50 Integrals : Solution

雀, E-mail Address

October 23, 2023

1 Before Reading

1.1 IBP, Boxed

IBP는 부분적분(Integration by Parts)의 줄임말로, 다음과 같이 등호 위에 적어서 나타냅니다. 어떤 함수를 미분하고 적분했는지는 풀이과정을 보고 알아낼 수 있습니다. 또한, 다음과 같이 상자를 이용하여 최종 답을 알아볼 수 있도록 했습니다.

$$\int \ln x \overset{\text{IBP}}{=} x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \boxed{x\ln x + C}$$

1.2 Mapsto

치환적분의 경우 $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx = (1+u^2)dx$와 같이 그 과정을 상세하게 기술해 놓았으나, 적분 변수를 유지하기 위해 다음과 같이 표현하기도 하였습니다.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin x + \sin(1-x)} dx \overset{x \mapsto 1-x}{=} \int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{\sin x + \sin(1-x)} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \boxed{\frac{1}{2}}$$

1.3 Underbrace

다음 예시와 같이 개수 또는 값을 나타낼 때 사용하였습니다.

$$\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{2023} = 4046$$

1.4 Hyper Reference

풀이에서 특정한 함수, 기법, 개념 등을 사용할 때 이에 익숙하지 않은 독자들이 더 찾아볼 수 있도록 클릭 가능한 링크를 추가하였습니다. 청록색으로 표시되는 단어를 클릭하면 해당 위키백과 페이지 등으로 이동합니다.

1.5 Problems

이곳에서 문제 50개를 전부 확인할 수 있습니다. 풀이 :

1번 2번 3번 4번 5번 6번 7번 8번 9번 10번 11번 12번 13번 14번 15번 16번 17번 18번 19번 20번 21번 22번 23번 24번 25번 26번 27번 28번 29번 30번 31번 32번 33번 34번 35번 36번 37번 38번 39번 40번 41번 42번 43번 44번 45번 46번 47번 48번 49번 50번

2 Solution

1. $\sin x$와 $\cos x$에 관한 동차식이 주어진 경우 $\tan\frac{x}{2}$를 치환하여 주어진 적분을 유리적분으로 바꿀 수 있다. 이를 Tangent Half-Angle Substitution 또는 Weierstrass Substitution이라 한다.

$$u = \tan\frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1+u^2}{2}dx$$

이고

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

이므로

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{6u}{1+u^2} + \frac{4(1-u^2)}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-2u^2+3u+2}du = -\int_0^1 \frac{1}{(2u+1)(u-2)}du$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{5}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{2}{2u+1}\right)du = -\frac{1}{5}\left[\ln|u-2| - \ln|2u+1|\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}\ln 6}$$

이다. 또는, 삼각함수의 합성을 이용할 수도 있다.

$$3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\theta), \quad \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

이므로

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x+\theta)dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln|\csc(x+\theta) - \cot(x+\theta)|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \ln|\csc\theta - \cot\theta|\right) = \boxed{\frac{1}{5}\ln 6}$$

이다.

2. 분자와 분모에 $x+\sqrt{x-x^2}$을 곱한 후 $x \mapsto 1-x$ 치환을 이용하면 다음과 같다.

$$I=\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x-x^2}}{2x-1}dx=\int_0^1 \frac{2x^2-x}{(2x-1)(x+\sqrt{x-x^2})}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx$$

$$\overset{x\mapsto 1-x}{=}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\boxed{\frac{1}{2}}$$

3. 분모를 $f(x)$라 할 때, 적당한 실수 a, b에 대하여 분자를 $af(x)+bf'(x)$로 표현하는 것을 목표로 분수를 분해하면 간단하게 해결된다.

$$3\sin x+4\cos x=a(4\sin x+3\cos x)+b(4\cos x-3\sin x)$$

에서

$$\begin{cases} 4a-3b=3 \\ 3a+4b=4 \end{cases}$$

이므로 $a=\frac{24}{25}$, $b=\frac{7}{25}$이다. 따라서

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{24}{25}+\frac{7(4\cos x-3\sin x)}{25(4\sin x+3\cos x)}\right)dx$$

$$=\left[\frac{24}{25}x+\frac{7}{25}\ln|4\sin x+3\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{6}{25}\pi+\frac{7}{25}\ln\left(\frac{7}{3\sqrt{2}}\right)}$$

이다.

4. 다음과 같이 치환한다.

$$u=\sqrt{\tanh x},\quad du=\frac{\operatorname{sech}^2 x}{2\sqrt{\tanh x}}dx=\frac{1-u^4}{2u}dx$$

$$I=\int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{\tanh x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2u^2}{1-u^4}du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{1-u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)du=\left[\tanh^{-1}(u)-\arctan(u)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{6}}$$

5.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\sin x + \cos x)\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sec^2 x}{\tan x + 1} dx$$

$$\overset{\text{IBP}}{=} [x \ln|\tan x + 1|]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\tan x + 1| dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\tan x + 1| dx$$

$$\overset{x \mapsto \frac{\pi}{4} - x}{=} \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1\right| dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left|\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} + 1\right| dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left|\frac{2}{1 + \tan x}\right| dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln|1 + \tan x|) dx$$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|1 + \tan x| dx}_{= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{8}\ln 2}$$

또는 삼각함수의 합성을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\sin x + \cos x)\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x} dx$$

$$\overset{x \mapsto \frac{\pi}{4} - x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos x(\sin x + \cos x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)} dx - I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{\tan x + 1} dx \overset{u = \tan x}{=} \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{1}{u + 1} du$$

$$= \frac{\pi}{8}[\ln|u + 1|]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{8}\ln 2}$$

6. 탄젠트의 세배각 공식 형태임을 알아낼 수 있어야 한다. 즉,

$$\tan 3x = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = \frac{\tan x + \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

이므로 $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u du$로 치환하면 다음과 같다. ($x = \frac{1}{\sqrt{3}}$에서 불연속이므로 불연속점을 기준으로 구간을 나누어 적분해야 하고, $\frac{\pi}{6} < u < \frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{\pi}{2} < 3u < \pi$이므로 arctan의 치역에 의해 $\arctan(\tan 3u) = 3u - \pi$이다.)

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan 3u) \cdot \sec^2 u du + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(\tan 3u) \cdot \sec^2 u du$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} u \sec^2 u du + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3u - \pi) \sec^2 u du$$

한편

$$\int u \sec^2 u du \overset{\text{IBP}}{=} u \tan u - \int \tan u du$$

$$= u \tan u - \ln|\sec u| + C$$

이므로

$$I = 3\left[u \tan u - \ln|\sec u|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 3\left[u \tan u - \ln|\sec u|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \pi\left[\tan u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3\ln 2}$$

이다.

7.

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^{1728} x dx \overset{x \mapsto \pi - x}{=} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^{1728} x dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^{1728} x dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x \sin^{1728} x dx}_{=I}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^{1728} x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1728} x dx$$

이제 음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

이때 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \sin x dx \\
&\overset{\text{IBP}}{=} \underbrace{\left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot (-\cos x) dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=(1-\sin^2 x)} dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
&= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

가 성립하고, $I_0 = \frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}
I &= \pi \times I_{1728} = \pi \times \frac{1727}{1728} I_{1726} = \pi \times \frac{1727 \times 1725}{1728 \times 1726} I_{1724} \\
&= \cdots = \pi \times \frac{1727 \times 1725 \times \cdots \times 1}{1728 \times 1726 \times \cdots \times 2} I_0 \\
&= \frac{\pi^2}{2} \times \frac{1728!}{(1728 \times 1726 \times \cdots \times 2)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{2} \times \frac{1728!}{2^{1728} \times (864!)^2} = \boxed{\frac{1728! \pi^2}{2^{1729} \times (864!)^2}}
\end{aligned}$$

이다. 이는 Wallis' Integrals로 잘 알려진 적분이며, 위와 같은 과정으로 음이 아닌 정수 p에 대하여 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

Wallis' Integrals

$$I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x dx = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} (p!)^2} \pi, \quad p \in \mathbb{N}_0$$

$$I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x dx = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}, \quad p \in \mathbb{N}_0$$

8.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2024}x\cos(2024x)dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2024}x\cos(2024x)dx$$

음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos(nx)dx,\quad n\in\mathbb{N}_0$$

이때

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos(n+1-1)xdx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\left[\cos(n+1)x\cos x+\sin(n+1)x\sin x\right]dx \\
&= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\cos(n+1)xdx}_{=I_{n+1}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(n+1)x\sin x\cos^n xdx \\
&\overset{\text{IBP}}{=} I_{n+1}+\underbrace{\left[\sin(n+1)x\cdot\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\
&\qquad\qquad -\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\cos(n+1)x\cdot\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}xdx}_{=-I_{n+1}} \\
&= 2I_{n+1}
\end{aligned}$$

이므로 $\{I_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이고, 초항은 $I_0=\frac{\pi}{2}$이므로 I_n은 다음과 같다.

$$I_n=\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}_0$$

따라서 답은 다음과 같다.

$$\boxed{I=I_{2024}=\frac{\pi}{2^{2025}}}$$

9. $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{1}{u^2}du$로 치환하면

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_1^0 \frac{-\ln u}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= \int_0^1 \frac{-\ln u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

이고, 다시 $u = \sin t$, $du = \cos t dt$로 치환하면

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt \overset{t\mapsto\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$$

이다. 이 둘을 더하면 다음과 같다.

$$2I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)dt + \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\overset{w=2t}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin w)dw + \frac{\pi}{2}\ln 2$$

한편 $y = \sin w$의 그래프는 직선 $w = \frac{\pi}{2}$에 선대칭이므로

$$2I = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin w)dw + \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \underbrace{-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin w)dw}_{=I} + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{\pi}{2}\ln 2}$$

이다.

