생각하는데요. 다소 과할 정도로 틀린 문제를 여러번 풀어봐야 그 문제에 대한 모든 개념과 스킬을 얻어갈 수 있다고 생각합니다. 규토 고득점 N제로 공부하는 학생들 모두 수능에서 좋은 결과가 있기를 진심으로 바라겠습니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 라이트 N제에 이어 고득점N제도 검토하게 되었습니다. 라이트 N제는 개념설명과 쉬운 문제부터 어려운 문제들이 모두 있는 종합서라면 고득점 N제는 고퀄리티 자작 준킬러, 킬러 문제들만 수록된 도약서입니다. 준킬러, 킬러 문제에서 요구하는 문제 풀이 사고를 과외처럼 친절하게 알려주고 이러한 문제들을 풀 때 가져야할 올바른 마음가짐도 알려줍니다. 저의 수능 수학을 책임져준 만큼 이 책을 보는 모든 수험생들도 많은 도움이 되면 좋겠습니다! 화이팅입니다!

규토의 생각

규토 N제를 구매하신 수험생 여러분 모두 반갑습니다. ~ :D

앞의 오리엔테이션에서는 형식적인 “틀” 안에서 이야기를 했다면 이번에는 여러분과 편하고 자유롭게 이야기 해보려고 합니다~

편하게 질문을 받아볼까요~ 오! 저기 빨간 옷 입은 귀여운 여학생 말해보세요!

Q. 규토 고득점 N제 2024 미적분의 난이도가 어떻게 되나요?

사람마다 느끼는 난이도가 다르겠지만 최대한 객관적으로 말씀드릴게요ㅎㅎ

미적분 : 준킬러와 킬러의 비율은 1 : 2이고 할만한 킬러도 있지만 뒷부분의 킬러(모래주머니 효과)들은 어렵습니다.
킬러의 경우 2019학년도 수능 수학 가형 30번 정도 난이도에서 + − 라고 생각하시면 됩니다.
수험생 마인드로 다시 풀어보면서 느낀 점은 문제가 참 잘 뽑혔다는 것입니다. 자기 PR 죄송합니다...
(근데 진짜 좋은걸 어떡하죠? ㅋ.ㅋ) 대체적으로 난이도 순으로 배열하였습니다.

답변이 되셨나요? ㅎㅎ 또 없으신가요~ 저쪽 안경 쓴 남학생! 말해보세요~

Q. 기출은 어느 정도 풀고 문제집을 사야하나요?

꼭 기출문제를 체화시키고 보셨으면 좋겠어요. 기출문제를 보자마자 풀이과정이 떠오를 정도 일 때 푸시는 것을 권장합니다. 규토 N제 해설에서 복습으로 추천 드린 기출문제가 문제를 풀 당시 떠올랐다면 더할 나위 없이 좋겠죠? ㅎㅎ 최소 1등급 초반 (+기출완료) 또는 라이트 N제를 완벽 체화가 고득점N제 미적분을 풀 전제조건입니다.
그리고 만약 자신이 안정적인 1등급이 나온다면 시간을 재고 푸는 것도 방법이 될 수 있습니다. (킬러의 경우 10~15분 정도 잡고 풀어보세요~)
고득점 N제 미적분은 라이트 N제와 밀접하게 연계하여 설명하였습니다. (고득점 N제 미적분 해설에 같이 보면 좋은 라이트 N제 참고 문항과 관련 개념페이지 수록)

만약 미적분 만점이 목표가 아니라면 개인적으로는 고득점 N제 미적분 보다는 라이트 N제 미적분을 보시는 것이
현재 문제 트렌드를 봤을 때, 훨씬 더 도움이 될 것이라 생각합니다. 라이트 N제 미적분 t1난이도가 수1수2에 비해 다소 높기 때문에 N제 느낌으로 보셔도 좋습니다. 마스터스텝에 과거 가형 기출킬러도 대거 수록했기 때문에 결코 쉽지 않습니다.

