9모분석서

설문철의 9평박스

Team SEOL:NAME

Representatively Analysed by

K.M. Lee

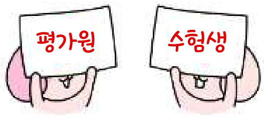
S.W. Kim

LIVE 설문철 9평 블랙박스 분석

돌아온 9평 분석서... 자, 평가원과 당신의 과실 비율은 어떻게 될 것인가...

칼럼 작성자
김상우 서울대 수학교육과 23
이경민 서울대 수학교육과 23

이번 시험! 분명 시험은 쉬웠는데... 망했니??



4 : 6

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 아니, 이것저것 내지 말라고 하니까 우리 입장에서는 변별력을 갖추기 위해 새로운 시도를 할 수 밖에 없었다구요.
수험생 그럼 제 점수는 왜 이 꼴이 난 거죠?
평가원 당연히 계산량이 많았으니까 계산에 약하신 분이었다면 점수가 그렇게 나오는 게 당연하죠.
수험생 말만 하면 누가 믿어요. 증거를 가져오세요!

확인해보겠습니다. 점수가 낮은 것은 계산 때문이다..?

EBS 10번 해설

$$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$$
$$3-(-29-16a)=3(32+8a)$$
$$32+16a=96+24a,\ \ 8a=-64$$

EBS 21번 해설

$$\sum_{k=1}^{7} S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$ 에서
$a+2d=23$ …… ㉠

뭐, 증거 더 없어도 되겠죠? 이 문제 외에도 전반적으로 계산이 빡빡했던 시험이었습니다.
평가원의 의도, 여기서 어떻게 느껴야 할까요?

첫 번째, 평가원은 변별을 해야 하는 기관이다.
두 번째, 평가원은 최상위권만 변별하는 곳이 절대 아니다.
세 번째, 난이도는 줄이면서 변별을 확실히 할 수 있는 방법은 무엇일까?

답이 나왔습니다.

평가원은 이번 시험에서 **최상위권의 변별을 어느 정도 포기하는 대신, 그 아래의 2등급 이하를 확실히 변별하고자** 하였습니다. 이 기조는 수능 때도 어느 정도 이어질 거라 판단됩니다.

또한, 난이도를 줄였음에도 등급컷은 어느 정도 낮게 형성되어야 하기 때문에 **'계산량'**이라는 선택지를 택한 것입니다. 특히, 이번 시험에서 의문사하신 분들 주목! 실수해서 틀리신 분 꽤 많을 거에요.

하지만, 이제 이것이 평가원의 트렌드가 될 가능성이 높습니다. 그렇기 때문에 **실수 관리하는 방법도 스스로 구축**할 수 있어야 해요.

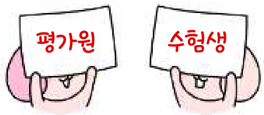
잘못한 거 알겠는데 그럼 어떻게 대비하죠?

문제를 많이 풀어보고 사설틱한 문제도 넘기지 않는 것이 중요합니다. 과거에는 계산이 더러운 문제라면 에이 '사설틱'하네 하면서 넘겼지만, 이것이 평가원이 시도하고 추구하는 바가 되었기 때문에 사설틱하다면서 넘길 수 없는 지경에 이르게 되었습니다. 특히, 계산이 복잡한 문제에서 실수하지 않는 방법에 대해 고민하셔야 할 겁니다.

예를 들어, 각 계산마다 검산하기, 문제 다 풀고 검산, 다른 방법으로 풀었을 때도 답 맞는지 검토, 몇 번 이상대 번호부터는 반드시 검산

같은 자신만의 수칙이 필요할 것으로 예상됩니다.

고1 개념을 쓰는 문제가 너무 많아요...



1 : 9

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 고1 문제는 엄연히 간접 출제 가능한 부분입니다. 이것도 내지 말라 하면 우리는 그냥 먹고 살지 말라는 건가요??
수험생 그냥 먹고 살지 않는 것도 좋을 듯
평가원 엄...