10. 음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n과 J_n을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx, \quad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

이때 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$J_{n+2} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+2)x - \sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos(n+1)x}{\sin x} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n+1)x dx = 2\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)$$

이므로 n이 홀수이면 $\frac{n+1}{2}$은 정수가 되어 다음이 성립한다.

$$J_n = J_{n-2} = \cdots = J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2m+1$$

한편 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+2)x - \sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin(n+2)x + \sin(nx)][\sin(n+2)x - \sin(nx)]}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(n+1)x\cos x \cdot 2\cos(n+1)x\sin x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2n+2)x\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n+3)x}{\sin x} dx$$

$$= J_{2n+1} + J_{2n+3} = \pi$$

이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2024x)}{\sin^2 x} dx = I_{2024} = I_0 + 1012\pi = \boxed{1012\pi}$$

11. 분모에 $\sqrt{1-x^2}$이 있으므로 $x=\sin u$, $dx=\cos u du$로 치환하면 다음과 같다.

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4x+7}{(7x+4)^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin u+7}{(7\sin u+4)^2}du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sec u\tan u+7\sec^2 u}{(7\tan u+4\sec u)^2}du=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(7\tan u+4\sec u)}{(7\tan u+4\sec u)^2}$$

$$=\left[-\frac{1}{7\tan u+4\sec u}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boxed{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{15}}$$

12. $\sin x$는 기함수이므로 $x\mapsto -x$의 치환을 통해 $2^{\sin x}+1$ 항을 완전히 제거할 수 있다.

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2023x)}{(2^{\sin x}+1)\sin x}dx\overset{x\mapsto -x}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2023x)}{(2^{-\sin x}+1)\sin x}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{\sin x}\sin(2023x)}{(2^{\sin x}+1)\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2023x)}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2023)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2023x)}{\sin x}dx$$

이는 10번 문항의 J_n에 대하여 J_{2023}과 같고, n이 홀수일 때 $J_n=\frac{\pi}{2}$이므로 답은 다음과 같다.

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2023x)}{\sin x}dx=2J_{2023}=\boxed{\pi}$$

13. 함수 f에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\pi}{2(1+\tan^e x)}+\frac{\pi}{2(1+\cot^e x)}$$

$$=\frac{\pi}{2(1+\tan^e x)}+\frac{\pi\tan^e x}{2(1+\tan^e x)}=\frac{\pi}{2}$$

가 성립하므로 $x\mapsto\frac{\pi}{2}-x$ 치환을 이용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(f(f(x)))dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(f\left(f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(f\left(\frac{\pi}{2}-f(x)\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-f(f(x))\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-f(f(f(x)))\right)dx = \frac{\pi^2}{4} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(f(f(x)))dx}_{=I} \\
&= \boxed{\frac{\pi}{8}\pi^2}
\end{aligned}
$$

14. 함수 f에 대하여

$$
f(x)+f(1-x) = \frac{x^{2024}}{x^{2024}+(1-x)^{2024}} + \frac{(1-x)^{2024}}{x^{2024}+(1-x)^{2024}} = 1
$$

이 성립하므로 $x \mapsto 1-x$ 치환을 이용하여 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 보이자.

$$
\int_0^1 \underbrace{f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))}_{n}dx = \frac{1}{2}
$$

편의상 f를 n번 합성한 함수를 f_n이라 표기하자. 예를 들어, $f_1 = f$이고, $f_2 = f \circ f$이다. $n = 1$일 때 $f_1(x) + f_1(1-x) = 1$이므로 $n = 1$일 때 성립한다. 자연수 k에 대하여 $n = k$일 때 성립한다고 가정하면 귀납 가정에 의해

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f_{k+1}(x)dx &= \int_0^1 f(f_k(x))dx \overset{x\mapsto 1-x}{=} \int_0^1 f(f_k(1-x))dx \\
&= \int_0^1 f(1-f_k(x))dx = \int_0^1 (1-f(f_k(x)))dx \\
&= \int_0^1 (1-f_{k+1}(x))dx = 1 - \int_0^1 f_{k+1}(x)dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

이므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 적분값은 $\frac{1}{2}$이고, 따라서 답은 $\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

15.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\cot x-\tan(1-x)}dx=\int_0^1 \frac{\tan x}{1-\tan x\tan(1-x)}dx$$

$$\overset{x\mapsto 1-x}{=}\int_0^1 \frac{\tan(1-x)}{1-\tan x\tan(1-x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\tan x+\tan(1-x)}{1-\tan x\tan(1-x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \tan(1)dx=\boxed{\frac{1}{2}\tan(1)}$$

16. 분모와 분자에 $x^{\sqrt{\pi}-2}$을 곱하면 다음과 같다.

$$I=\int_1^\pi \frac{1}{x+x^{\sqrt{\pi}}}dx=\int_1^\pi \frac{x^{\sqrt{\pi}-2}}{x^{\sqrt{\pi}-1}+x^{2\sqrt{\pi}-2}}dx$$

$$\overset{u=x^{\sqrt{\pi}-1}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}-1}\int_1^{\pi^{\sqrt{\pi}-1}}\frac{1}{u+u^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}-1}\int_1^{\pi^{\sqrt{\pi}-1}}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}-1}\left[\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|\right]_1^{\pi^{\sqrt{\pi}-1}}$$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}-1}\ln\left|\frac{\pi^{\sqrt{\pi}}}{\pi+\pi^{\sqrt{\pi}}}\right|+\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}-1}}$$

일반적으로 1이 아닌 임의의 실수 a에 대하여 항상 분모와 분자에 x^{a-2}을 곱하고 x^{a-1}을 치환하여 다음과 같이 적분할 수 있다.

$$\int \frac{1}{x+x^a}dx=\int \frac{x^{a-2}}{x^{a-1}+x^{2a-2}}dx\overset{u=x^{a-1}}{=}\frac{1}{a-1}\int\frac{1}{u+u^2}du$$

$$=\frac{1}{a-1}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{a-1}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+C$$

$$=\boxed{\frac{1}{a-1}\ln\left|\frac{x^a}{x+x^a}\right|+C}$$

17.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2\sin x\cos x\sqrt{\tan x}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}dx=\left[\sqrt{\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{1}$$

18. $u=\sqrt{\tan x},\ du=\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}dx=\frac{u^4+1}{2u}dx$로 치환하면

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx=\int_0^{\infty}\frac{2u^2}{u^4+1}du=\int_0^{\infty}\frac{2}{u^2+\frac{1}{u^2}}du$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)+\left(1-\frac{1}{u^2}\right)}{u^2+\frac{1}{u^2}}du=\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}du+\int_0^{\infty}\frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}du$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{d\left(u-\frac{1}{u}\right)}{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+2}+\int_0^{\infty}\frac{d\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)\right]_0^{\infty}+\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}\right|\right]_0^{\infty}$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

이다. 또는, 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx\overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

19. $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx=(u^2+1)dx$로 치환하고, $\sec\left(\frac{k\pi}{2}\right)$가 정의되도록 하는 임의의 실수 k에 대하여 다음이 성립함을 보이자.

$$\int_0^\infty \frac{u^k}{u^2+1}du=\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{k\pi}{2}\right) \tag{1}$$

$t=u^2$, $dt=2udu$로 치환하면

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{k-1}{2}}}{t+1}dt=\frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\frac{k+1}{2},\ 1-\frac{k+1}{2}\right)$$

이고, 여기서 $\mathcal{B}$는 다음과 같이 정의되는 베타함수이다.

$$\mathcal{B}(a,b):=\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1+z^{a+b}}dz$$

또한 감마함수 Γ에 대하여 다음 두 성질이 알려져 있으므로 이를 이용하면 다음과 같다. (두 번째 성질은 Euler's Reflection Formula(오일러의 반사 공식)으로 알려진 공식이다.)

