제 2 교시

2024학년도 KUME 모의고사

수학 영역

성명		수험번호						-				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

삶이란 이렇듯 꿈꾸는 것

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2024학년도 KUME(쿠메) 모의고사

시행 : 2023년 11월 1일 (수)

집　필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 24

오익재 이성준 강재혁 김현승 문시윤 박가언 박진우 배견우 배지효 안병현 안승우 윤여빈 이신우 정다은 정진오 진현우 최정민

손해설 : 이성준 안승우

검　토 : 방민서 오익재 이성준

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log_6 \sqrt{2} - \log_6 \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$\log_6\left(\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \log_6 (6)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Sol1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{x}}{\dfrac{x+5}{x}}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}+3}{1+\cancelto{0}{\frac{5}{x}}} = \frac{\sqrt{4}+3}{1} = 5$

Sol2) 최고차항 비교

$\sqrt{4x^2+1} \Rightarrow 2x$ / $3x$ / $x+5 \Rightarrow x$

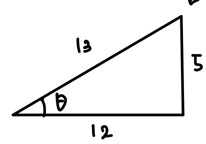
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3x}{x} = 5$

3. $\cos\theta < 0$ 이고 $\tan(-\theta) = -\dfrac{5}{12}$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

1) $\cos\theta < 0 \rightarrow \theta$: 제 2,3 사분면

2) $\tan(-\theta) = -\frac{5}{12} \rightarrow \tan\theta = \frac{5}{12} \rightarrow \theta$: 제 3 사분면



$\rightarrow \sin\theta = \underbrace{\frac{5}{13}}_{크기}$

제 3사분면에서 $\sin\theta < 0$ 이므로 $\sin\theta = -\frac{5}{13}$

4. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x^3+x+2)f(x)$$

라 하자. $f(2) = 1$, $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ 일 때, $g'(2)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$g'(x) = (3x^2+1)f(x) + (x^3+x+2)f'(x)$

$x=2$ 대입

$g'(2) = (13)\underbrace{f(2)}_{=1} + (12)\cdot\underbrace{f'(2)}_{=-\frac{1}{2}}$

$= 13 - 6$

$= 7$

5. 첫째항이 -8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$2(a_6 - a_4) = a_9$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$2 \times 2d = -8 + 8d \Rightarrow d = 2$

$a_{10} = -8 + 9d = 10$

6. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-1)}{x-a} & (x \neq a) \\ b & (x = a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 최솟값은? [3점]

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

- 연속조건 : 극한값이 존재 & 극한값 = 함숫값

$\Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-a} = b$

$a = 0$ or 1 or -1

① $a = 0$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x} = -1 = b \rightarrow a+b = -1$

최소

② $a = 1$

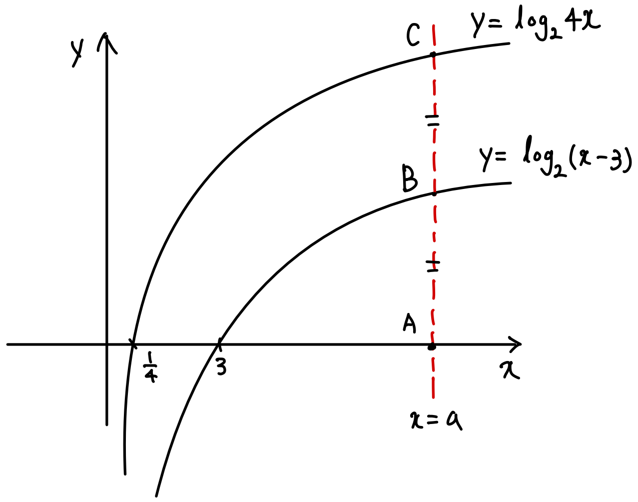
$\lim_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 = b \rightarrow a+b = 3$

③ $a = -1$

$\lim_{x \to -1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 = b \rightarrow a+b = 1$

7. 상수 $a\,(a>3)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\log_2(x-3)$, $y=\log_2 4x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18



$\overline{AB} = \overline{BC}$

↳ $\log_2(a-3) = \log_2(4a) - \log_2(a-3)$

↳ $2\log_2(a-3) = \log_2(4a)$

↳ $(a-3)^2 = 4a$

↳ $a^2 - 10a + 9 = 0$ $(a-9)(a-1) = 0$

$a = \cancel{1}$ or 9 $(a>3)$

$\therefore a = 9$

8. 삼차함수 $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,0)$ 에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점의 x 좌표를 a 라 할 때, $f'(a)$ 의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$x=2$ 에서의 접선 : $y=mx+n$