수험생의 인성이 의심되는군요. 우선, 사실 관계 먼저 파악하고 들어가겠습니다.

공통 13번

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

공통 14번 문항 조건 박스

집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

공통 22번 문항

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = xf(x)-2x^2-1$

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\displaystyle\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

풀어본 사람은 다 아시겠지만, 공통 13번은 근의 분리, 14번은 집합, 22번은 항등식의 계수 결정이었습니다.

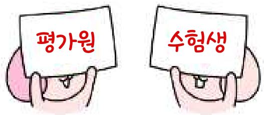
고1 개념이 상대적으로 직접적으로 쓰이기도 하고, 이 정도면 고1 문제 아니냐는 말도 들을 법 한데요. 그럼, 왜 이렇게 출제하는 걸까요?

이는 정부의 출제 압박에 따른 대응으로 보입니다. 변별을 해야 하는 요소를 고1 개념으로 이동시킨 것이죠. 수학1/2에서 변별 요소를 출제할 경우, 잘못 출제하면 교육부 압박을 더욱 크게 받을 수 있기 때문에 이에 대한 리스크를 최소화한 것으로 보입니다.

그럼 고1 개념을 다시 보는게 나을까요?

어중간하게 공부하신 분들은 쎈부터 시작해서 블랙라벨, 일품 같은 문제를 한 번쯤 다시 복습하는 것도 괜찮을 것 같습니다. 특히, 이번 시험에서 13번 틀리신 분들은 '근의 분리' 관련된 내용을 한 번 꼭 복습하시는 것이 좋을 것 같습니다. 만일 수능까지 시간이 모자르다면, 시중 문제집을 하나 정도 구매해서 자신이 그 문제집의 모든 내용을 잘 알고 있는지 정도만 체크하는 것으로 충분할 것 같습니다.

이번 수능은 어떻게 나올까요?



5 : 5

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 그걸 저희가 왜 공개해요

네, 이 부분은 저희가 직접 예측해야 하는 부분입니다. 이번 시험 특성을 볼까요?

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \le -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

> (가) $f(2) = 2$
> (나) $f(1) \times f(2) \times f(3) \times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

위의 문항들의 공통점을 찾아볼까요?
정답은 바로 **정수 또는 자연수의 성질**을 이용해야 하는 문제라는 점입니다.
수학에서는 흔히 이쪽 분야를 정수론이라고 합니다.

이번 시험도 그렇고, 6월 모의평가 때도

12. $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1}\ (n \ge 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

정수/자연수 조건을 쓰는 문제가 이렇게 출제되었습니다. 아시다시피 **6월, 9월, 수능에는 출제진이 유사하게 들어가는 경우가 많습니다.**

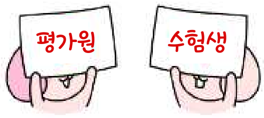
이 시험을 보면서 확신이 들었던 것은 정수론 전공하신 교수님이 들어가셨구나 하는 생각이었습니다. ~~고집 한 번 세신 분인 듯~~ 그렇다면, 수능 때도 이러한 영향이 있을 가능성이 있지 않을까 하는 생각입니다.

특히, '배수' 관련된 발문은 잘 안 나오다가 이번에 오랜만에 나왔는데, 21번과 확27번 양쪽에 **'발문' 형태로 중복**되어 나왔습니다. 과연 우연일까요?

꼭 전공 교수님이 아니더라도 2022 수능 때부터 이러한 정수와 관련된 문제는 자주 출제되어 왔습니다. **이번 시험은 이러한 자연수 조건 문제를 조금 더 집중해야 할 필요성**을 느끼게 합니다.

그 외에도 이번 9평의 경우 13~15번이 모두 **구간별로 정의된 함수와 관련한 문항이 나온 것** 등 여러 가지로 특징적인 부분이 많은 시험입니다. 이 부분도 잘 공부해두는 것이 좋습니다.

이번 수능 난이도 예측 가능한가요?