$$\mathcal{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\quad \Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$I=\frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\frac{k+1}{2},\ 1-\frac{k+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{k+1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\csc\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

따라서 답은 다음과 같다.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[19]{\tan x}\,dx=\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{19}}}{u^2+1}du=\boxed{\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\pi}{38}\right)}$$

또는, 적분과 급수의 순서를 바꾸는 기법으로 해결할 수도 있다. 식 (1)에서 $u=e^t$으로 치환하면

$$\int_0^\infty \frac{u^k}{u^2+1}du=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(k+1)t}}{e^{2t}+1}dt=\int_{-\infty}^0 \frac{e^{(k+1)t}}{1+e^{2t}}dt+\int_0^\infty \frac{e^{(k-1)t}}{1+e^{-2t}}dt$$

$$=\int_{-\infty}^0 \underbrace{\frac{e^{(k+1)t}}{1-(-e^{2t})}}_{=(a)}dt+\int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{(k-1)t}}{1-(-e^{-2t})}}_{=(b)}dt$$

이고, 식 (a)와 (b)는 공비가 각각 $(-e^{2t})$, $(-e^{-2t})$이고 초항이 각각 $e^{(k+1)t}$, $e^{(k-1)t}$인 등비급수의 합이므로 이를 역으로 전개할 수 있다. 즉,

$$\int_0^\infty \frac{u^k}{u^2+1}du = \int_{-\infty}^0 \sum_{n=0}^\infty e^{(k+1)t}(-e^{2t})^n dt + \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{(k-1)t}(-e^{-2t})^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left[\int_{-\infty}^0 e^{(2n+1+k)t}dt + \int_0^\infty e^{-(2n+1-k)t}dt\right]$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1+k} + \frac{1}{2n+1-k}\right)$$

$$= 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-k^2}\right)$$

이다. 한편 $\sec z$의 Mittag-Leffler 전개식은 다음과 같고,

$$\sec z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - z^2}$$

$z = \frac{k\pi}{2}$를 대입한 후 $\frac{\pi}{2}$를 곱하면

$$\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - \frac{k^2\pi^2}{4}} = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)\pi^2}{(2n+1)^2\pi^2 - k^2\pi^2}$$

$$= 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-k^2}\right)$$

이므로 식 (1)이 성립함이 증명되었다.

20.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)dx - \ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\overset{u=\cos x - \sin x}{=} \int_0^1 u\ln u du - \ln\sqrt{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\overset{\text{IBP}}{=} \left[\frac{1}{2}u^2\ln u\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}udu - \frac{1}{4}\ln 2 = \boxed{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 2}$$

21.

$$I=\int_0^1 \sqrt{x^{2023}-x^{2024}}dx=\int_0^1 \sqrt{x^{2023}(1-x)}dx$$

$$=\int_0^1 x^{\frac{2023}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\mathcal{B}\left(\frac{2025}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{2025}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1014)}$$

한편 자연수 n에 대하여 $\Gamma(n)=(n-1)!$이고, 르장드르 2배 공식(Legendre Duplication Formula)에 의해 다음이 성립하므로 이를 이용하여 답을 계산하면 다음과 같다.

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{2025}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1014)}=\frac{1}{1013!}\times\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2024)}{2^{2023}\cdot\Gamma(1012)}\times\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2)}{2^{1}\cdot\Gamma(1)}$$

$$=\frac{2023!}{2^{2024}\cdot 1011!1013!}\pi=\boxed{\frac{\binom{2024}{1011}\pi}{2024\times 2^{2024}}}$$

또는, 감마함수를 이용하지 않고 점화식을 통해 구할 수도 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n:=\int_0^1\sqrt{x^n-x^{n+1}}dx$$

이때

$$I_n=\int_0^1\sqrt{x^n-x^{n+1}}dx$$

$$\overset{\text{IBP}}{=}\left[x\sqrt{x^n-x^{n+1}}\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{nx^{n-1}-(n+1)x^n}{2\sqrt{x^n-x^{n+1}}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{nx^n-(n+1)x^{n+1}}{\sqrt{x^n-x^{n+1}}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(n\sqrt{x^n-x^{n+1}}-\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n-x^{n+1}}}\right)dx$$

$$=-\frac{n}{2}I_n+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n-x^{n+1}}}dx$$

이므로 다음이 성립한다.

$$(n+2)I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}dx \tag{2}$$

또한, n의 자리에 $n+2$를 대입하면 다음이 성립한다.

$$(n+4)I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{\sqrt{x^{n+2} - x^{n+3}}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}dx \tag{3}$$

따라서 식 (2)에서 식 (3)을 빼면 다음이 성립한다.

$$(n+2)I_n - (n+4)I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x(x^n - x^{n+1})}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}dx = \int_0^1 x\sqrt{x^n - x^{n+1}}dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^{n+2} - x^{n+3}}dx = I_{n+2}$$

따라서 음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 점화관계가 성립한다.

$$I_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}I_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

주어진 적분은 I_{2023}이고, $I_1 = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx$는 점 $\left(\frac{1}{2},\, 0\right)$을 중심으로 하는 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원의 넓이의 절반이므로 $I_1 = \frac{\pi}{8}$이다. 따라서

$$I = I_{2023} = \frac{2023}{2026}I_{2021} = \frac{2023 \times 2021}{2026 \times 2024}I_{2019}$$

$$= \cdots = \frac{2023 \times 2021 \times \cdots \times 3}{2026 \times 2024 \times \cdots \times 6}I_1$$

$$= \frac{2023!}{2022 \times 2020 \times \cdots \times 2} \times \frac{1}{2^{1010} \cdot 1013!} \times \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{2023!}{2^{2024} \cdot 1011!1013!}\pi$$

$$= \boxed{\frac{\binom{2024}{1011}\pi}{2024 \times 2^{2024}}}$$

이고, 앞서 베타함수와 감마함수를 이용하여 구한 답과 동일함을 확인할 수 있다.

22. $u=\frac{1}{x}$, $du=-\frac{1}{x^2}dx$로 치환한 후 $t=3u$, $dt=3du$로 치환하면 다음과 같다.

$$I=\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{3x}\right)dx=\int_0^\infty \frac{\sin u\sin 3u}{u^2}du$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin(t/3)}{t/3}dt$$

이는 보바인 적분(Borwein Integrals)으로 잘 알려진 적분이므로 답은 $\boxed{\frac{\pi}{2}}$임을 쉽게 알 수 있다. (Borwein Integrals에 관한 3B1B 영상) 이 문제의 경우 다음 Lobachevsky's Dirichlet Integral Formula를 이용하여 해결할 수 있다.

Lobachevsky's Dirichlet Integral Formula

모든 음이 아닌 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)=f(\pi-x)$가 성립하는, 즉 주기가 π인 연속인 주기함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}f(x)dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$\sin x$의 세배각 공식에 의해 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$가 성립하므로

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin u\sin 3u}{u^2}du=\int_0^\infty \frac{3\sin^2 u-4\sin^4 u}{u^2}du$$

이고, 위 공식에 $f(x)=1$과 $f(x)=\sin^2 x$을 대입하면

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{4}$$

이므로 답은 다음과 같다.

$$I=3\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du-4\int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^2}du=\frac{3}{2}\pi-\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

23. $u=x^x$, $\ln u=x\ln x$, $du=x^x(\ln x+1)dx$로 치환하면 $\lim_{x\to 0+}x^x=1$이므로

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x(\ln x+1)}{x^{2x-1}}dx=\int_1^\infty \frac{\ln x}{\frac{u^2}{x}}\left(\frac{1}{u}du\right)$$

$$=\int_1^\infty \frac{x\ln x}{u^3}du=\int_1^\infty \frac{\ln u}{u^3}du$$

$$\overset{\text{IBP}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{2u^2}\ln u\right]_1^\infty}_{=0} - \int_1^\infty \left(-\frac{1}{2u^2}\right)\frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{u^3}du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^\infty = \boxed{\frac{1}{4}}$$

24. $\sin x$의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

이를 대입한 후 지배 수렴 정리에 근거하여 적분과 급수의 순서를 바꾸면

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(\ln x)^{2n}}{(2n+1)!}dx$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 (\ln x)^{2n}dx$$

이다. 한편 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx \overset{x=e^{-u}}{=} \int_0^\infty u^n e^{-u}du = \Gamma(n+1) = n!$$

이고, 이는 여러 번의 부분적분을 통해서도 확인할 수 있다. 따라서

$$I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 (\ln x)^{2n}dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times (2n)!$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

이다. 또는, 다음과 같이 다시 한 번 적분과 급수의 순서를 바꾸어 답을 얻을 수 있다. 이곳에서 파인만 테크닉, 중적분, 그리고 복소수 등을 이용한 다른 풀이를 확인해볼 수 있다.

$$I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^1 x^{2n}dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

25. $x=\frac{1-u}{1+u}$, $dx=-\frac{2}{(1+u)^2}du$로 치환하면 탄젠트 합공식에 의해

$$I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}dx=\int_1^0 \frac{\arctan\left(\frac{1-u}{1+u}\right)}{\frac{1-u}{1+u}+1}\left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)du$$

$$=\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-\arctan u}{1+u}du$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+u}du-\underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u}du}_{=I}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\ln|1+u|\right]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{8}\ln 2}$$

이다. 또는, $x=\tan u$, $dx=\sec^2 u du$로 치환할 경우 5번 문항과 동일한 적분이 되고, 이곳에서 부분적분을 이용한 방법과 파인만 테크닉을 이용한 방법을 각각 확인해볼 수 있다.