$\to f(x)-mx-n = x^3-9x^2+26x-24-mx-n$
$= (x-a)(x-2)^2$

근과 계수의 관계 : $9=2+2+a \to a=5$

$f'(x)=3x^2-18x+26$

$\Rightarrow f'(5)=75-90+26=11$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t^3-6t^2+at+b$$

이다. 상수 $k\,(k>1)$에 대하여 점 P 는 시각 ① $t=1$, $t=k$일 때 원점을 지나고 ② 시각 $t=1$일 때 운동 방향이 바뀐다. 점 P 의 시각 $t=k$에서의 속력은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

① $x(1)=x(k)=0$

$1-6+a+b=0 \to a+b=5$

② $x'(1)=v(1)=0$

$v(x)=3t^2-12t+a$

$v(1)=-9+a=0 \Rightarrow a=9$
$\Rightarrow b=-4$

$x(k)=k^3-6k^2+9k-4=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 9 & -4 \\ & & 1 & -5 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 4 & \boxed{0} \\ & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow k=4$

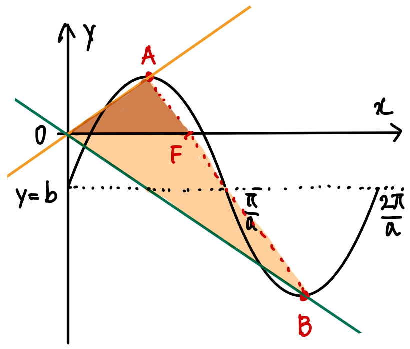
$v(k)=3\cdot16-12\cdot4+9$
$=9$

10. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 곡선

$$y=4\sin ax+b \quad \left(0\leq x\leq \frac{2\pi}{a}\right)$$

위의 점 중 y좌표가 최대인 점을 A, 최소인 점을 B라 하자. 직선 OA 의 기울기와 직선 OB 의 기울기의 합이 0이고 삼각형 AOB 의 넓이가 3π일 때, $a+b$의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3



$A\left(\frac{\pi}{2a}, b+4\right), B\left(\frac{3\pi}{2a}, b-4\right)$

$\underbrace{\frac{2a}{\pi}(b+4)}_{\text{OA 기울기}}+\underbrace{\frac{2a}{3\pi}(b-4)}_{\text{OB 기울기}}=0$

$\Rightarrow b=-2$

$\overline{AB}$ 기울기 : $-\frac{8a}{\pi}$

직선 $\overline{AB}$: $y=-\frac{8a}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2a}\right)+2$

$\to F\left(\frac{3\pi}{4a},0\right)$

↳ 직선 $\overline{AB}$의 x절편

△AOB의 넓이 = △AOF의 넓이 + △FOB의 넓이

$3\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4a}\times2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4a}\times6\right)$

$\Rightarrow a=1$

$\therefore a+b=-1$

11. 모든 항이 실수이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_6의 값은? [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 5$ $\rightarrow a_1 \neq 0$

(나) $\underbrace{\sum_{k=1}^{4}(a_k - |a_k|)}_{<0} = \frac{5}{2}a_2$ $\rightarrow a_2 < 0$

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$a_n = a\cdot(r)^{n-1} \neq 0$

1) $a>0,\ r>0$ (x)

→ $a_k - |a_k| = 0$ → $a_2 = 0$ $a_n \neq 0$이므로 X

2) $a<0,\ r<0$ (x)

(나) 조건에서 확인한 $a_2(=ar)<0$을 만족 X

3) $a<0,\ r>0$ (x)

→ $2a_1 + 2a_3 = \frac{5}{2}a_2$

⇒ $1 + r^2 = \frac{5}{4}r$ → $4r^2 - 5r + 4 = 0$

$D = 25 - 64 < 0$

⇒ 실수 r이 존재하지 않음.

4) $a>0,\ r<0$ (o)

→ $\sum_{k=1}^{4} a_k = 5$, $2a_2 + 2a_4 = \frac{5}{2}a_2$

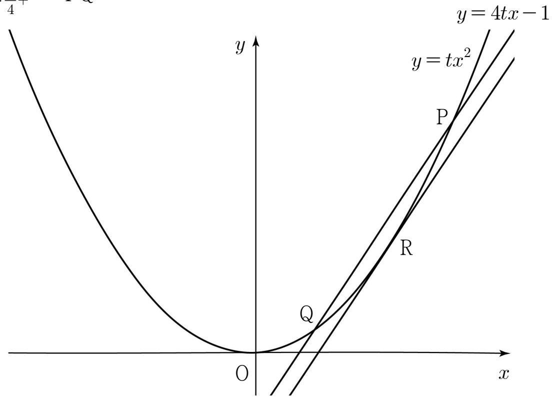
⇒ $a_4 = \frac{1}{4}a_2$ ⇒ $r = -\frac{1}{2}$