8 : 2

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

수험생 이번 수능은 어떻게 내실 계획인가요?
평가원 변별력을 갖추고 교과서만 읽더라도 풀 수 있도록 낼 방침입니다.
수험생 그래서 난이도 어려워요 쉬워요… 그것만…
평가원 변별력을 갖추고 교과서만 읽더라도 풀 수 있도록 낼 방침입니다.

수능 난이도는 객관적으로 보았을 때 예측이 어렵습니다.
하지만 분명한 건 하나 있죠.

뭐가 분명할까요?

이번 6평 1컷이 약 80점(미적분)이었고, 이번 9평도 정확하게는 집계가 안 되어 있지만 88점(미적분) 정도로 예견되고 있습니다. **평가원이 6평과 9평을 통해서 난이도를 조절한다는 것**은 누구나 다 알고 있는 사실입니다.

그럼 이번 수능은 6/9의 중간인 84점(미적분) 정도 등급컷으로 내면 딱 좋지 않을까요? **무엇보다도 이번 9평이 전반적으로 여론에서도 쉽다는 말이 많이 나와서 난이도가 올라갈 것은 어느 정도 예견되는데, 그렇다고 킬러는 못 넣으니 어느 정도 1등급 선이 정해지지 않을까요?**

물론 대놓고 뒤통수를 친다면 정말 쉽게 나올 수도, 또는 정말 어렵게 나올 수도 있습니다. 하지만 지금 상황으로만 보았을 때는 이번 수능은 84점(미적분) 정도의 등급컷이 형성될 것으로 생각합니다.

또한, 6평과 9평의 출제에 따라 평가원은 어떤 사실을 깨달았을까요?

6월 모의평가와 9월 모의평가의 공통점

1) 킬러 문항을 출제하지 않았다

⇒ 킬러를 출제하지 않았음에도 불구하고 등급컷은 너무 높아지지도, 또는 너무 낮아지지도 않았다. 그렇다면 평가원은 이번 수능 때도 킬러를 출제하지 않을 것이다. 굳이 교육부의 방침을 무시해서 리스크를 부담할 필요가 없으니까.

2) 고1 소재 문항을 많이 출제하였다.

⇒ 오히려 고1 소재를 끌고 오니 변별이 더 잘 되는 모습을 보았다. 수험생들이 고등학교 전반동안 공부를 잘 했는지 평가한다는 목적에는 부합하니, 이걸로 쭉 끌고 가지 않을까 싶다

3) 마지막 문항의 난이도를 확 낮췄다

⇒ 얘네들 이렇게 쉽게 내도 어차피 무서워서 안 푸는 거 같은데, 이렇게 된 거 그냥 확 쉽게 내버리고 '문제 안 읽은 너희 탓이지'를 시전하면 되겠다. 그리고 미적분의 경우 28번 난이도를 가장 높게 만드니까 오히려 애들이 당황스러워 하네. 이걸로 변별하면 되겠다.

6월 모의평가와 9월 모의평가의 차이점

1) 6월에 비해 계산량을 좀 늘렸다

⇒ 얘네들 이렇게 쉽게 내도 어차피 무서워서 안 푸는 거 같은데, 이렇게 된 거 그냥 확 쉽게 내버리고 '문제 안 읽은 너희 탓이지'를 시전하면 되겠다.

2) 6월에 비해 아이디어성 문제를 줄였다

⇒ 또 어렵게 출제하고 발상적으로 출제하면 욕 먹을테니 기존 수능 유형에서 약간 변형해서 출제해야겠다. 하… 그런데 발상적 측면을 빼려면 고1 개념을 가지고 오거나 교과서 내용을 좀 꼬아야겠네.

평가원은 6평과 9평을 반영하여 수능을 출제합니다.
6평과 9평으로 봐서는 대충 이 정도로 정리가 가능할 것 같네요.

논란이 있을 만한 문항 Comment

002

함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

Comment. 굳이 $f(1)=1$임을 준 격이나 다름 없는 문제. 차라리 $f(x)=2x^2-ax$로 만들어 5번 즈음에 넣는게 낫지 않나 하는 생각.