26. 파인만 테크닉을 이용하는 전형적인 문제이다. $a!=-1$인 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}dx,\quad -1\neq a\in\mathbb{R}$$

이때 양변을 a에 대하여 미분하면

$$\mathcal{I}'(a)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\frac{x^a-1}{\ln x}dx=\int_0^1 x^a dx=\frac{1}{a+1}$$

이므로 양변을 다시 적분하면 다음과 같다.

$$\mathcal{I}(a)=\ln|a+1|+C$$

한편 $C=\mathcal{I}(0)=\int_0^1 0dx=0$이므로

$$\mathcal{I}(a)=\int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}dx=\ln|a+1|$$

이고, 답은 다음과 같다.

$$I=\int_0^1 \frac{x^{2024}-1}{\ln x}dx=\mathcal{I}(2024)=\boxed{\ln 2025}$$

27. 1보다 큰 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\tan^2 x)dx$$

양변을 a에 대하여 미분한 후 $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx=(u^2+1)dx$로 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\ln(a+\tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\tan^2 x}dx \\
&\overset{u=\tan x}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{(u^2+1)(u^2+a)}du \\
&= \frac{1}{a-1}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{1}{u^2+a}\right)du \\
&= \frac{1}{a-1}\left[\arctan u - \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}\right)
\end{aligned}$$

따라서 양변을 다시 적분하면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(a) &= \frac{\pi}{2}\int\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}\right)da \\
&\overset{u=\sqrt{a}}{=} \frac{\pi}{2}\ln|a-1| - \pi\cdot\int\frac{1}{u^2-1}du \\
&= \frac{\pi}{2}\ln|a-1| - \frac{\pi}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\ln|a-1| - \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)+C \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\ln|a-1| + \ln\left|\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right|\right)+C \\
&= \pi\ln|\sqrt{a}+1|+C
\end{aligned}$$

이다. 한편 $a=0$일 때

$$\mathcal{I}(0) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cot x)dx}_{=-\mathcal{I}(0)} = 0$$

이므로 $C=0$이고 답은 다음과 같다.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sec^2 x+360)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan^2 x+361)dx=\mathcal{I}(361)=\boxed{\pi\ln 20}$$

28. 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$와 $\mathcal{J}(a)$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^\infty \frac{ax-\sin(ax)}{x^3(x^2+1)}dx,\quad \mathcal{J}(a):=\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx$$

양변을 a로 세 번 미분하면

$$\mathcal{I}'''(a)=\int_0^\infty \frac{\partial^3}{\partial a^3}\frac{ax-\sin(ax)}{x^3(x^2+1)}dx=\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial a^2}\frac{1-\cos(ax)}{x^2(x^2+1)}dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{\sin(ax)}{x(x^2+1)}dx=\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx=\mathcal{J}(a)$$

이다. 한편

$$\mathcal{J}(a)=\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx\overset{\text{IBP}}{=}\underbrace{\left[\frac{\sin(ax)}{a(x^2+1)}\right]_0^\infty}_{=0}+\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+1)^2}dx \tag{4}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$a\mathcal{J}(a)=2\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+1)^2}dx \tag{5}$$

양변을 a로 미분하면

$$\mathcal{J}(a)+a\mathcal{J}'(a)=2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{x\sin(ax)}{(x^2+1)^2}dx=2\int_0^\infty \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=2\underbrace{\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx}_{=\mathcal{J}(a)}-2\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$$

이므로

$$a\mathcal{J}'(a)-\mathcal{J}(a)=-2\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$$

가 성립하고, 양변을 다시 a로 미분하면 식 (5)에 의해 다음이 성립한다.

$$a\mathcal{J}''(a) = -2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+1)^2}dx = a\mathcal{J}(a)$$

따라서 함수 J는 미분방정식 $\mathcal{J}''(a) = \mathcal{J}(a)$의 근이 되어, 상수 C_1, C_2에 대하여

$$\mathcal{J}(a) = C_1e^a + C_2e^{-a}$$

이다. 한편

$$C_1 + C_2 = \mathcal{J}(0) = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

이고, 식 (4)에 의해

$$\lim_{a\to\infty}\mathcal{J}(a) = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+1)^2}dx\right] = 0$$

이므로 $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$가 되어

$$\mathcal{J}(a) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e^a}$$

이다. 또한, $\mathcal{I}'''(a) = \mathcal{J}(a)$이고 $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}'(0) = \mathcal{I}''(0) = 0$이므로

$$\mathcal{I}''(a) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a}),\quad \mathcal{I}'(a) = \frac{\pi}{2}(a+e^{-a}-1),$$

$$\mathcal{I}(a) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{2} - e^{-a} - a + 1\right)$$

이다. 따라서

$$I = \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^5+4x^3}dx \overset{x=2u}{=} \int_0^\infty \frac{2u-\sin 2u}{8u^3(4u^2+4)}(2du)$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^\infty \frac{2u-\sin 2u}{u^3(u^2+1)}du = \frac{1}{16}\mathcal{I}(2)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{32}(1-e^{-2})}$$

이다. 이곳에서 라플라스 변환 및 복소적분을 이용한 풀이를 확인해볼 수 있다.

29.

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4-x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2-1+\frac{1}{x^2}}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{d\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}}=\left[\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}$$

30.

$$I=\int_0^2\frac{x-1}{x\sqrt{x^2-2x+2}+x^2-2x+2}dx$$

$$\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^1\frac{u}{(u+1)\sqrt{u^2+1}+u^2+1}du$$

$$\overset{u\mapsto -u}{=}\int_{-1}^1\frac{u}{(u-1)\sqrt{u^2+1}-u^2-1}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\left(\frac{1}{u+1+\sqrt{u^2+1}}+\frac{1}{u-1-\sqrt{u^2+1}}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\left(\frac{u+1-\sqrt{u^2+1}}{2u}+\frac{u-1+\sqrt{u^2+1}}{-2u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\underbrace{\left(\frac{u+1-\sqrt{u^2+1}}{2u}-\frac{u-1+\sqrt{u^2+1}}{2u}\right)}_{=(1-\sqrt{u^2+1})/u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}-1\right)du\overset{u=\tan\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta-1$$

$$=\left[\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-1$$

$$=\boxed{\ln(1+\sqrt{2})-1}$$

31. 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x + a\tan x)}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(a\tan x) + \frac{\sin(a\tan x)}{\tan x}\right) dx$$

$$\overset{u=\tan x}{=} \int_0^{\infty} \frac{\cos(au) + \frac{\sin(au)}{u}}{u^2+1}du$$

양변을 a로 미분하면

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\cos(au) + \frac{\sin(au)}{u}}{u^2+1}du = \int_0^{\infty} \frac{\cos(au) - u\sin(au)}{u^2+1}du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\cos(au)}{u^2+1}du - \int_0^{\infty} \frac{u\sin(au)}{u^2+1}du$$

이다. 한편 28번 문항에 의해 다음이 성립하고,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e^a}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a})$$

또한

$$\int_0^{\infty} \frac{u\sin(au)}{u^2+1}du = \int_0^{\infty} \frac{(u^2+1-1)\sin(au)}{u(u^2+1)}du$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u}du}_{t=au} - \int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u(u^2+1)}du$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt}_{=\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}(1-e^{-a}) = \frac{\pi}{2e^a}$$

이므로

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(au)}{u^2+1}du - \int_0^{\infty} \frac{u\sin(au)}{u^2+1}du = \frac{\pi}{2e^a} - \frac{\pi}{2e^a} = 0$$

이다. 따라서 $\mathcal{I}(a)$는 상수이고, $\mathcal{I}(0) = \frac{\pi}{2}$이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x + 2\sqrt{e}\tan x)}{\sin x}dx = \mathcal{I}(2\sqrt{e}) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

32.

$$u = x + \sqrt{1+x^2}, \quad du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

와 같이 치환하면 $u^2 + 1 = 2x^2 + 2 + 2x\sqrt{1+x^2} = 2u\sqrt{1+x^2}$이므로

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^{2023}} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{u^2+1}{u^{2025}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(u^{-2023} + u^{-2025}\right) du$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2022} u^{-2022} - \frac{1}{2024} u^{-2024} \right]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2024} \right) = \boxed{\frac{2023}{2023^2 - 1}}$$

이다.