$a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}a = 5$ → $a = 8$

⇒ $a_n = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

∴ $a_6 = -\frac{1}{4}$

12. 그림과 같이 실수 $t\left(t>\frac{1}{4}\right)$에 대하여 곡선 $y=tx^2$과 직선 $y=4tx-1$이 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 P, x좌표가 작은 점을 Q라 하자. 직선 $y=4tx-1$과 평행하고 곡선 $y=tx^2$에 접하는 직선이 $y=tx^2$과 만나는 점을 R이라 할 때, $\lim_{t\to\frac{1}{4}+}\frac{\overline{PR}^2-\overline{QR}^2}{\overline{PQ}^3}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{32}$

$P(\beta, t\beta^2)$, $Q(\alpha, t\alpha^2)$, $R\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)$

$tx^2 - 4tx + 1 = 0$ 의 두 근 α, β → $\alpha+\beta = 4$, $\alpha\beta = \frac{1}{t}$

↳ $R(2, 4t)$

$\overline{PQ} = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + t^2(\beta^2-\alpha^2)^2} = (\beta-\alpha)\sqrt{1+16t^2}$

$\overline{PR}^2 = (\beta-2)^2 + (t\beta^2-4t)^2$

$\overline{QR}^2 = (\alpha-2)^2 + (t\alpha^2-4t)^2$

⇒ $\overline{PR}^2 - \overline{QR}^2 = \underbrace{(\beta-2)^2-(\alpha-2)^2}_{\text{합차 공식}} + \underbrace{(t\beta^2-4t)^2-(t\alpha^2-4t)^2}_{\text{합차 공식}}$

$= (\beta-\alpha)(\overset{0}{\cancel{\alpha+\beta-4}}) + (t\beta^2-t\alpha^2)(t\beta^2+t\alpha^2-8t)$

⇒ $\lim_{t\to 1/4^+}\frac{\overline{PR}^2-\overline{QR}^2}{\overline{PQ}^3} = \lim_{t\to 1/4^+}\frac{t^2(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2-8)}{(\beta-\alpha)^3(1+16t^2)\sqrt{1+16t^2}}$

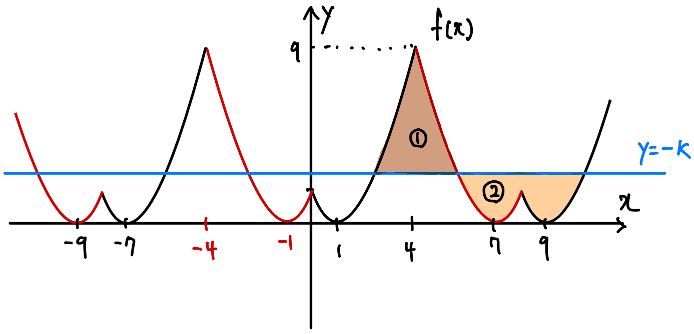
정리 ⇒ $\lim_{t\to 1/4^+}\frac{4t^2\left(\cancel{8-\frac{2}{t}}\right)}{\underset{2}{\left(\cancel{16-\frac{4}{t}}\right)}(1+16t^2)^{3/2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 4$일 때, $f(x) = (x-1)^2$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+8)$, $f(x) = f(8-x)$이다.
> ↳ 주기가 8
> ↳ $x=4$에 대칭

상수 k에 대하여 함수 $g(x) = \int_0^x \{f(t)+k\}\,dt$가 최댓값을 가질 때, k의 값은? [4점]

① -3 ② $-\frac{8}{3}$ ③ $-\frac{7}{3}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{3}$



$-k \le 0$ $(k \ge 0)$ 이면 $\{f(x)+k\} \ge 0$ $(= g'(x))$ 이므로 x가 증가할 때

$g(x)$는 계속 증가하여 최댓값을 가지지 않음.

$-k \ge 9$ $(k \le -9)$ 이면 $\{f(x)+k\} \le 0$ $(= g'(x))$ 이므로 x가 감소할 때

$g(x)$는 계속 증가하여 최댓값을 가지지 않음.

$-9 < k < 0$ 에서 $g(x)$가 최댓값을 가지려면

① = ② 여야 한다.

$\Rightarrow \frac{1}{2}① = \frac{1}{2}② \Rightarrow \int_0^4 f(x) + k\,dx = 0$

$= \int_0^4 (x-1)^2 + k\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + kx\right]_0^4$

$= 9 + 4k + \frac{1}{3} = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{7}{3}$

14. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{9} a_k$의 값은? [4점] .