또 다른 분 계시나요~ 편하게 질문하세요~ 저기 박보영 닮으신 여학생! 말해보세요~

Q. 어떤 식으로 규토 N제를 공부를 해야할까요?

책에 규토 N제 100% 공부법이라고 적어놨어요.(앞에서 봤죠??ㅎ) 효과를 극대화하기 위해서 꼭 그렇게 해보셨으면 합니다. 아니 꼭! 제발 그렇게 해보셨으면 합니다. 아마 대다수의 학생들이 양치기 용도로 규토 N제를 대할 것 같아요. 여러 커뮤니티를 잘 살펴보면 규토 N제 0일 컷 가능? 이라는 말을 종종 볼 수 있는데요. 이건 정말 미친 짓이라고 생각해요. 문제만 풀면 정말 아무것도 남지 않습니다. 아 뭔가를 해냈구나! 라고 다소 기분만 좋을 뿐입니다. 시간이 지나면 어차피 기억나지도 않습니다. 바가지에 구멍 뚫어 놓고 물을 들이 부어보세요. 처음에는 막 넘칠 것처럼 보이지만 시간이 지나면 한 방울도 남지 않습니다. 복습도 열심히 하고 치열하게 고민(자기 스스로 논리력과 사고력을 자극해야 합니다)해야 질적 성장이 일어난다고 생각합니다. 규토N제 100%공부법에 적혀있는 대로 하시는 것이 best입니다. :D

아주 참여도가 좋네요 ㅎㅎ 저쪽에 N수의 포스를 뿜고 계신 아저씨(?!) 장난이고요. 남학생 말해보세요~

Q. 규토 N제 문항의 성격이 궁금합니다!

많은 분들이 오해하고 계시는 부분이 있는 것 같습니다. 규토 N제도 강의 교재입니다. 다만 다른 강의 교재와는 다르게 제가 책 속에 있을 뿐이죠. 그래서 해설편이 문제편보다 3.5배나 더 두껍습니다.
모든 문항들은 제자들을 위해서 만든 문제들입니다. 만들 당시에도 "현실성을 추구해서 모의고사 스타일로 만들어야지!" 라는 생각은 1도 하지 않았습니다. 그런 문제집들은 시중에 많으니까요. "어떻게 하면 한 문제를 풀면서 그동안 배웠던 스킬들과 교과개념들을 복습할 수 있게 만들지? 그리고 수능이 요구하는 사고력과 논리력을 향상시킬 수 있는 방법이 없을까?"를 고민한 끝에 만들게 되었습니다. 그렇기에 시중문제들과 달리 2~3개의 연결관계가 아닌 4~5개의 연결관계(+모래주머니 효과)를 풀어내도록 제작하였습니다. **(다만 2021개정 이후부터는 기존문제 중 퀄리티가 떨어지거나 case가 지나치게 과도한 문항은 삭제시켰고 추가된 신규문항들은 최신 트랜드를 적극 반영하여 최대한 현실성 있게 제작하였습니다.)** 애초에 책 소개에도 써있지만 출판하고자 만든 문제들이 아니기 때문입니다. 그렇기에 문제만 풀고 마는 식, 다시 말해 양치기로만 문제집을 대하는 것은 절대 추천하지 않습니다. 양치기 하려면 다른 문제집을 알아보세요.
규토 N제는 해설을 완전히 정독하고 자기 것으로 만들어야지 규토를 풀었다고 말할 수 있습니다. 애초에 강의교재로 만든 것이니까요. 일종에 분석서? 같은 개념으로 보시면 될 것 같습니다. 제가 직접 만들었기 때문에 출제의도가 무엇이고 그 문제에 사용된 중요한 개념들, 같이 풀어보면 좋을 것 같은 기출문제, 코멘트 등이 자세히 수록되어 있습니다. ㅎㅎ또한 구어체로 만들었기 때문에 해설을 읽다보면 제가 말하는 소리가 들리도록 만들었습니다. 그래서 해설지라고 하지 않고 해설강의라고 명명하였습니다. :D