006

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은?
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

Comment. 마찬가지로 $x=-1$에서 극대라고 주는 순간 극댓값을 물어보는 게 의미 없는 문제, 차라리 $x=-1,\ 3$에서 극값을 갖는다는 표현이 조금 더 낫지 않았나 싶음.

013

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
$M-m$의 값은? [4점]

Comment. [수학2] 범위에서 해석할 거라고는 $f'(-1)=0$이고, 그 이후로 항상 미분계수가 0 이상이라는 점 뿐인데, 사실상 고1 과정 (심지어 공식 교육과정에서 빠진) 근의 분리를 생각하는게 더 어려운 문제라 아쉬움.

015

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\ne0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to3}g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

Comment. 결론적으로 로피탈로 풀림.
$g(3)=3$이어서 $\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}\to2$로 간다는 사실을 아는데, 이때, $f(3)=0$이므로 $f(3)+1\to1$이니까
$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)}{f(x)}=\frac{f'(6)}{f'(3)}=2$
$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$에서
$f'(6)=2f'(3)$으로 풀면 구해짐.

019

두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

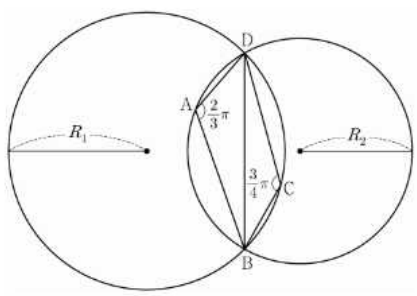
Comment. 넓이 공식 가지고 너무 잘 풀림. 평가원이 원래 잘 안 내려고 하는게 넓이 공식 소재인데, 여기에선 너무 대놓고 내서 아쉽.
(넓이 공식 : $S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$)

020

그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

Comment. 새로운 시도이긴 한데, 20번 치고는 과하게 쉬운게 아닌가 하는 생각. 물론 예전에도 이런 사례가 없던 건 아닌데, 굳이 20번에 [수학1]을 내면서 이렇게까지 쉽게 해야 하나 의문.

021

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

Comment. 일단 계산 자체가 너무 복잡함. 설마설마 했는데 저걸 진짜 소인수분해 할 줄 누가 알았겠나 싶음. 예전같이 깔끔한 계산의 평가원은 이제 한철 지나간 듯한 느낌.

022

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

Comment. 킬러 없애려고 원래 문항에서 난이도를 고의적으로 확 낮춘 문제로 보이는데, 이 과정에서 아이디어 같은 것들도 싹 다 잘라내진 것 같음. 글쓴이 개인적으로는 재미도, 감동도 없던 문제

미적
026

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 b_2 = 1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [3점]

Comment. 주어진 조건들을 식으로 전부 쓰면 그냥 계산만 많은 문제. 26번 난이도에 맞는 발상이긴 했으니, 마무리 계산이 26번스럽지 못했던 것 같음.

미적
029

두 실수 a, b $(a > 1,\ b > 1)$이

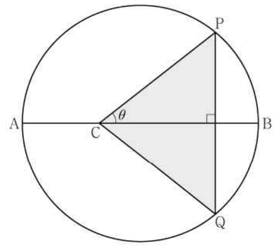
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = a$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

Comment. 너무하지 않나 싶을 정도로 쉬웠음. 사실상 3점에 들어가도 손색 없을만한 문항임.

미적
030

길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}} = 4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PCB} = \theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7 \times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



Comment. 논란이 있기 보다는 풀이법에 대해 여러 가지 의견이 있던 문제인데 객적으로 생각하는 가장 깔끔한 풀이는 이것. 이것 외에도 굳이 $(-7) \times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$이라고 안 쓰고 $-7 \times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$라고 쓴 것도 조금 거슬리긴 함.

미30 SOL CF.