> (가) $a_4 = 2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+2} = \begin{cases} |a_{n+1} - 6| & (a_n a_{n+1} < 6) \\ \dfrac{2a_{n+1}}{a_n} & (a_n a_{n+1} \ge 6) \end{cases}$$
> 이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

① $a_2 a_3 < 6$ * a_n = 자연수

$a_4 = 2$이므로 a_3는 8 or 4

1) $a_3 = 8$

$a_2 a_3 < 6$ 만족 X

2) $a_3 = 4$

$a_2 a_3 < 6$ 이므로 $a_2 = 1$

이때 a_1로 가능한 "자연수"가 없음. → 불가능.

② $a_2 a_3 \ge 6$

$\frac{2a_3}{a_2} = 2$ 이므로 $a_2 = a_3 = k$

$a_2 a_3 \ge 6 \rightarrow k \ge 3 \rightarrow a_3 a_4 \ge 6$

$\Rightarrow a_5 = \frac{4}{a_3}$

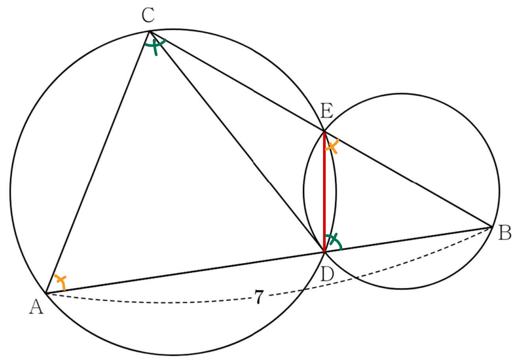
a_5가 자연수이려면 $a_3 = 4$ $(= a_2)$

$\Rightarrow a_1 = 2$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	$\cdots$
2	4	4	2	1	5	1	5	1	

$\therefore \sum_{k=1}^{9} a_k = 25$

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D에 대하여 삼각형 ADC가 정삼각형이고, 삼각형 ADC의 외접원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이와 세 점 B, D, E를 지나는 원의 반지름의 길이의 비가 5 : 3일 때, 선분 CE의 길이는? [4점]



① $\frac{11}{4}$ ② $\frac{23}{8}$ ③ 3 ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

$\angle CED = \pi - \angle BED$

↳ $\sin(\angle CED) = \sin(\pi - \angle BED) = \sin(\angle BED)$

↳ 사인 법칙에 의해

$\overline{CD} : \overline{BD} = \overline{AD} : \overline{BD} = 5 : 3$

두 원의 반지름 비

↳ $\overline{AD} = 5k$, $\overline{BD} = 3k$ 라 하면

$\overline{AD} + \overline{BD} = 8k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{8}$

↳ △ABC에서 코사인 법칙에 의해

$(\overline{BC})^2 = (8k)^2 + (5k)^2 - 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot 8k \cdot 5k = 49k^2$

$\Rightarrow \overline{BC} = 7k$

$\angle ACB = \angle EDB$, $\angle BAC = \angle BED$ 이므로

△BAC 와 △BED는 AA 닮음이다.

$\Rightarrow \overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BA} : \overline{BE}$

$7k : 3k = 7 : \overline{BE} \Rightarrow \overline{BE} = 3$

$\overline{CE} = \underbrace{7k}_{\frac{49}{8}} - \underbrace{\overline{BE}}_{3} = \frac{25}{8}$

단답형

16. 부등식 $3^{x-5} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$x - 5 \le -2x + 4$

$\Rightarrow 3x \le 9$

$\Rightarrow x \le 3$ (x는 자연수)

$1 + 2 + 3 = 6$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$이고 $f(2) = 5$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + C$

$f(2) = 5 = 8 - 24 + 18 + C \rightarrow C = 3$

$f(3) = 27 - 54 + 27 + 3 = 3$

18. 두 상수 a, b에 대하여 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^2+a^2$이 $x=1$에서 극솟값 6을 가질 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$a\neq 0$, $f'(1)=0$, $f(1)=6$

$f'(x)=4ax^3+2bx \to f'(1)=4a+2b=0$

$f(1)=6=a+b+a^2=6$

$\Rightarrow a^2+a-2a=6$

$\Rightarrow a^2-a-6=0$ $\quad (a-3)(a+2)=0$

$a=3$ or -2

$f(x)=f(-x)$ 이므로 우함수이다.