자 마지막 한 분만 더 받을게요~ 저기 회색 후드티 입고 있는 남학생 ! 말해보세요

Q. 오늘 배송을 받았습니다. 풀어봤는데 수학2가 많이 어려워요. 괜찮을까요?

잘 안 풀리시는 것이 정상입니다 ㅎㅎ 그만큼 많이 성장할 수 있다는 것이니 너무 상심하지 마세요~ 최대한 100퍼센트 공부법에 적힌 대로 해보세요. 보통 문제들과는 다르게 한 문제씩 풀어보고 해설에서 배운 내용들을 다른 문제에 적용시켜보세요.(한 번에 여러 문제들을 풀고 한꺼번에 해설을 보시지 마세요.) 그냥 문제만 풀면 아무것도 남지 않아요. 그 문제를 완벽히 체화시키고 넘어가는 것이 좋습니다. 난이도 순서대로 배치했기 때문에 점진적으로 사고를 확장하실 수 있습니다. 그러니 너무 겁먹지 마세요 ㅎㅎ 규토 N제에 있는 문항들은 보통문제(2~3개의 연결관계)와는 다르게 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. 운동선수들이 모래주머니를 차고 훈련하는 것과 마찬가지 효과를 얻도록 만들었습니다. (지금은 어려우실 수 있지만 나중에 체화하시고 시중 문제들을 보시면 답이 너무 그냥 딱 나온다는 인상을 받게 되실 거예요. ㅎㅎ)
그리고 모든 문제들이 손쉽게 풀리면 그게 무슨 도움이 되겠습니까.. 기분은 좋을 수 있겠죠.. 그렇지만 틀린 것을 정복할 때! 바로 그때 질적 성장이 일어난다고 생각해요~ 해설도 자세히 써놨으니까(진짜 옆에 앉혀놓고 과외해 준다는 생각으로 작성했습니다. 흐흐) 이해하시는데 큰 무리는 없을 거예요 ㅎㅎ 화이팅입니다! 너무 기죽지마세요 그게 정상입니다. 양보단 질로 갑시다. 빨리 문제집을 끝내야지 보다는 (진짜 그건 미친 짓이라고 생각해요.. 한 번 보고 넘어가면 누누이 얘기하지만 딱히 도움이 되지 않습니다. 약간의 뿌듯함만 있을 뿐이에요.) 질적 성장이 일어날 수 있도록 치열히 고민해보고 복습도 하고 (100퍼센트공부법으로 하시는게 베스트입니다. 저도 그렇게 공부했었고 많은 과외학생들의 성장을 눈으로 봤습니다.) 그러셨으면 좋겠어요 ㅎㅎ

많은 학생들을 만나 보았는데요. ㅎㅎ 또 다른 궁금한 점(규토 N제 문제 질문 등)이 또 있으시면
언제든지 **규토의 가능세계** (네이버 질문카페)에 글을 남겨주세요~

〈 맺음말 〉

지금으로부터 19년 전 중학교 2학년이었던 규토는 “버킷리스트”라는 것을 작성하게 됩니다.
많은 항목들이 있었지만 그 중에서 가장 기억에 남는 것은 바로 저 만의 책을 만드는 것이었습니다.
그로부터 12년 후 규토 수학 고득점 N제를 발간하게 됩니다.
첫 책을 받았을 때의 감동... 아직도 잊을 수가 없네요..ㅠㅠ

벌써 6년이라는 세월이 흘렀네요.

규토 수학 고득점 N제 2017 ⇒규토 수학 고득점 N제 2019 ⇒ 규토 수학 고득점 N제 2020 (가/나)

⇒ 규토 수학 라이트 N제 2021 (수1/ 수2) + 고득점 N제 2021 (가/나)
⇒ 규토 라이트 N제 2022 (수1/수2/확통/미적), 고득점 N제 2022 (수1+수2/미적)
⇒ 규토 라이트 N제 2023 (수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2023 (수1+수2/미적)

올해 나오게 될 규토 라이트 N제 2024 (수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2024 (수1+수2/미적), 규토 모의고사까지 아주 감개무량하네요. ㅎㅎ

계속해서 발전해 나가는 규토 N제가 되겠습니다! 내년 개정판은 더 더욱 좋아지겠죠?-_-;;