원의 중심 O라 할 때, $\overline{\mathrm{CP}} = l(\theta)$라 하면 삼각형 CPO에서 코사인법칙에 의해

$5^2 = \{l(\theta)\}^2 + 1 - 2 \times l(\theta) \times 1 \times \cos\theta$ ⋯ ㉠

$S(\theta) = \frac{1}{2}\{l(\theta)\}^2 \sin 2\theta$ ⋯ ㉡

이므로 ㉡의 양변 미분하면

$S'(\theta) = l(\theta)l'(\theta) + \{l(\theta)\}^2 \cos 2\theta$

㉠에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 대입하면 $l\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}$, ㉠의 양변 미분하면

$2l(\theta)l'(\theta) - 2l'(\theta)\cos\theta + 2l(\theta)\sin\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 대입하면 $7\sqrt{2}\,l'\left(\frac{\pi}{4}\right) + 8 = 0$에서 $l'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{7\sqrt{2}}$

따라서 $S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = l\left(\frac{\pi}{4}\right)l'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{7\sqrt{2}} \times 4\sqrt{2}$이므로 $-7 \times S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 32$

미적분 전반

Comment. 저번 6평 때는 확통/기하가 이와 같이 29/30이 쉬운 형태로 출제가 된지라 평가원이 일종의 '폭탄 돌리기'를 하고 있는게 아닌가 의심이 됨. 한 선택과목씩 쉽게 내보면서 어떻게 나오나 실험하고 있는 듯한 느낌.

주요 문항별 분석과 출제방향성

009

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 특수각을 주지 않고 실수 x의 범위를 구하게끔 했다는 점에서 매우 인상깊음.

[실전 풀이]

코사인에 대한 부등식이므로 $\sin\frac{\pi}{7}=\cos\frac{5\pi}{14}$으로 고치면

$\cos x \le \cos\frac{5\pi}{14}$, 경계값, 즉, 등호가 성립하는 때는 $x=\frac{5\pi}{14}$, $2\pi-\frac{5\pi}{14}$이므로 $\beta-\alpha=2\pi-\frac{5\pi}{14}\times 2=\frac{9\pi}{7}$

010

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 점 $(1,\ 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 매우 계산에 치중되어있으며, $f'(2)=0$임을 발견하지 못하면 절대 풀 수 없는 문항.
문제를 조금이라도 잘못 읽으면 틀릴 것으로 생각됨.

[실전 풀이]

$(2,\ 3)$이랑 $(1,\ 3)$은 y좌표가 같으니까 점 $(2,\ 3)$에서의 접선은 $y=3$.

따라서 미지수 k 하나만 잡으면, $f(x)=(x-2)^2(x-k)+3$.

한편, 직선 $y=-f'(-2)(x+2)+f(-2)$이 점 $(1,\ 3)$을 지나는데, $f'(x)=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2$이므로 대입하면

$f'(-2)=32+8k$, $f(-2)=-29-16k$에서

$3(32+8k)-29-16k=3$

$64+8k=0$에서 $k=-8$

따라서 $f(0)=4\times 8+3=35$

011

두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(1)$과 점 $\mathrm{B}(8)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

[주목할만한 점] 역시 계산량이 많으나, 두 점 사이의 거리는 차의 함수에 '절댓값'을 씌워야 한다는 것을 일깨워주는 좋은 아이디어를 갖추고 있으므로 퀄리티는 높게 평가함.

[실전 풀이]

거리 문제니까 일단 x_1, x_2를 구하는 게 나을 듯.

$x_1(t)=t^3+2t^2-7t+1$, $x_2(t)=t^2+4t+8$

거리는 둘이 빼서 절댓값. 즉, $|x_1(t)-x_2(t)|=|t^3+t^2-11t-7|=4$

$y=t^3+t^2-11t-7$의 그래프 그려보면, $t=0$에서 $y<-4$이므로 $y=-4$을 먼저 지나고, $y=4$인 점 지난다.