1) $a=3$ $\quad$ ~~2)~~ $a=-2$

$\Rightarrow a=3$, $b=-6$

$\to f(2)=16a+4b+a^2=48-24+9=33$

19. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{6}5a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_k+10),\quad 4a_7-a_6=-2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{6}5a_k-\sum_{k=1}^{5}a_k=50=5a_6+4\sum_{k=1}^{5}a_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(5a_6+4\sum_{k=1}^{5}a_k\right)}_{=50}+\underbrace{\left(4a_7-a_6\right)}_{=-2}=4\sum_{k=1}^{7}a_6$$

$$\Rightarrow 4\sum_{k=1}^{7}a_6=48$$

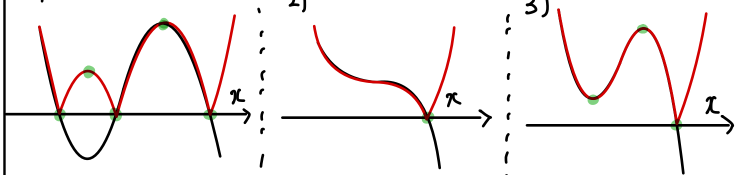
$$\therefore \sum_{k=1}^{7}a_6=12$$

20. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

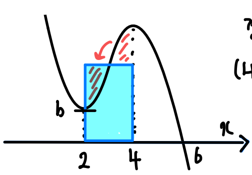
> (가) 함수 $|f(x)|$는 오직 $x=2$, $x=4$, $x=6$에서만 극값을 가진다.
>
> (나) $\int_{2}^{4}f(x)dx=72$
>
> (다) $1\le x<5$일 때 $g(x)=f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+4)+g(x)=a$를 만족시킨다.

$\int_{2}^{14}g(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

(가) — : $f(x)$ — : $|f(x)|$ ● : 극점



$\Rightarrow f(x)$



(나)조건에 의해 x축이 극댓값보다 위에 있는 경우를 제외할 수 있다.

(나) 조건에 의해 □ 의 넓이가 72 이므로 변곡점의 y좌표는 36이다.

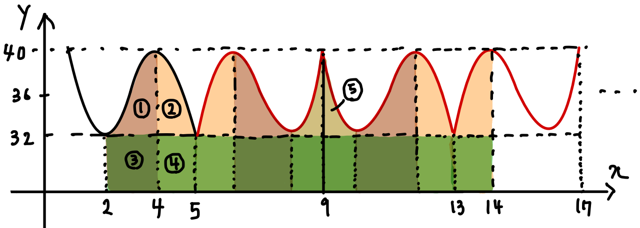
$\to f(x)=a(x-2)^2(\underbrace{x-5}_{\text{비율관계}})+b$

$\to f(6)=0=16a+b$ / $f(3)=36=-2a+b$

$\Rightarrow a=-2$, $b=32$

$\Rightarrow f(x)=-2(x-2)^2(x-5)+32$

$\Rightarrow g(x)$



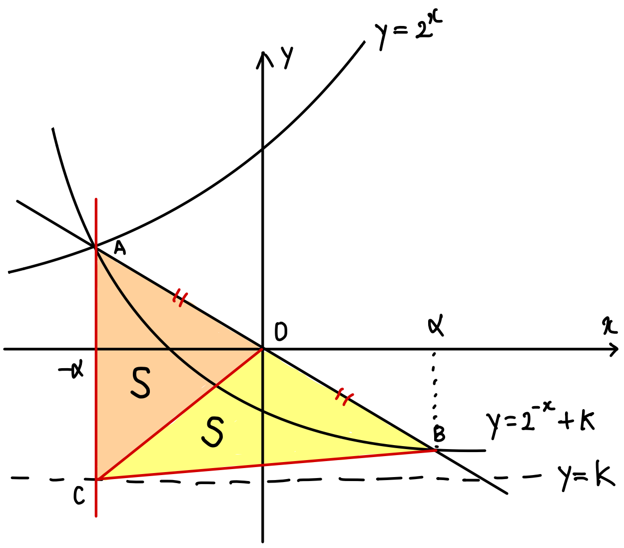
①+②+⑤ = 16 (변곡점 대칭) / ①+③ = 72 (나)

①+② $=\frac{|-2|}{12}(3)^4=\frac{27}{2}$ (넓이 공식)

$\Rightarrow$ ① = 8 / ② = $\frac{11}{2}$ / ③ = 64 / ④ = 32 / ⑤ = $\frac{5}{2}$

$\int_{2}^{14}g(x)dx$ = 3① + 4② + 3③ + 6④ + 2⑤ = 435

21. 상수 $k\,(k<-1)$에 대하여 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=2^{-x}+k$가 만나는 점을 A라 하고, 원점 O와 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=2^{-x}+k$와 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{-x}+k$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. 두 삼각형 OAC, OBC의 넓이가 같을 때, $12\times k^{2}$의 값을 구하시오. [4점]



$\triangle OAC$ 넓이 $=$ $\triangle OCB$ 넓이 $\Rightarrow \overline{AO}=\overline{OB}$