2021년부터 네이버 카페 (규토의 가능세계)를 통해 질문을 받고 있습니다~
https://cafe.Naver.com/gyutomath

많은 가입부탁드립니다 :D

질문뿐만 아니라 각종 자료도 업로드하면서
차츰차츰 업그레이드 해나가겠습니다~ㅎㅎ

규토 N제를 푸시는 모든 분들께 감사의 인사를 전하면서 저는 해설로 찾아뵐게요~ :D

참고로

① 네이버 블로그 (규토의 특별한 수학) 이웃추가
② 오르비에서 (닉네임 : 규토) 팔로우
③ 네이버 카페 (규토의 가능세계) 가입

하시면 규토 N제에 대한 최신 소식(정오표 or 보충자료 등)을 누구보다 빠르게 받아 보실 수 있습니다~

규토
고득점
N제

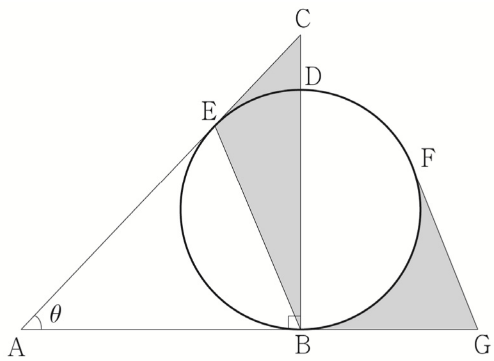
문제편

미적분 영역

005

정답 및 해설 p.022

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 선분 BD를 지름으로 하는 원이 선분 AC에 접하고, 그 접점을 E라 하자. 원의 중심과 점 A를 이은 직선이 원과 만나는 두 점 중 A와 더 먼 점을 F라 하자. 점 F에서의 접선이 직선 AB와 만나는 점을 G라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 삼각형 BCE의 넓이를 $S(\theta)$, 두 선분 BG, FG와 호 BF로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta \times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값은?



① $2-\frac{\pi}{6}$ ② $2-\frac{\pi}{4}$ ③ $2-\frac{\pi}{2}$

④ $1-\frac{\pi}{6}$ ⑤ $1-\frac{\pi}{4}$

012

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 에 대하여 함수 $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx = \frac{a}{\pi}+b$ 이다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)

정답 및 해설 p.045

054

실수 $t\,(0<t<8)$와 함수 $f(x)=4\,|x^2+x\,|$에 대하여
집합 S는

$$S=\left\{x\mid f(\cos x)=t,\ 0<x<\frac{9}{2}\pi\right\}$$

이다. S의 모든 원소들의 합을 $g(t)$라 하자. 상수 $a, b\,(b\neq 0)$에 대하여
함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

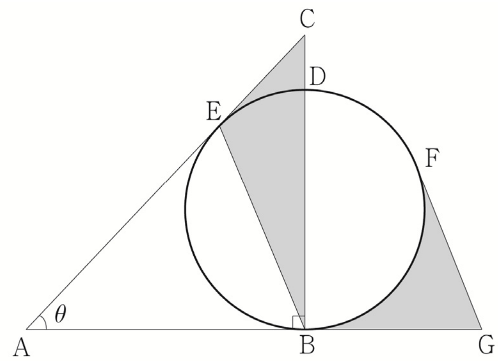
$$\boxed{g(a)+\lim_{t\to a-}g(t)=b\pi+\lim_{t\to a+}2g(t)}$$

$\dfrac{1}{\left\{g'\left(\dfrac{ab}{8}\right)\right\}^2}$의 값을 구하시오.

정답 및 해설 p.171

005

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 선분 BD를 지름으로 하는 원이 선분 AC에 접하고, 그 접점을 E라 하자. 원의 중심과 점 A를 이은 직선이 원과 만나는 두 점 중 A와 더 먼 점을 F라 하자. 점 F에서의 접선이 직선 AB와 만나는 점을 G라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 삼각형 BCE의 넓이를 $S(\theta)$, 두 선분 BG, FG와 호 BF로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값은?



① $2-\frac{\pi}{6}$ ② $2-\frac{\pi}{4}$ ③ $2-\frac{\pi}{2}$

④ $1-\frac{\pi}{6}$ ⑤ $1-\frac{\pi}{4}$

| 출제의도 |

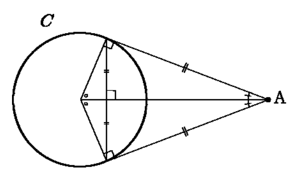
① $T(\theta)$를 θ로 표현할 수 있는가?
② $S(\theta)$를 θ로 표현할 수 있는가?
③ $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\times T(\theta)}{S(\theta)}$ 를 구할 수 있는가?

해설강의

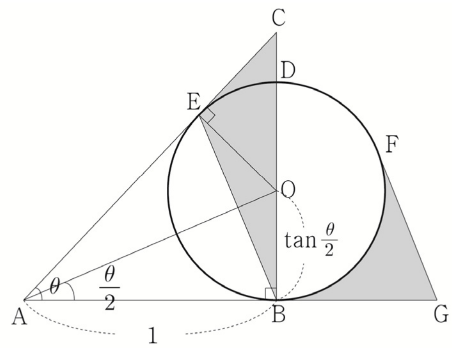
1)이런 문제들은 보조선이 생명이죠? ㅎㅎ
접점이 E이니 수직보조선을 그리고 $S(\theta)$를 구해봅시다~