33. $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx = (u^2+1) dx$로 치환하면

$$I = \int_0^\pi \ln(1+\sin^2 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin^2 x) dx$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{\ln(u^2+2) - \ln(u^2+1)}{u^2+1} du$$

이다. 이제 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^\infty \frac{\ln(u^2+a) - \ln(u^2+1)}{u^2+1} du$$

양변을 a로 미분하면

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{\ln(u^2+a) - \ln(u^2+1)}{u^2+1} du = \int_0^\infty \frac{1}{(u^2+1)(u^2+a)} du$$

$$= \frac{1}{a-1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+a} \right) du = \frac{1}{a-1} \left[\arctan u - \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}$$

이다. 한편 $\mathcal{I}(1)=0$이므로 $\mathcal{I}(a)$는 다음과 같고,

$$\mathcal{I}(a)=\int\frac{\pi}{2\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}da\overset{t=\sqrt{a}}{=}\int\frac{\pi}{1+t}dt$$

$$=\pi\ln|1+t|+C=\pi\ln|1+\sqrt{a}|-\pi\ln 2$$

답은 다음과 같다.

$$I=2\int_0^\infty\frac{\ln(u^2+2)-\ln(u^2+1)}{u^2+1}du=2\mathcal{I}(2)=\boxed{2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)}$$

34. $u=\sqrt{2^x-1}$, $du=\frac{2^{x-1}\ln 2}{\sqrt{2^x-1}}dx$로 치환하면 다음과 같다.

$$I=\int_0^\infty\frac{x-1}{\sqrt{2^x-1}\ln(2^x-1)}dx=\int_0^\infty\frac{x-1}{\sqrt{2^x-1}\ln(2^x-1)}\cdot\frac{\sqrt{2^x-1}}{2^{x-1}\ln 2}du$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int_0^\infty\frac{x-1}{2^x\ln u}du=\frac{1}{(\ln 2)^2}\int_0^\infty\frac{\ln(u^2+1)-\ln 2}{(u^2+1)\ln u}du$$

$$\overset{u\mapsto\frac{1}{u}}{=}\frac{1}{(\ln 2)^2}\int_0^\infty\frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}+1\right)-\ln 2}{\left(\frac{1}{u^2}+1\right)(-\ln u)}\left(\frac{1}{u^2}du\right)$$

$$=-\frac{1}{(\ln 2)^2}\int_0^\infty\frac{\ln(u^2+1)-\ln(u^2)-\ln 2}{(u^2+1)\ln u}du$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{(\ln 2)^2}\int_0^\infty\frac{\ln(u^2+1)-\ln 2}{(u^2+1)\ln u}du}_{=-I}+\frac{2}{(\ln 2)^2}\int_0^\infty\frac{1}{u^2+1}du$$

$$=-I+\frac{2}{(\ln 2)^2}\left[\arctan(u)\right]_0^\infty$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{2(\ln 2)^2}}$$

35. $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx=(u^2+1)dx$로 치환하면

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}\sqrt{1-\tan x}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{u(1-u)}}{u^2+1}du$$

이고, $t=\frac{u}{1-u}$, $dt=\frac{1}{(1-u)^2}du$로 치환하면 $u=\frac{t}{t+1}$이므로

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt{u(1-u)}}{u^2+1}du=\int_0^\infty\frac{\sqrt{u}(1-u)^{\frac{5}{2}}}{u^2+1}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\frac{t}{t+1}}\sqrt{\frac{1}{(t+1)^5}}}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2+1}dt=\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{(t+1)(2t^2+2t+1)}dt$$

$$\overset{z=\sqrt{t}}{=}\int_0^\infty\frac{2z^2}{(z^2+1)(2z^4+2z^2+1)}dz$$

$$=2\int_0^\infty\left(\frac{2z^2}{2z^4+2z^2+1}+\frac{1}{2z^4+2z^2+1}-\frac{1}{z^2+1}\right)dz$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{2z^2}{2z^4+2z^2+1}+\frac{1}{2z^4+2z^2+1}-\frac{1}{z^2+1}\right)dz$$

이제 I_1과 I_2를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$I_1=\int_{-\infty}^\infty\frac{2z^2}{2z^4+2z^2+1}dz,\quad I_2=\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{2z^4+2z^2+1}dz$$

이때 Glasser's Master Theorem에 의해 다음이 성립한다. (이를 줄여서 GMT로 쓰기로 한다.)

$$I_1=\int_{-\infty}^\infty\frac{2z^2}{2z^4+2z^2+1}dz=\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{z^2+\frac{1}{2z^2}+1}dz$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}z}\right)^2+1+\sqrt{2}}dz\overset{\text{GMT}}{=}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{z^2+1+\sqrt{2}}dz$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)\right]_{-\infty}^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

또한,

$$I_2=\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{2z^4+2z^2+1}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{z^4+z^2+\frac{1}{2}}dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{1}{2z^2} + 1} \cdot \frac{dz}{z^2} \overset{z \mapsto \frac{1}{z}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z^2} + 1} dz$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{2}{z^2} + 2} dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{z}\right)^2 + 2 + 2\sqrt{2}} dz$$

$$\overset{\text{GMT}}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z^2 + 2 + 2\sqrt{2}} dz = \left[\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)\right]_{-\infty}^\infty$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

이므로

$$I = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{2z^2}{2z^4 + 2z^2 + 1} + \frac{1}{2z^4 + 2z^2 + 1} - \frac{1}{z^2+1}\right) dz$$

$$= I_1 + I_2 - [\arctan z]_{-\infty}^\infty$$

$$= \boxed{\pi\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \pi}$$

이다. 이곳에서 복소적분 등을 이용한 다른 풀이를 확인해볼 수 있다.

36. 1보다 큰 자연수 m, n에 대하여 $\mathcal{I}(m,n)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(m,n) := \int_1^\infty \frac{(\ln x)^m}{x^n} dx$$

이때

$$\mathcal{I}(m,n) = \int_1^\infty \frac{(\ln x)^m}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{(\ln x)^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^\infty}_{=0} + \frac{n-1}{m+1} \underbrace{\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{m+1}}{x^n} dx}_{=\mathcal{I}(m+1,n)}$$

이고,

$$\mathcal{I}(0,n)=\int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx=\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^\infty=\frac{1}{n-1}$$

이므로

$$\mathcal{I}(m,n)=\frac{m}{n-1}\mathcal{I}(m-1,n)=\frac{m(m-1)}{(n-1)^2}\mathcal{I}(m-2,n)$$

$$=\cdots=\frac{m!}{(n-1)^m}\mathcal{I}(0,n)=\frac{m!}{(n-1)^{m+1}}$$

이다. 따라서 답은 다음과 같다.

$$I=\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{1728}}{x^{2024}}dx=\mathcal{I}(1728,2024)=\boxed{\frac{1728!}{2023^{1729}}}$$

37.

$$I=\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+\sec^2 x+2x\tan x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x+\tan x)^2+1}dx$$

이고, Glasser's Master Theorem을 확장시킨 다음 정리를 이용할 것이다.

Extended Glasser's Master Theorem (1)

실수 전체에서 르베그 적분 가능한 임의의 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x+\tan x)dx=\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

Glasser's Master Theorem은 임의의 적분 가능한 함수 f에 대하여

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^\infty f\left(x-\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{x-b_n}\right)dx \tag{6}$$

가 성립함을 알려주며, N이 반드시 유한한 값일 필요는 없다. 한편 $\cot z$의 Mittag-Leffler 전개식은 다음과 같으므로

$$\cot z=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n\pi}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)$$

$z = \frac{\pi}{2} - x$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x = -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x + n\pi - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x - n\pi - \frac{\pi}{2}}\right)$$

따라서 $x + \tan x$ 식 (6)의 형태와 일치하므로 x를 $x + \tan x$로 대체하여도 이상적분의 값(또는 코시 주요값)은 변하지 않고, 답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \tan x)^2 + 1} dx &\overset{\text{GMT}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \boxed{\pi} \end{aligned}$$

일반적으로, 다음 정리가 성립한다.

Extended Glasser's Master Theorem (2)

특정 조건을 만족시키는 $\mathbb{C}$ 위의 유리형 함수(Meromorphic Function) $\phi(z)$와 $\mathbb{R}$에서 르베그 적분 가능한 임의의 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

이때 $\phi(z)$가 만족시켜야 하는 조건은 다음과 같다.