$\Rightarrow A(-\alpha, 2^{-\alpha}),\ B(\alpha, -2^{-\alpha})\quad (\alpha>0)$

$2^{-\alpha}=2^{\alpha}+k,\quad 2^{-\alpha}+k=-2^{-\alpha}$

$2^{\alpha}=A\ (A>0)$

$\rightarrow A-\frac{1}{A}=-k,\quad \frac{2}{A}=-k \Rightarrow A^2=3$

$A=\sqrt{3}$

$\Rightarrow k=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad k^2=\frac{4}{3}$

$\therefore 12k^2=16$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서,「**선택과목(확률과 통계)**」문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f(x-1)+2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=x+t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. $\lim_{t\to0-}h(t)-\lim_{t\to0+}h(t)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

① 삼차함수 와 일차함수의 최대 교점의 개수는 3이다.
$f(x)$, $f(x-1)+2$ $\quad$ $x+t$

⇒ $g(x)$와 $x+t$ $(x<0),(x\ge0)$에서 각각 최대 3개의 교점이 생긴다. → $0\le h(t)\le 6$

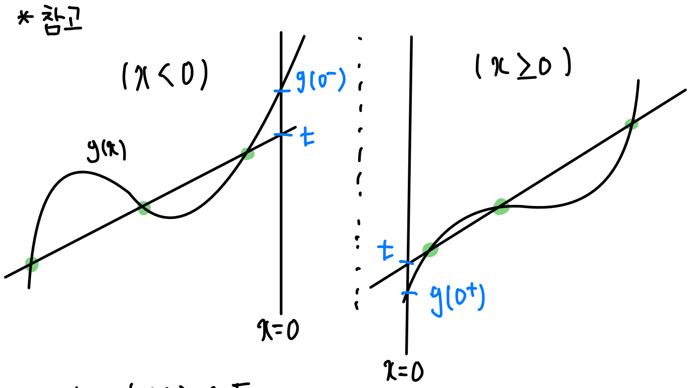
② $g(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $h(t)\ge 1$

③ $h(t)$가 6이려면
$$\begin{cases} g(0^-) = f(0^-) > 0^- + t = t \\ g(0^+) = \underbrace{f(0^+-1)-2}_{x=0\text{에서 연속}} \le 0^+ + t = t \end{cases}$$

⇒ $g(0)>t$ 이면서 $g(0)\le 0$ 이어야 $h(t)=6$ 이다.

⇒ $h(t)=6$ … 불가능. ⇒ $h(t)\le 5$

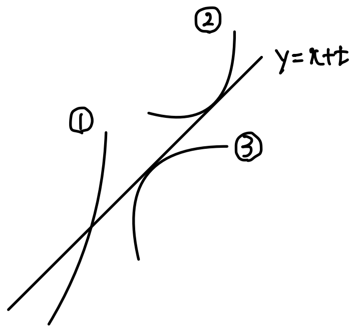
* 참고



⇒ $1\le h(t)\le 5$

⇒ $\underbrace{\lim_{t\to0-}h(t)}_{=5}-\underbrace{\lim_{t\to0+}h(t)}_{=1}=5-1=4$

g(x)와 x+t가 교점이 생기는 상황



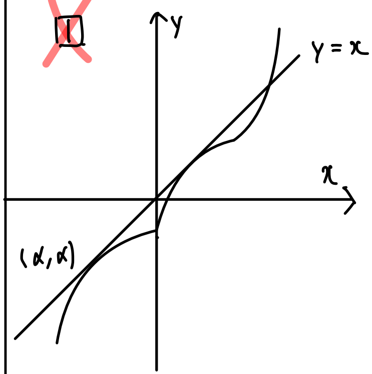
① $h(0^-)$와 $h(0^+)$가 같다.

② $h(0^+)-h(0^-)=2$
$g(x)$가 위에서 접함.

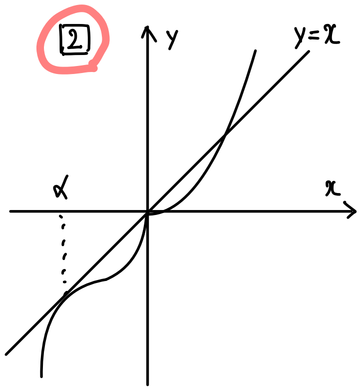
③ $h(0^-)-h(0^+)=2$
$g(x)$가 아래에서 접함.

⇒ $h(0^-)=5$, $h(0^+)=1$ 이 되기 위해서
$y=x$ 그래프에 대해 ③ 상황이 두 번 필요

~~$\boxed{1}$~~



$\boxed{2}$



$\boxed{1}$ 처럼 (α,α)에서 $y=x$와 접하면 평행이동한 $(\alpha+1,\alpha+2)$에서도 $y=x$와 접해야 한다. ⋯> 불가능

⇒ $\boxed{2}$ 상황만이 $\lim_{t\to0-}h(t)-\lim_{t\to0+}h(t)=5-1=4$ 를 만족한다.