1)
원의 중심과 접점을 이은 수직보조선은 문제를 풀어나가는 key point일 때가 많습니다.
즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나입니다~

아래 그림과 같이 점 A에서 원 C에 접선을 그었을 때, 그어야 하는 보조선은 다음과 같습니다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억합시다~

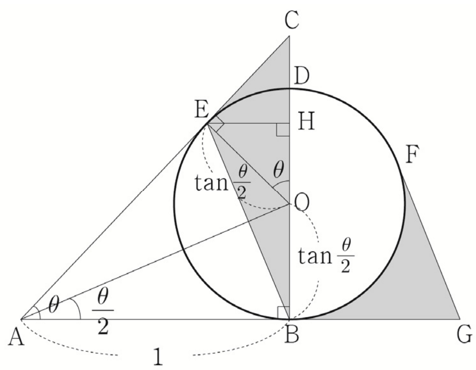


원의 중심을 O라 하면 $\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\theta}{2}$이니

$\overline{\mathrm{OB}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$가 되겠군요~

$S(\theta)$를 찾기 위해서 밑변을 $\overline{\mathrm{CB}}$라 해봅시다~

삼각형 ABC에서 [2] $\overline{\mathrm{CB}}=\tan\theta$이겠죠?

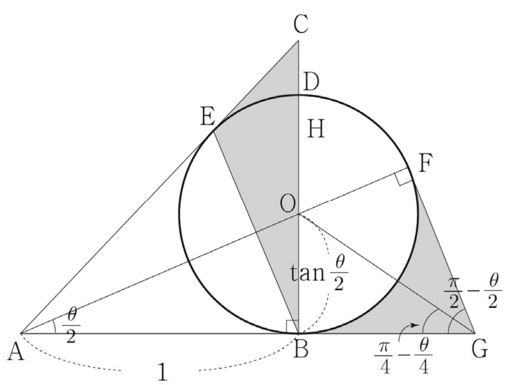


[3]이제 높이만 구해주면 되겠죠?

점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{EH}}=\tan\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$이므로 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\tan\theta\times\tan\dfrac{\theta}{2}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\tan\theta\tan\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$

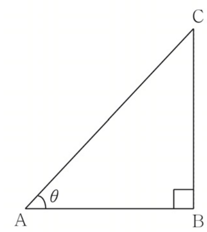
접점이 F이니 마찬가지로 수직보조선을 그어 $T(\theta)$를 구해봅시다~



$T(\theta)$는 사각형 BOFG의 넓이에서 부채꼴 OBF의 넓이를 빼서 구하면 되겠죠?

$\angle \mathrm{AGF}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \angle \mathrm{BGO}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{4}$

2)



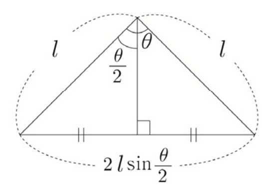
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos\theta$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\tan\theta$

빠르게 문제를 풀기 위해서
기억해주세요~

3)



위 그림을 꼭 기억하세요~
이등변삼각형만 보면 바로
$2l\sin\dfrac{\theta}{2}$를 쓸 수 있어야 해요..
특히 원이 나오면
Thank you 겠죠?
중심과 원 위의 두 점을
이으면 천지가 이등변
삼각형이니까요~

다시 문제로 돌아가서

$\angle \mathrm{ABE}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

이므로 $\angle \mathrm{EBC}=\dfrac{\theta}{2}$

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

로 구할 수도 있겠죠?
여기서 $\overline{\mathrm{BE}}$를 구할 때
적용시키면

$\overline{\mathrm{BE}}=2\times1\times\sin\dfrac{\theta}{2}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

이므로 $S(\theta)=\sin^2\dfrac{\theta}{2}\tan\theta$

가 되겠군요~

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\overline{BG}} \Rightarrow \overline{BG}=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

사각형 BOFG의 넓이는 삼각형 BOG의 넓이의 2배이므로

$$\text{사각형 BOFG의 넓이}=\frac{1}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}\times 2=\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

$\angle BOF=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$이므로

부채꼴 OBF의 넓이$=\frac{1}{2}\times\tan^2\frac{\theta}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$가 되겠죠?