1. Preserves the extended real line $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in the sense:

$$\begin{cases} \phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^* \\ \phi^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad P \overset{\text{def}}{=} \phi^{-1}(\infty) = \{\, p \in \mathbb{C} : p \text{ poles of } \phi(z) \,\} \subset \mathbb{R}$$

2. Splits $\mathbb{R} \setminus P$ as a countable union of its connected components $\bigcup_n (a_n, b_n)$. Each connected component is an open interval (a_n, b_n) and on such an interval, $\phi(z)$ increases from $-\infty$ at a_n^+ to ∞ at b_n^-.

3. There exists an ascending chain of Jordan domains $D_1, D_2, \ldots$ that cover $\mathbb{C}$,

$$\{0\} \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \quad \text{with} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{C}$$

whose boundaries ∂D_k are "well behaved", "diverge" to infinity and $|z - \phi(z)|$ is bounded on the boundaries. More precisely, let

$$\begin{cases} R_k \overset{\text{def}}{=} & \inf\{\, |z| : z \in \partial D_k \,\} \\ L_k \overset{\text{def}}{=} & \int_{\partial D_k} |dz| < \infty \\ M_k \overset{\text{def}}{=} & \sup\{\, |z - \phi(z)| : z \in \partial D_k \,\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{L_k}{R_k^2} = 0 \\ M = \sup_k M_k < \infty \end{cases}$$

이 확장 정리에 관한 증명은 이곳에서 확인할 수 있으며, $\phi(z) = z + \tan z$의 경우 위 조건을 모두 만족시킴을 알 수 있다.

38. 음이 아닌 정수 n과 $a > -2$인 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(n, a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(n,a) := \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+ax+1)\left(\sum_{k=0}^n (-x)^k\right)}dx \tag{7}$$

x를 $\frac{1}{x}$로 치환하면

$$\mathcal{I}(n,a) = \int_0^\infty \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{x}(x^2+ax+1)\left(\sum_{k=0}^n (-x)^k\right)}dx \tag{8}$$

이고

$$(x+1)(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n) = (-1)^n x^{n+1}+1$$

이므로 식 (7)과 식 (8)을 더한 후 2로 나누면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(n,a) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}(x^2+ax+1)}dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^\infty \frac{1+u^2}{u^4+au^2+1}du \\
&= \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+a+\frac{1}{u^2}}du = \int_0^\infty \frac{d\left(u-\frac{1}{u}\right)}{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+a+2} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{a+2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a+2}}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a+2}}
\end{aligned}$$

이다. ($\mathcal{I}(n,a)$)의 값이 놀랍게도 n과 전혀 무관하다!) 따라서 답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+(\pi-2)x+1)(1-x+x^2-\cdots+x^{2022}-x^{2023})}dx \\
&= \mathcal{I}(2023, \pi-2) = \boxed{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

39. 황금비 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$에 대하여 $\phi^2-\phi-1=0$이고,

$$\frac{d}{dx}(1+x^\phi)^{1-\phi} = \frac{\phi(1-\phi)x^{\phi-1}}{(1+x^\phi)^\phi} = -\frac{x^{\phi-1}}{(1+x^\phi)^\phi}$$

이므로

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^\phi)^\phi}dx = \int_0^\infty \frac{1+x^\phi-x^\phi}{(1+x^\phi)^\phi}dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x^\phi)^{\phi-1}} - \frac{x^\phi}{(1+x^\phi)^\phi}\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(x'(1+x^\phi)^{1-\phi} + x\left[(1+x^\phi)^{1-\phi}\right]'\right)dx \\
&= \left[x(1+x^\phi)^{1-\phi}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+x^\phi)^{\phi-1}} = \boxed{1}
\end{aligned}
$$

이다. x를 $\frac{1}{x}$로 치환하거나 베타함수, 감마함수를 이용한 풀이는 이곳에서 확인해볼 수 있다.

40.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\ln x}{1728x^2+2024x+1728}dx \overset{x\mapsto\frac{1}{x}}{=} \int_0^\infty \frac{-\ln x}{\frac{1728}{x^2}+\frac{2024}{x}+1728}\cdot\frac{dx}{x^2} \\
&= -\int_0^\infty \frac{\ln x}{1728x^2+2024x+1728}dx = -I = \boxed{0}
\end{aligned}
$$

또는, $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$로 분해한 뒤 두 번째 적분에 $x \mapsto \frac{1}{x}$의 치환을 적용하여 $I = \int_0^1 - \int_0^1 = 0$과 같이 풀 수도 있다. 일반적으로, 양의 실수 $\mathbb{R}^+$에서 음이 아닌 함숫값을 가지는 임의의 유계 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$
\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx \overset{x\mapsto\frac{1}{x}}{=} -\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = 0
$$

이 문제는 $f(x) = \frac{1}{1728x+2024}$인 경우이다.

41.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin 2x}dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\sin 2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{2-2\sin x\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\arctan(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

42. $0 \le a \le 1$인 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx$$

양변을 a로 미분한 후 $t = \tan\frac{x}{2}$, $dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{t^2+1}{2}dx$로 치환하면

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx = \int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x}dx$$

$$\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{2}{(a+1)+(1-a)t^2}dt$$

$$= \frac{2}{1-a}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+\frac{a+1}{1-a}}dt = \frac{2}{1-a}\left[\sqrt{\frac{1-a}{a+1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{a+1}}t\right)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

이고, $\mathcal{I}(0) = 0$이므로 $\mathcal{I}(a)$는 다음과 같다.

$$\mathcal{I}(a) = \pi\arcsin(a)$$

$\mathcal{I}(a)$는 유도과정상 $a = 1$일 때는 정의되지 않지만, $\mathcal{I}(a)$는 연속함수이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx = \mathcal{I}(1) = \lim_{a\to 1-}[\pi\arcsin(a)] = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$$

급수전개 및 복소적분을 이용하는 방법은 이곳과 이곳에서 확인해볼 수 있다.

43. 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^a \sin^2\left(x - \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$

$x = a\cos u$, $dx = -a\sin u du$로 치환하면 다음과 같고,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(a) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(a\cos u - a\sin u)(-a\sin u du)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a\cos u - a\sin u)\cdot a\sin u du\end{aligned} \tag{9}$$

$x = a\sin u$, $dx = a\cos u du$로 치환하면 다음과 같다.

$$\mathcal{I}(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a\sin u - a\cos u) \cdot a\cos u du \tag{10}$$

따라서 식 (9)와 식 (10)을 더한 후 2로 나누면

$$\mathcal{I}(a) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a(\sin u - \cos u)) \cdot a(\sin u + \cos u)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a(\sin u - \cos u)) \cdot d(a(\sin u - \cos u))$$

$$\overset{t=a(\sin u - \cos u)}{=} \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{a}(1-\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^a = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\sin 2a$$

이다. 따라서 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2\left(x - \sqrt{\frac{\pi^2}{144} - x^2}\right)dx = \mathcal{I}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\pi}{24} - \frac{1}{8}}$$

44. $|a| < 1$인 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^{\pi} \ln(1 - a\cos x)dx$$

양변을 a로 미분한 후 $u = \tan\frac{x}{2}$, $du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1+u^2}{2}dx$로 치환하면

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial a}\ln(1 - a\cos x)dx = -\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 - a\cos x}dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 - \frac{a(1-u^2)}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= -2\int_0^{\infty} \frac{1-u^2}{(1+u^2)[(1-a)+(1+a)u^2]}du$$

$$= -\frac{2}{a}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(1-a)+(1+a)u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$= -\frac{2}{a}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{u^2 + \frac{1-a}{1+a}} - \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$= -\frac{2}{a}\left[\frac{1}{1+a}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}u\right) - \arctan u\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a\sqrt{1-a^2}}$$

이고 $\mathcal{I}(0) = 0$이므로 $\mathcal{I}(a)$는 다음과 같다.

$$\mathcal{I}(a) = \pi\ln|a| - \pi\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \pi\ln(1+\sqrt{1-a^2}) - \pi\ln 2$$

따라서 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^\pi \ln(5-4\cos x)dx = \int_0^\pi \left(\ln 5 + \ln\left(1-\frac{4}{5}\cos x\right)\right)dx$$

$$= \pi\ln 5 + \underbrace{\int_0^\pi \ln\left(1-\frac{4}{5}\cos x\right)dx}_{=\mathcal{I}\left(\frac{4}{5}\right)} = \pi\ln 5 + \pi\ln\left(1+\frac{3}{5}\right) - \pi\ln 2$$

$$= \boxed{2\pi\ln 2}$$

45. 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}dx$$

양변을 a에 대하여 미분하면

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2 x + 1}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a^2+1)\sin^2 x + \cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{(a^2+1)\tan^2 x + 1}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + \frac{1}{a^2+1}}dx = \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\arctan\left(\sqrt{a^2+1}\tan x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$$

이고, $\mathcal{I}(0)=0$이므로

$$\mathcal{I}(a)=\frac{\pi}{2}\sinh^{-1}(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$$

이다. 따라서 답은 다음과 같다.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\sin x)}{\sin x}dx=\mathcal{I}(1)=\boxed{\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$$

급수 및 중적분 등을 이용한 풀이는 이곳에서 확인해볼 수 있다.