$f(x)-x=x(x-\alpha)^2$, $\quad g(0^-)=g(0^+)$
⇒ $f(-1)+2=f(0)=0$
→ $\alpha=-2$

⇒ $f(x)=x(x+2)^2+x$

∴ $f(6)=390$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 **수학 영역(확률과 통계)**

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

${}_6C_r \times (2x)^r \times 1^{6-r}$

$r=4 \rightarrow {}_6C_4 \cdot 2^4 x^4 = 15 \times 16 = 240$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(80,\ p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{V}(2X)$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, $0<p<1$) [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$X \sim B(80, p)$, $E(X) = 80p$. $V(X) = 80p(1-p)$

$E(X) = V(2X) = 4V(X)$ 에서

$80p = 4 \cdot 80p(1-p)$. $1 = 4(1-p)$, $p = \frac{3}{4}$

$\therefore V(X) = 80 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 15$

25. 흰색 손수건 2장, 검은색 손수건 6장이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수만큼 손수건을 꺼낼 때, 꺼낸 손수건 중에서 검은색 손수건이 4장 이하일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{37}{42}$ ④ $\frac{19}{21}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

1 − (검은색 5개 이상 뽑을 확률)

• 주사위 5가 나올 때 : $\frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_0 \times {}_6C_5}{{}_8C_5}$

$= \frac{1}{6} \times \frac{6}{56} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{28}$

• 주사위 6이 나올 때 : $\frac{1}{6} \times \left(\frac{{}_2C_0 \times {}_6C_6}{{}_8C_6} + \frac{{}_2C_1 \times {}_6C_5}{{}_8C_6} \right)$

$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{28} + \frac{12}{28} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{13}{28}$

$\therefore 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{28} + \frac{13}{28} \right) = 1 - \frac{1}{\cancel{6}_{3}} \times \frac{\cancel{16}^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{28}_{7}} = \frac{19}{21}$

26. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드가 서로 이웃하거나 A 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드가 양 끝에 놓일 확률은? B [3점]

1	2	3	4	5	6

① $\frac{19}{60}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{11}{30}$ ⑤ $\frac{23}{60}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

① $P(A)$

(2,3), 1, 4, 5, 6 ⇒ 나열 $5! \times 2$

$\therefore P(A) = \frac{5! \times 2}{6!}$

② $P(B)$

1 _ _ _ _ 2

2 _ _ _ _ 1 → $4! \times 2$

$\therefore P(B) = \frac{4! \times 2}{6!}$

③ $P(A \cap B)$

1 _ _ _ 3 2

2 3 _ _ _ 1 ⇒ $3! \times 2$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{3! \times 2}{6!}$

$\therefore P(A \cup B) = \frac{5! \times 2 + 4! \times 2 - 3! \times 2}{6!}$

$= \frac{\cancel{2} \times \cancel{3!}(4 \times 5 + 4 - 1)}{\cancel{6!}} = \frac{23}{2 \times 5 \times 6} = \frac{23}{60}$

$\cancel{4}_{2} \times 5 \times 6$

27. 어느 지역에 사는 고등학생들의 한 달 인터넷 강의 수강 시간은 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. − X

이 지역에 사는 고등학생들 중에서 n명을 임의추출하여 구한 한 달 인터넷 강의 수강 시간의 표본평균이 80일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.

이 지역에 사는 고등학생들 중에서 100명을 다시 임의추출하여 구한 한 달 인터넷 강의 수강 시간의 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.

$c-a=19.2$, $c-b=18.22$일 때, $n+\overline{x}$의 값은? (단, 인터넷 강의 수강 시간의 단위는 시간이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 480 ② 500 ③ 520 ④ 540 ⑤ 560

$X \sim N(m, 5^2)$

① $80 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \le m \le 80 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

$a = 80 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$, $b = 80 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

② $\overline{x} - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x} + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$

$c = \overline{x} - 2.58 \times \frac{5}{10} = \overline{x} - 1.29.$

$c-a = 19.2$. $c-b = 18.22$ 이므로

$b-a = 0.98 = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 2 \times \cancel{1.96}^{\,2} \times 5 \times \frac{1}{\cancel{0.98}} = 20$

$n = 400.$

$b = 80 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{400}} = 80 + 1.96 \times \frac{1}{4} = 80.49$

$c = b + 18.22 = \overline{x} - 1.29$ 에서

$\overline{x} = b + 18.22 + 1.29 = 100.$

$\therefore n + \overline{x} = 400 + 100 = 500.$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1) \times f(3) = 4$ … A
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4가 아니다. … B

① 237 ② 240 ③ 243 ④ 246 ⑤ 249

$n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap B^c)$

1. $n(A)$

$f(1) \times f(3) = 4 \Rightarrow (f(1), f(3)) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$

$\therefore n(A) = 3 \times 5^3 = 375$

2. $n(A \cap B^c)$

$\Rightarrow f(1) \times f(3) = 4$ 이면서 치역의 원소의 개수가 4개.