즉, $T(\theta)=\dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}-\tan^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)=\tan^2\frac{\theta}{2}\left\{\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right\}$

마무리 계산해봅시다~~

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\tan^2\frac{\theta}{2}\left\{\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right\}}{\frac{1}{2}\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right\}=1-\frac{\pi}{4}$$

답 ⑤ $1-\frac{\pi}{4}$

출제자의 한마디

아주 전형적인 삼각함수 도형극한 문제였죠?ㅎㅎ 특히 이번 문제는 보조선을 잘 그어야 하는 문제입니다. 보충설명 1)에서 알려드린 그림을 반드시 기억해주세요~ 조금만 도형이 바뀌어도 새롭게 느껴지실 수 있으니까 집중해야 합니다. point는 접점과 중심 보조선(수직)이에요. 꼭 기억하세요~!

보충설명 3)에서 알려드린 $2l\sin\frac{\theta}{2}$도 챙겨갑시다!

(2024 라이트 N제 미적분에서도 학습했었죠?ㅎ 해설편 p123 059번 tip 참고)

대표적인 예제로 [4]2010학년도 6월 평가원 가형 30번에 적용해보세요~

4) <참고>
2024 라이트 N제 미적분 문제편 p181 132번

012

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 에 대하여 함수 $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 할 때, $\int_{-5}^{5} |f(x)-g(x)|\,dx = \frac{a}{\pi}+b$ 이다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)

| 출제의도 |

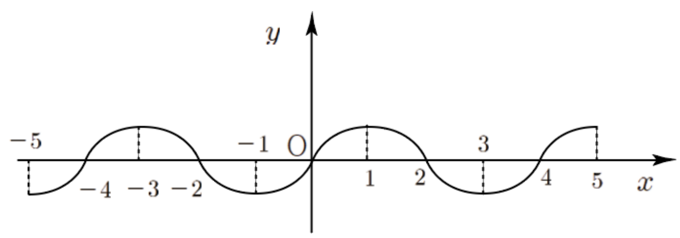
① $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그릴 수 있는가?

② $\int_{-5}^{5} |f(x)-g(x)|\,dx$ 가 의미하는 것을 reading할 수 있는가?

③ 대칭성을 이용해서 넓이 구하기

해설강의

먼저 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 의 그래프를 그려봅시다~



$\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 를 파악하기 위해서 New함수 Technique을 써봅시다~

$F(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 라 하고 양변을 미분하면

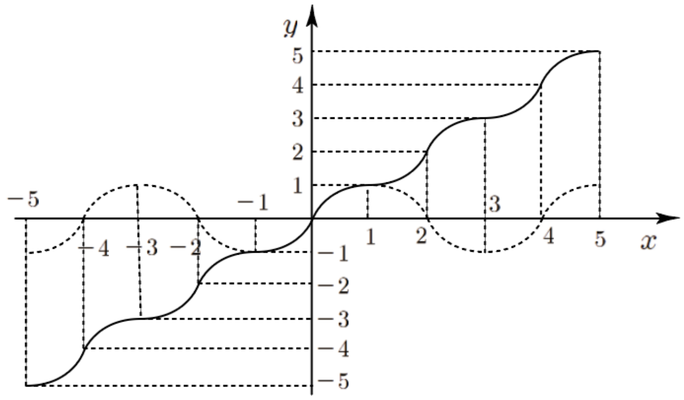
$F'(x)=|f'(x)|$ 가 되겠군요. $f'(x)$ 의 부호에 따라 달라지니까 case분류하면

$f'(x)>0 \Rightarrow F'(x)=f'(x) \Rightarrow F(x)=f(x)+c_1$

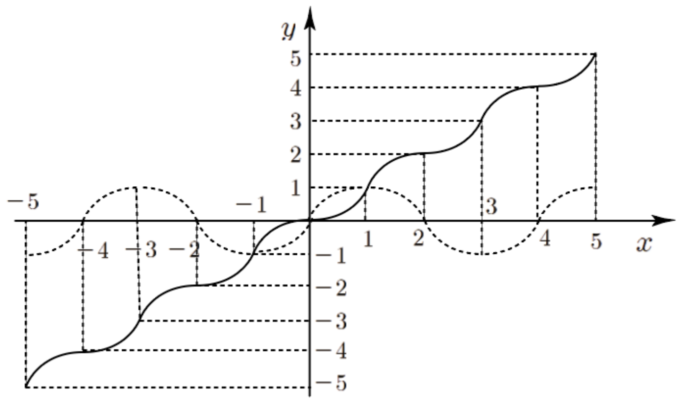
$f'(x)<0 \Rightarrow F'(x)=-f'(x) \Rightarrow F(x)=-f(x)+c_2$

$F(0)=0$에서 출발하여, $F(x)$가 연속함수가 되도록 $f(x)$가 증가하는 범위에서는 $f(x)$를 적당히 y축 방향으로 평행이동한 것을, $f(x)$가 감소하는 범위에서는 $-f(x)$ ($f(x)$를 x축 대칭 시킨 것)을 적당히 y축 방향으로 평행이동한 것을 이어붙이면 되겠군요!