46.

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x-x^2)}{x}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x(1-x))}{x}dx$$

$$\overset{x\mapsto 1-x}{=}\int_0^1\frac{\ln(1+x(1-x))}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x-x^2)}{x-x^2}dx$$

이제 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^1\frac{\ln(1+a(x-x^2))}{x-x^2}dx$$

양변을 a로 미분하면

$$\mathcal{I}'(a)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\frac{\ln(1+a(x-x^2))}{x-x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+a(x-x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx\overset{u=x-\frac{1}{2}}{=}\frac{2}{a}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{a+4}{4a}-u^2}du$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a}{a+4}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+4}{4a}}+u}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a+4}{4a}}-u}\right)du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a(a+4)}}\left[\ln\left|\frac{u+\sqrt{\frac{a+4}{4a}}}{u-\sqrt{\frac{a+4}{4a}}}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a(a+4)}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a+4}{a}}+1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}-1}\right)$$

이고, $\mathcal{I}(0) = 0$이므로 다음이 성립한다.

$$I = \frac{1}{2}\mathcal{I}(1) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}(1) - \mathcal{I}(0))$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(a+4)}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a+4}{a}}+1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}-1}\right) da$$

한편

$$x = \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a+4}{a}}+1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}-1}\right)$$

로 치환하면

$$dx = -\frac{2}{\sqrt{\frac{a+4}{a}} \cdot a^2} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}+1} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}-1}\right)}_{=-\frac{a}{2}} da = \frac{1}{\sqrt{a(a+4)}} da$$

이다. 또한,

$$\lim_{a\to 0+} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a+4}{a}}+1}{\sqrt{\frac{a+4}{a}}-1}\right) = \lim_{a\to 0+} \ln\left(\frac{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}\right) = 0$$

이고 황금비 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$에 대하여 $a = 1$일 때 $x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) = \ln\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = \ln(\phi^2)$이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \int_0^{\ln(\phi^2)} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\ln\phi} = \boxed{2(\ln\phi)^2}$$

또는, $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의한 후 $\mathcal{I}'(a) = 4a$임을 유도하고, $4a$를 0부터 $\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\phi$까지 적분하여 동일한 답을 얻을 수 있다.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^1 \frac{\ln\left[1 + 4x(1-x)\sinh^2 a\right]}{x} dx$$

47.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})dx$$

$$\overset{\text{IBP}}{=}\underbrace{\frac{1}{2}\left[x\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+\frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}\cdot xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x-\sin x)\sqrt{\sin 2x}+\cos 2x}{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin 2x}+\sin 2x}\cdot xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x-\sin x)\sqrt{\sin 2x}+\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin 2x}+\sin 2x}\cdot xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+(\sin x-\cos x)\sqrt{\sin 2x}}{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin 2x}+\sin 2x}\cdot xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\cdot xdx$$

$u=\tan x,\ du=\sec^2 xdx=(u^2+1)dx$로 치환하면 다음과 같다.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\arctan u}{u^2+1}\cdot\frac{\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}}{\sqrt{\frac{2u}{u^2+1}}}du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{\arctan u}{u^2+1}\cdot\frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$

이제 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^{\infty}\frac{\arctan(au)}{u^2+1}\cdot\frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$

양변을 a로 미분하고 첫 번째 적분에만 $t\mapsto\frac{t}{\sqrt{a}}$의 치환을 적용하면

$$\mathcal{I}'(a)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(au)}{u^2+1}\cdot\frac{u-1}{\sqrt{u}}du=\int_0^{\infty}\frac{(u-1)\sqrt{u}}{(u^2+1)(a^2u^2+1)}du$$

$$\overset{t=\sqrt{u}}{=}\int_0^{\infty}\frac{2t^2(t^2-1)}{(t^4+1)(a^2t^4+1)}dt=\frac{2}{1-a^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{a^2t^2+1}{a^2t^4+1}-\frac{t^2+1}{t^4+1}\right)dt$$

$$\overset{t\mapsto\frac{t}{\sqrt{a}}}{=}\frac{2}{1-a^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{at^2+1}{\sqrt{a}(t^4+1)}-\frac{t^2+1}{t^4+1}\right)dt$$

$$= \frac{2}{1-a^2}\int_0^\infty \left(\frac{(\sqrt{a}-1)t^2}{t^4+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)\frac{1}{t^4+1}\right)dt$$

이고,

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+1}dt \overset{t\mapsto\frac{1}{t}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{t^2+\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{1}{t^4+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

이므로

$$\mathcal{I}'(a) = \frac{2}{1-a^2}\cdot\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-2\right)\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})(1+a)}$$

이다. 또한 $\mathcal{I}(0)=0$이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\arctan u}{u^2+1}\cdot\frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \mathcal{I}(1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})(1+a)}da$$

$$\overset{x=\sqrt{a}}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}dx \overset{x=\tan\theta}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\ln|\cos\theta+\sin\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\ln 2}$$

48. $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때 $1-\sin^2 x\cos^2 x > 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\arctan(1-\sin^2 x\cos^2 x)+\arctan\left(\frac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}
I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(1-\sin^2 x\cos^2 x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}\right)\right)dx \\
&= \frac{\pi^2}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{1-\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx \\
&= \frac{\pi^2}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\sin^2 x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\cos^2 x)dx \\
&\overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} \frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\cos^2 x)dx
\end{aligned}$$

이다. 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(a\cos^2 x)dx$$

양변을 a로 미분하면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\arctan(a\cos^2 x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+a^2\cos^4 x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^4 x+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{(\tan^2 x+1)^2+a^2}dx \\
&\overset{u=\tan x}{=} \int_0^{\infty}\frac{1}{(u^2+1)^2+a^2}du=\int_0^{\infty}\frac{1}{u^4+2u^2+1+a^2}du \\
&\overset{u\mapsto\frac{1}{u}}{=} \int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{u^4}+\frac{2}{u^2}+1+a^2}\cdot\frac{du}{u^2}=\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(1+a^2)u^4+2u^2+1}du \\
&\overset{t=\sqrt{a^2+1}u}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\int_0^{\infty}\frac{\frac{t^2}{a^2+1}}{\frac{t^4}{a^2+1}+\frac{2t^2}{a^2+1}+1}dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+2t^2+a^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+2t^2+a^2+1} dt + \int_0^\infty \frac{1}{u^4+2u^2+a^2+1} du \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \int_0^\infty \frac{t^2+\sqrt{a^2+1}}{t^4+2t^2+a^2+1} dt = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \int_0^\infty \frac{1+\frac{\sqrt{a^2+1}}{t^2}}{t^2+\frac{a^2+1}{t^2}+2} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \int_0^\infty \frac{d\left(t-\frac{\sqrt{a^2+1}}{t}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{a^2+1}}{t}\right)^2+2(1+\sqrt{a^2+1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{a^2+1}}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{a^2+1}}} \left(t - \frac{\sqrt{a^2+1}}{t} \right) \right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{1+\sqrt{a^2+1}}}$$

이고, $\mathcal{I}(0) = 0$이므로

$$I = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\cos^2 x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2(\mathcal{I}(1) - \mathcal{I}(0))$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{1+\sqrt{a^2+1}}} da$$

이다. 마지막으로 $x = \sqrt{a^2+1}$로 치환하면 $dx = \frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}} da = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} da$이므로 답은 다음과 같다.

$$I = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)} dx$$

$$\overset{u=\sqrt{x-1}}{=} \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \frac{1}{u(u^2+2)} \cdot 2u du$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \sqrt{2}\pi \int_0^{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \frac{1}{u^2+2} du = \frac{\pi^2}{4} - \sqrt{2}\pi \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{4} - \pi \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)}$$

49. $u=\tan\frac{x}{2}$, $du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=\frac{1+u^2}{2}dx$로 치환하면

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan\left(\frac{2\sin x}{2\cos x-1}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\cos x}}dx=2\int_0^1\frac{u\arctan\left(\frac{4u}{1-3u^2}\right)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du$$

이다. 이때

$$\arctan\left(\frac{4u}{1-3u^2}\right)=\begin{cases}\arctan u+\arctan 3u & (0<u<\frac{1}{\sqrt{3}})\\ \arctan u+\arctan 3u-\pi & (\frac{1}{\sqrt{3}}<u<1)\end{cases}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{u(\arctan u+\arctan 3u)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du+2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{u(\arctan u+\arctan 3u-\pi)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du\\&=2\int_0^1\frac{u(\arctan u+\arctan 3u)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du-2\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du\end{aligned}\tag{11}$$