처음으로 거리가 4 되는 지점이니까

$t^3+t^2-11t-7=-4$

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t^2+4t+1=0$이면 둘 다 $t<0$이므로 $t=3$이고,

$|x_1(3)-2x_1(1)+x_1(0)|=32$

012

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

[주목할만한 점] 수열의 귀납적 정의를 너무 과도하게 묻지 않고, 조금만 집중하면 누구든 다 풀이할 수 있도록 만들어둔 좋은 문항.

[실전 풀이]

a_2랑 a_4의 관계만 보면 되는데 둘이 두 항밖에 차이 안 나므로 그냥 노가다가 정배.

(i) a_2가 홀, a_3가 홀 : $a_4=a_2+2$이므로 $a_2+(a_2+2)=40$에서 $a_2=19$. 이 경우 a_3이 짝수이므로 모순.

(ii) a_2가 홀, a_3가 짝 : $a_4=\frac{a_2+1}{2}$에서 $a_2+\frac{a_2+1}{2}=\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{2}=40$에서 $a_2=\frac{79}{3}$이므로 a_1이 자연수 X

(iii) a_2가 짝, a_3가 홀 : $a_4=\frac{a_2+2}{2}$에서 $\frac{3}{2}a_2+1=40$에서 $a_2=26$에서 가능한 $a_1=25$ or 52

(iv) a_2가 짝, a_3가 짝 : $a_4=\frac{a_2}{4}$에서 $a_2+\frac{a_2}{4}=40$에서 $a_2=32$에서 가능한 $a_1=31$ or 64

모든 a_1의 합은 $25+52+31+64=172$

013

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
$M-m$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 오랜만에 수능에 직접적으로 출제된 '근의 분리' 문항. 그래프를 잘 그려낼 줄 알면 충분히 쉽게 풀이할 수 있으나, 그런 연습이 제대로 되어있지 않으면 절대 풀이할 수 없는 좋은 변별력 문항. 1컷을 80점대로 낮춘 주 요인.

[실전 풀이]

$x=-1$에서 증감 바뀌므로 $f'(-1)=0$, $x<0$에서 $f'(x)=-x^2-2ax-b$이므로 $f'(-1)=-1+2a-b=0$. ⋯ ㉠

$x=-1$부터 $x=0$까지 $f'\geq 0$이므로 이차함수 성질에 의해 $-b\geq 0$

$x=0$부터 $f'\geq 0$인데, 이 구간에서 $f'(x)=x^2+2ax-b$이므로 $a\geq 0$일 때는 $\lim_{x\to 0+}f'(x)$이 최소.

그런데, $\lim_{x\to 0+}f'(x)=-b\geq 0$이므로 $a\geq 0$이면 항상 증가.

$a<0$이면 $x=-a$가 대칭축이므로 $f'(-a)=-a^2-b\geq 0$

$a\geq 0$일 때 : ㉠이면서 $b\leq 0$인데, $b=2a-1\leq 0$이므로 $a\leq\frac{1}{2}$.

$2a=b+1-1+2a-b=-(a+b)+3a-1=0$에서 $a+b=3a-1$이므로

최솟값은 $a=0$일 때 $-\frac{1}{3}$, 최댓값은 $a=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}$

$a<0$일 때 : $f'(-a)=-a^2-b\geq 0$에서 $-b\geq a^2$, 곧, ㉠에 대입하면 $a^2+2a-1\geq 0$

근의 공식에 의해 $a\leq -1-\sqrt{2}$인데, ㉠에서 $a+b=3a-1$이므로

최솟값은 $3(-1-\sqrt{2})-1=-4-3\sqrt{2}$, 최댓값은 $a=0$ 근방에서 나오므로 구해봤자 의미 없음.