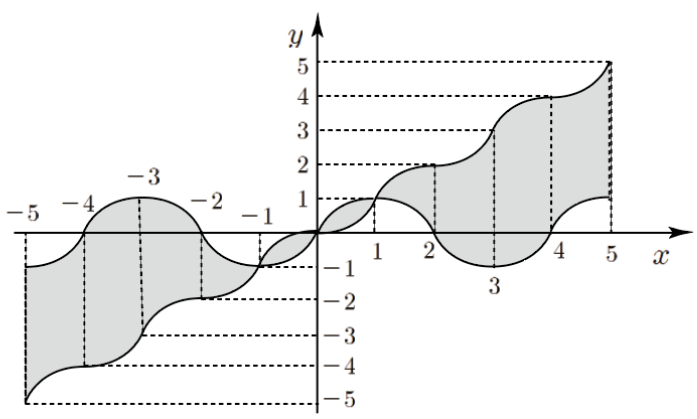
이제 $F(0)=0$ 인 것을 감안하여 $F(x)=\int_{0}^{x}|f'(t)|\,dt$ 를 그려봅시다~



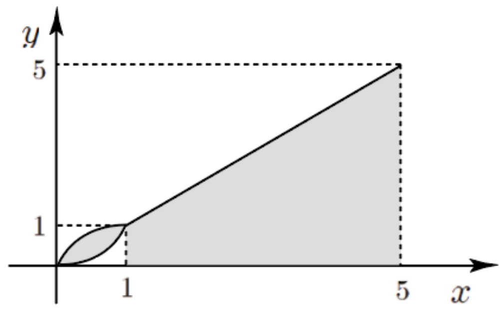
$F(x)$ 의 역함수 $g(x)$는 $y=x$ 대칭만 시켜주면 되겠죠?



$\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 사이의 넓이를 나타내는 식이니까 구하는 부분의 넓이는 색칠한 부분이 되겠죠?



대칭되어 있으니까 양수인 부분만 구해서 $\times 2$를 해주면 되겠군요.
sin 함수 그래프도 대칭성을 가지므로 2에서 4사이의 넓이를 양쪽으로 붙여주고
$F(x)$ 와 $g(x)$ 가 $y=x$ 대칭임을 이용해서 넓이를 간단히 해봅시다~



따라서 양수에서의 넓이는

$2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x\right)dx+12$ (사다리꼴 넓이) 겠죠?

$2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x\right)dx=\frac{4}{\pi}-1$ 이니까 $\frac{4}{\pi}+11$!!

음수에서의 넓이는 양수에서의 넓이랑 같으니까 곱하기 2하면 답이겠군요~

$\therefore\ \frac{8}{\pi}+22$

답 30

출제자의 한마디

이 문제의 핵심은 $\int_0^x|f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그리는 것이에요~ 처음이니까 case분류해서 그림을 그렸지만 이제는 $f(x)$ 만 보고도 그림을 그릴 수 있어야 해요. ([1]라이트 N제 수학2에서 배웠던 적이 있었죠?ㅎ)
추후에도 $\int_0^x|f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그려서 푸는 문제들이 있습니다ㅎㅎ
이번에 완벽히 익혀서 나중에 나오는 문제에 적용시켜 보세요~
대칭성을 이용한 넓이 찾기는 매번 나오는 사골 소재죠? ㅎㅎ

1) <참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편
p269 059번
p282 112번
p288 132번