이제 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$와 $\mathcal{J}$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a):=\int_0^1\frac{u\arctan(au)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du,\quad \mathcal{J}:=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du$$

$\mathcal{J}$의 값을 먼저 구하면 $\theta_0=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$에 대하여

$$\begin{aligned}\mathcal{J}&=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du\overset{u=\sin\theta}{=}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta\\&=\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{2-\cos^2\theta}d\theta=\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta+\sqrt{2}}\right|\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

이다. 한편 $\mathcal{I}(a)$의 양변을 a로 미분하면

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'(a)&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\frac{u\arctan(au)}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)}du=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}(1+u^2)(1+a^2u^2)}du\\&\overset{u\mapsto\frac{1}{u}}{=}\int_1^\infty\frac{\frac{1}{u^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{u^2}\right)}\cdot\frac{du}{u^2}=\int_1^\infty\frac{u}{\sqrt{u^2-1}(u^2+1)(u^2+a^2)}du\end{aligned}$$

이고, $u=\sqrt{x^2+1}$, $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}dx$로 치환하면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'(a) &= \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2-1}(u^2+1)(u^2+a^2)}\cdot\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+2)(x^2+a^2+1)}dx \\
&= \frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+a^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{2(1-a^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

이다. $\mathcal{I}(0)=0$이므로 $\theta_1=\arctan a$에 대하여 $\mathcal{I}(a)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(a) &= \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{t^2+1}(1-t^2)}dt-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^a\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&\overset{t=\tan\theta}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\theta_1}\frac{\sec\theta}{1-\tan^2\theta}d\theta-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right]_0^a \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\theta_1}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}d\theta-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\theta_1}\frac{\cos\theta}{1-2\sin^2\theta}d\theta-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\theta_1}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\sin\theta}\right)d\theta-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+1}{\sqrt{2}\sin\theta-1}\right|\right]_0^{\theta_1}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{2}a-\sqrt{a^2+1}}\right|-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(\sqrt{2}a+\sqrt{a^2+1})(a-1)}{(\sqrt{2}a-\sqrt{a^2+1})(a+1)}\right| = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{a^2+1}}{a+1}\right|
\end{aligned}$$

따라서 식 (11)에 의해 답은 다음과 같다. (단, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$는 황금비이다.)

$$\begin{aligned}
I &= 2\mathcal{I}(1) + 2\mathcal{I}(3) - 2\pi \cdot \mathcal{J} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(2+\sqrt{3}) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(2+\sqrt{3}) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(\phi^2) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(2+\sqrt{3}) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\phi^2}{2+\sqrt{3}}\right)}
\end{aligned}$$

50. 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^1 \frac{\arctan(a\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)} dx$$

양변을 a로 미분하면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\arctan(a\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(a^2x^2+2a^2+1)} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{a^2+1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{a^2}{a^2x^2+2a^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{a^2+1} \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2+\frac{1}{a^2}}\right) dx \\
&= \frac{1}{a^2+1} \left[\arctan x - \frac{a}{\sqrt{2a^2+1}} \arctan\left(\frac{ax}{\sqrt{2a^2+1}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{a^2+1} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2a^2+1}} \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

이고, $\mathcal{I}(0) = 0$이므로 답은 $\mathcal{I}(1) = \int_0^1 \mathcal{I}'(a) da$이다. 한편 이상적분의 정의에 의해

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \mathcal{I}'(a)da &= \lim_{a\to\infty}\mathcal{I}(a) - \mathcal{I}(1) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx - \mathcal{I}(1) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{(x^2+2)+x^2}dx - \mathcal{I}(1) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}-x\cdot x/\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}}{1+\frac{x^2}{x^2+2}}dx - \mathcal{I}(1) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)^2} - \mathcal{I}(1) = \frac{\pi}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)\right]_0^1 - \mathcal{I}(1) \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \mathcal{I}(1)
\end{aligned} \tag{12}
$$

이고,

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \mathcal{I}'(a)da &= \int_1^\infty \frac{1}{a^2+1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}\right)\right]da \\
&\overset{a\mapsto\frac{1}{a}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{a^2}+1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+1}}\arctan\left(\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+1}}\right)\right]\cdot\frac{da}{a^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{a^2+1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\right)\right]da
\end{aligned}
$$

이다. 또한 $x>0$일 때 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$가 성립하므로 앞서 얻은 결과인 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{6}$를 이용하면

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \mathcal{I}'(a)da &= \int_0^1 \frac{1}{a^2+1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{a^2+2})\right)\right]da \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1}{a^2+1}da - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a^2+2}(a^2+1)}da + \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{a^2+2})}{\sqrt{a^2+2}(a^2+1)}da}_{=\mathcal{I}(1)} \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\arctan a\right]_0^1 - \frac{\pi^2}{12} + \mathcal{I}(1) \\
&= -\frac{\pi^2}{48} + \mathcal{I}(1)
\end{aligned} \tag{13}
$$

이므로 식 (12)와 식 (13)을 연립하면 다음을 얻는다.

$$\frac{\pi^2}{12} - \mathcal{I}(1) = \int_1^\infty \mathcal{I}'(a)da = -\frac{\pi^2}{48} + \mathcal{I}(1)$$

$$I = \mathcal{I}(1) = \boxed{\frac{5\pi^2}{96}}$$

또는 다음과 같이 중적분을 이용할 수도 있다. 양의 실수 a에 대하여 $\mathcal{I}(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{I}(a) := \int_0^a \frac{\arctan(\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \int_0^a \int_0^{\sqrt{x^2+2}} \frac{1}{y^2+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dydx$$

$u = x$, $v = \frac{\sqrt{x^2+2}}{y}$로 치환하면 야코비안은 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{\sqrt{u^2+2}}{v^2}$이므로 $x > 0$일 때 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$임을 이용하면

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(a) &= \int_1^\infty \int_0^a \frac{1}{(u^2+1)(u^2+v^2+2)}dudv \\
&= \int_1^\infty \int_0^a \frac{1}{v^2+1}\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+v^2+2}\right)dudv \\
&= \frac{\pi}{4}\arctan a - \int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{v^2+2}}\right)}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv \\
&= \frac{\pi}{4}\arctan a - \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv + \int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{v^2+2}}{a}\right)}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv
\end{aligned}$$

이다. 한편 앞선 결과에 의해

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv = \left[\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+2}}\right)\right]_1^\infty = \frac{\pi}{12}$$

이므로

$$\mathcal{I}(a) = \frac{\pi}{4}\arctan a - \frac{\pi^2}{24} + \int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{v^2+2}}{a}\right)}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv$$

이다. $a = 1$을 대입하면

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \mathcal{I}(1) &= \frac{\pi}{4}\arctan(1) - \frac{\pi^2}{24} + \int_1^\infty \frac{\arctan(\sqrt{v^2+2})}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv \\
&= \frac{\pi^2}{48} + \int_1^\infty \frac{\arctan(\sqrt{v^2+2})}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv
\end{aligned} \tag{14}
$$

이고, a를 양의 무한대로 보내는 극한을 취하면

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\arctan(\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \lim_{a\to\infty}\mathcal{I}(a) &= \frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}\arctan(a) - \frac{\pi^2}{24} + \underbrace{\lim_{a\to\infty}\int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{v^2+2}}{a}\right)}{\sqrt{v^2+2}(v^2+1)}dv}_{=0} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned} \tag{15}
$$

이다. 따라서 식 (14)와 식 (15)를 연립하면 다음을 얻는다.

$$
2\mathcal{I}(1) = \frac{\pi^2}{48} + \int_0^\infty \frac{\arctan(\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \frac{\pi^2}{48} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{5\pi^2}{48}
$$

$$
\therefore \mathcal{I}(1) = \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}(x^2+1)}dx = \boxed{\frac{5\pi^2}{96}}
$$

이 적분은 Ahmed's Integral로 알려져 있는 적분이며, 원본 논문 및 확장 정리에 관한 논의는 각각 이곳과 이곳에서 확인할 수 있다.

References

[1] Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 40(162), 561-563.

[2] Letac, G. (1977). Which functions preserve Cauchy laws?. Proceedings of the American Mathematical Society, 67(2), 277-286.

[3] Hijab, O. (2007). Introduction to calculus and classical analysis. Springer.

[4] Woods, F. S. (1926). Advanced calculus: a course arranged with special reference to the needs of students of applied mathematics. Ginn.

[5] Ahmed, Z., Dale, K., Lamb, G. L. (2002). Definitely an Integral: 10884. The American Mathematical Monthly, 109(7), 670-671.