따라서 $M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

014

두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3} & (x > -8) \end{cases}$$

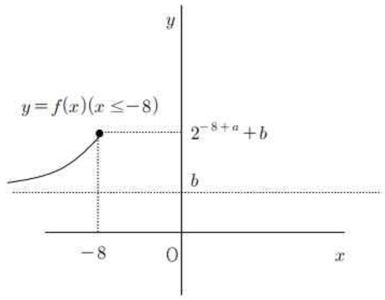
이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

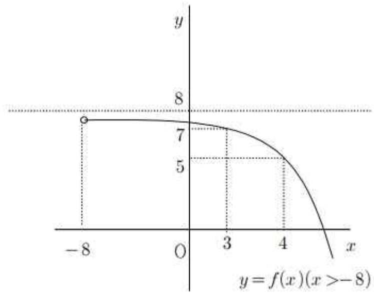
집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

[주목할만한 점] 1컷을 80점대로 낮춘 주 요인 2. 그러나 그 요인이 '집합의 의미를 제대로 알고 있는가?'에서 온다는 점에서 다소 아쉬움이 있음. 사설 모의고사에서도 잘 나오지 않을 법한 내용이라 퀄리티를 높게 평가하지 않음. 하지만 평가원이 그렇다는데 뭐 ^^...

[실전 풀이]

각 구간에서 그래프가 다음과 같다.





$3 \le x < 4$에서 이미 정수 6, 7이 나왔는데 $x<4$에서 $f(x)$의 원소가 2개가 되려면 $x \le -8$에서 함숫값이 겹쳐야 됨.

$y=2^{x+a}+b$는 점근선이 $y=b$인데, b가 자연수이므로 $b=5$

(b가 4 이하이면 정수인 것이 3개 이상, 6 이상이면 범위가 $3 \le k < 4$으로 안 나옴.)

$$5 \le 2^{x+a}+5 \le 2^{-8+a}+5$$

에서 $6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$이므로 $1 \le 2^{-8+a} < 2$, 곧, $8 \le a < 9$인데, a가 자연수이므로 $a=8$. 따라서 $a+b=5+8=13$

[여담] 한컴오피스에서는 수식 $x<-8$을 입력할 때, $x\leftarrow 8$으로 출력이 됩니다. 굳이 $x \le -8$로 만든 것은 이런 출력 때문에 화가 난 교수님의 심리가 반영되지 않은건가 싶습니다. 수능의 인간적인 면모를 느낄 수 있었던 문제였습니다.

015

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x) \ne 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 연속의 의미, 극한의 의미를 고루 묻고있는 아주 좋은 문항이나, 15번에 오기에는 다소 쉬운 감이 있지 않은가 생각됨. [수학2] 문제가 15번에 온 이례적인 사례.

[실전 풀이]

$x=3$에서 극한값이랑 함숫값 다르다는 건 $f(3)=0$이라는 뜻.

근데, 극한값 존재하니까 $f(x)=0$이면 $f(x+3)=0$에서 $f(6)=0$. 따라서 $f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$로 두면,

$x=3$에서 $f(x)+1 \to 1$이므로 $\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x+3-k)\times 1}{(x-3)(x-6)(x-k)}=\dfrac{3(6-k)}{-3(3-k)}$

이때, $g(3)=3$이므로 주어진 식에 의해 $\dfrac{3(6-k)}{-3(3-k)}=3-1=2$, 방정식 풀면 $k=4$

따라서 $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\dfrac{40\times(-1)}{-2}=20$

021

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

[주목할만한 점] 계차수열 이슈 + a_7이 '13의 배수'라는 케이스 끼워 맞추기식 억지 조건, 매우 복잡한 시그마의 합 공식 적용 등, 총체적 난국. 그나마 정수론적 아이디어를 택하려고 시도한 것이 눈에 띔.

[실전 풀이]

$S_n = \frac{n^2}{2}d + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$로 두면, $\sum_{k=1}^{7} S_k = \frac{7\times14\times15}{12}d + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2} = 28a_1 + 56d = 644$

28로 나누면 $a_1 + 2d = 23$, 곧, $a_3 = 23$이고, a_1, d 모두 자연수이므로 $d < 12$

$a_7 = a_3 + 4d = 23 + 4d$가 13의 배수이려면 $23 + 4d = 39,\ 91,\ 143,\ \cdots$ 만 가능.

