

연세대 논술 (수학)

2024년 오전

- 해설 (강민재 T)

- 난이도를 필자의 임의대로 1점부터 5점까지 부여하였으니, 학습에 도움이 되기를 바랍니다.

(빠른 정답)

[문제 1] (1) 36100 (2) $41 + 3\sqrt{187}$

[문제 2] (1) $\ln 2 - 1$ (2) 발산

[문제 3] (1) 0 (2) 573

[문제 4] (1) 존재하지 않음 (2) 존재하지 않음

Problem 1.

좌표평면에서 오른쪽(x 축의 양의 방향) 또는 위쪽(y 축의 양의 방향)으로만 움직이며, x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

【1 - 1】 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 점 $(21, 21)$ 까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. (단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다.) **【5점】**

【1 - 2】 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양의 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿는 즉시 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. (단, 로봇은 한 점으로 간주한다.) **【10점】**

Problem 2.

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = n!$ 이다. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 은 1보다 큰 모든 자연수 n 에 대하여 아래의 성질을 만족시킨다.

(가) b_n 의 모든 소인수는 n 이하이다.

(나) $3 \log_2(n) \leq c_n \leq 4 \log_2(n)$

(다) b_n 은 $a_n^{c_n}$ 의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

[2 - 1] $\left\{ \frac{1}{n} \ln a_{2n} - \frac{1}{n} \ln a_n - \ln(2n) \right\}$ [5점]

[2 - 2] $\left\{ \frac{b_n}{n^2} \right\}$ [10점]

Problem 3.

0을 제외하고 -20 부터 20 까지 40 개의 정수가 하나씩 적혀 있는 40 장의 카드를 두 장씩 짝지어 20 개의 쌍을 만들었다. 이들 중 임의로 고른 하나의 쌍에서 두 카드에 적힌 숫자의 합을 확률변수 X 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

【3 - 1】 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 의 값을 구하고, 그 값이 20 쌍을 만드는 방법과 상관없이 일정함을 증명하시오. **[5점]**

【3 - 2】 확률변수 X 의 분산 $V(X)$ 의 값이 최대가 되도록 20 쌍을 만드는 방법을 찾고, 이때의 $V(X)$ 의 값을 구하시오. **[10점]**

Problem 4.

좌표평면 상에서 $P_1(6, 4), P_2(1, 5), P_3(0, 3), P_4(0, -1)$ 이 있다. 평면 벡터

$$v_1 = (-1, 0), v_2 = (0, -1), v_3 = (1, -1), v_4 = (1, 1)$$

가 있고, $\overrightarrow{OQ_i} = \overrightarrow{OP_i} + tv_i (t \geq 0)$ 인 Q_i 가 그리는 반직선을 l_i 라 하자. 이제 다음의 두 조건에 따라 새로운 반직선을 생성한다. (단, $i = 1, 2, 3, 4$)

(가) $i \neq j$ 에 대해 l_i, l_j 가 만나고 그 교점을 P라 했을 때, 양의 실수 a 에 대하여

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t(av_i + v_j), \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t(v_i + av_j)$$

를 만족하는 점 R, S가 그리는 반직선을 새로 그린다.

(나) 추가된 반직선들과 원래 존재하던 반직선들 중 교점을 갖는 쌍을 임의로 골라, 그 교점을 P'이라 두고 두 방향벡터를 각각 v_i', v_j' 이라 두고

$$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OP'} + t(av_i' + v_j'), \overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OP'} + t(v_i' + av_j')$$

를 만족하는 점 R', S'가 그리는 두 쌍의 반직선을 새로 그린다.

(다) (나)를 반복한다.

【4 - 1】 $(i, j) = (1, 2)$ 이다. 새로 생성된 반직선들이 점 A(2, 2)를 지나도록 하는 양의 실수 a 가 존재하는지 판별하고, 존재하는 경우 그 값을 구하시오. (단, 이 문제에서 P_3, P_4 와 l_3, l_4 는 무시한다.)

[5점]

【4 - 2】 이제 l_1, l_2, l_3, l_4 가 주어져 있을 때, 새로 생성된 반직선들이 점 A(2, 2)를 지나도록 하는 양의 실수 a 가 존재하는지 판별하고, 존재하는 경우 그 값을 구하시오.

[10점]