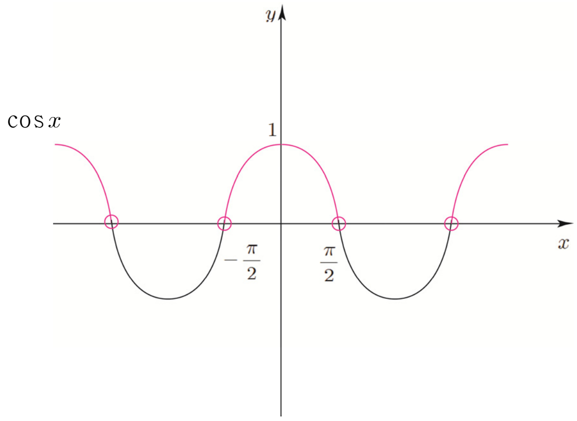
모든 실수 x 에 대하여 $-2 \le g(x)+g(-x)<0$ 라고 했으니
$g(x)$ 와 $g(-x)$ 를 구해서 더해봅시다~

$g(x)=\sin\{h(x)\}-\cos\{h(x)\}$

$g(-x)=\sin\{h(-x)\}-\cos\{h(-x)\}=-\sin\{h(x)\}-\cos\{h(x)\}$

$g(x)+g(-x)=-2\cos\{h(x)\}$ 이니까

모든 실수 x 에 대하여 $0<\cos\{h(x)\}\le 1$ 이겠군요~



$h(x)$ 의 치역은 $-\frac{k\pi}{20}<h(x)<\frac{k\pi}{20}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$0<\cos\{h(x)\}\le 1$ 를 만족하기 위해서는 $\frac{k\pi}{20} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \le 10$ 가 되어야겠죠?

(이런 문제의 유형은 경계가 중요한데 $\frac{k\pi}{20}=\frac{\pi}{2}$ 가 들어가냐 안들어가냐에 따라 답이냐 오답이냐가 달라지겠죠~ 항상 조심히 경계를 파악하는 습관을 가집시다ㅎ)

$g(x)=\sin\{h(x)\}-\cos\{h(x)\}$

$g'(x)=h'(x)\cos\{h(x)\}+h'(x)\sin\{h(x)\}$

$g(x)g'(x)=h'(x)(\sin\{h(x)\}-\cos\{h(x)\})(\sin\{h(x)\}+\cos\{h(x)\})=0$

$h'(x)=0,\ h(x)=\pm\frac{\pi}{4}$ 인지만 따지면 되겠군요~

$\frac{\pi}{4}$ 의 포함여부에 따라 case분류 해봅시다~ $\left(-\frac{k\pi}{20}<h(x)<\frac{k\pi}{20}\right)$

① $1 \le k \le 5$ 일 때 $h'(x)=0$ 을 만족시키는 $x=\pm 1$ 총 2개밖에 없겠죠?

② $6 \le k \le 10$ 일 때 $h'(x)=0$ 을 만족시키는 $x=\pm 1$ 과 $h(x)=\pm\frac{\pi}{4}$ 을 만족시키는 x 값이 각각 1개씩 있으니까 총 4개겠죠????????????????

왜 물음표가 많냐고요? 한걸음 더 나아가 봅시다!
이대로 끝내면 규토N제가 아니겠죠? ㅎㅎ

문제에서 서로 다른 실근의 개수라고 했어요. 만약 $h(x)=\pm\frac{\pi}{4}$ 를 만족시키는 x 값이 ± 1 이라면? 이야기가 달라지겠죠?

$k=10$ 일 때는 $h(1)=\frac{\pi}{4}$, $h(-1)=-\frac{\pi}{4}$ 가 되기 때문에 총 2개가 되겠죠? ㅎ

따라서 총합을 구하면 $\sum_{k=1}^{10} a_k=(2\times 5)+(4\times 4)+2=28$ 가 되겠군요~~

답 28

출제자의 한마디

$\int_0^x |f'(t)|\,dt=h(x)$ 라 두고 신속하게 그림을 그려보셨나요? ㅎㅎ 이번 문제에서는 $h(x)$ 가 기함수라는 것을 파악하여 적용할 수 있는지를 물어보고 싶었습니다.
아마 많은 분들이 답을 30이라고 적으셨을 것 같아요.
틀리셔도 괜찮습니다 ㅎ
"규토쌤,, 저는 처음부터 따질 때 $h(1)=\frac{\pi}{4}$, $h(-1)=-\frac{\pi}{4}$ 이 되는 부분을 고려하고 있었습니다!!" 크...여윽시 멋지시군요. ㅎㅎ
[1]2018학년도 사관학교 수학 가형 30번 문제에서 이번 문제와 같이 조심해야 할 부분을 찾아보세요~

1) <참고>
2024 라이트 N제 미적분
문제편 p293 119번