이 중 $d < 12$인 것은 $23 + 4d = 39$일 때 $d = 4$이므로 이때, $a_2 = a_3 - d = 23 - 4 = 19$

022

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> **(가)** $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$
>
> **(나)** $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[주목할만한 점] 말할 것도 없다는 생각이 들지만, 일단 난도가 22번 대비 턱없이 낮고, 의미없는 $g(x)$의 정적분을 시켜서 오히려 실수를 유발하려는 의지가 드러나서 아쉬움. 그냥 $g(6)$ 이런거만 구해도 충분할텐데.
확실한 것은 22번 난이도를 확 너프시키려는 의도가 보임.

[실전 풀이]

(가)는 전형적인 식, $x = 1$ 대입하면 $f(1) - 3 = 0$이므로 $f(1) = 3$

$f'(x) = 4$이므로 양변 미분하면 $f(x) = xf'(x) + f(x) - 4x$에서 $xf'(x) = 4x$, 따라서 정리하면 $f(x) = 4x - 1$

(나)도 마찬가지. $(F \cdot G)' = 8x^3 + 3x^2 + 1$에서 $FG = 2x^4 + x^3 + x + C$에서 $F = 2x^2 - x + k_1$라 두면

대입했을 때, $(2x^2 - x + k_1)(x^2 + ax + b) = 2x^4 + x^3 + x + C$

$2a - 1 = 1$에서 $a = 1$, 어차피 구하는 값은 $G(3) - G(1)$이므로 b는 굳이 신경 안 써도 됨.

$G(3) - G(1) = (3^2 + 3 + b) - (1^2 + 1 + b) = 10$

3점 문항 및 선택 문항 총평

문항 번호	체감 난이도	총 평
1	1번	23수능처럼 괴랄하지도, 또 너무 쉽지도 않게 잘 출제된 1번 지수법칙 문항
2	2번	아주 흔한 미분계수의 정의
3	3번	사분면 위치에 따라 부호를 조심하면 잘 풀 수 있는 삼각함수의 정의 문항
4	4번	전형적인 함수의 극한의 정의 문항
5	4번	전형적인 등비수열의 정의 문항
6	7번	극대/극소를 묻는 매우 기초적인 문항이나, 다소 계산에 치중되는 감이 있음. 그러나 3점 문항임을 감안하여 용인 가능.
7	7번	다소 내신에서 낼 법한 문항. 유형적이고 발상적이라는 그림자를 떼기 힘들어보임.
8	6번	도함수를 적분하여 원래 함수를 만든다는 좋은 아이디어이지만, 8번 문항 대비 다소 난도가 쉬워보임.

문항 번호	체감 난이도	총 평
16	16번	전형적인 로그방정식 문항.
17	17번	전형적인 시그마의 성질을 다루는 문항.
18	17번	전형적인 곱의 미분
19	18번	전형적인 넓이 묻기. '이차/삼차함수의 넓이공식'을 대놓고 묻고 있는 것이 매우 아쉬움. ~~저격 두두등장~~
20	19번	20번 대비 난도가 과도하게 낮으며, 굳이 (가) (나) (다) 문형으로 만든 이유도 모르겠고, 오히려 '과도한 계산으로 인한 학생들의 실수 유발'을 의도한 것이 아닌가 싶은 문항. p, r의 값을 제곱근이 다소 덜 들어있는 형태로 수정될 필요가 있음.

[확률과 통계]

확통	난이도	퀄리티
23	23번	★★★★★
24	23번	★★★☆☆
25	24번	★★★★☆
26	25번	★★★☆☆
27	27번	★★★★★
28	28번	★★★★★
29	쉬운 29번	★★★☆☆
30	29번	★★★★☆

[미적분]

미적	난이도	퀄리티
23	23번	★★★★★
24	23번	★★★★★
25	26번	★★★★★
26	27번	★★★★☆
27	27번	★★★★☆
28	어려운 28번	★★★★★
29	27번	★☆☆☆☆
30	쉬운 29번	★★☆☆☆