① $f(1) = 2$, $f(3) = 2$

$X \xrightarrow{f} X$

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

• 1, 3, 4, 5 중 세 수 택하여 정의역의 원소 2, 4, 5 와 대응

$\Rightarrow {}_4C_3 \times 3! = 24$

② $f(1) = 1$. $f(3) = 4$

$X \xrightarrow{f} X$

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

1. 치역 원소 나머지 2개를 선택한다. $({}_3C_2)$

2-1. 정의역 원소 2, 4, 5가 1과 4로 X

$\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 - 2 = 6$

몰빵

2-2. 정의역 원소 2, 4, 5가 1로 O. 4로 X

$\Rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$

2-3. 정의역 원소 2, 4, 5가 1로 X 4로 O

$\Rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\Rightarrow {}_3C_2 \times (6+6+6) = 3 \times 18 = 54$

③ $f(1) = 4$. $f(3) = 1$: ②번과 같은 방법으로 진행 → 54

$\therefore n(A \cap B^c) = 24 + 54 + 54 = 132$

$\therefore n(A \cap B) = 375 - 132 = 243$

단답형

29. 자연수 k에 대하여 $|a|+|b|+|c|=k$를 만족시키는 세 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수가 486일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

① a.b.c 셋 다 0이 아닐 때

$a+b+c=k$. $a'+b'+c'=k-3$.

$\Rightarrow {}_3H_{k-3}$

양수, 음수 다 가능하므로 $2\times2\times2\times{}_3H_{k-3} = 8\times{}_3H_{k-3}$

② a.b.c 중 하나가 0일 때

0인 수 고르기 : ${}_3C_1=3$

$b+c=k$. $b'+c'=k-2$

$\Rightarrow {}_2H_{k-2}$

$\therefore 3\times2\times2\times{}_2H_{k-2} = 12\times{}_2H_{k-2}$

③ a.b.c 중 둘이 0일 때

0인 수 고르기 : ${}_3C_2=3$

$|c|=k \quad \therefore 3\times2=6$

$\therefore 8\times{}_3H_{k-3} + 12\times{}_2H_{k-2} + 6 = 486$

${}_3H_{k-3} = {}_{k-1}C_{k-3} = {}_{k-1}C_2 = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$

${}_2H_{k-2} = {}_{k-1}C_{k-2} = {}_{k-1}C_1 = k-1$ 이므로

$4(k-1)(k-2)+12(k-1)=480$

$\Rightarrow 4k^2-12k+8+12k-12=480$

$\Rightarrow 4k^2-4=480$

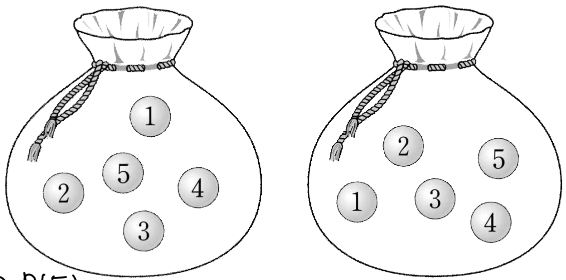
$\Rightarrow k^2=121 \qquad \therefore k=11$

30. 두 주머니 A, B에 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이면 즉
> 꺼낸 공을 주머니 B에 넣고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이면 즉
> 주머니 A에 들어 있는 4개의 공을 주머니 B에
> 넣는다.

위의 시행을 한 번 한 후, 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸다. 이 3개의 공에 적힌 수의 합이 홀수일 때, E 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 3보다 작을 확률은 F $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$P(F|E) = \frac{P(E\cap F)}{P(E)}$



A　　　　　B

① $P(E)$

세 수의 합이 홀수 : (짝,짝,홀), (홀,홀,홀)

1. A에서 짝수

$: \frac{2}{5}\times\left(\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}+\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{9+1}{20} = \frac{1}{5}$

2. A에서 홀수

$: \frac{3}{5}\times\left(\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}+\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}\right) = \frac{3}{5}\times\frac{30+10}{84} = \frac{2}{7}$

$\therefore P(E) = \frac{1}{5}+\frac{2}{7} = \frac{17}{35}$

② $P(E\cap F)$

1. 뽑은 수가 1 $\rightarrow \frac{1}{5}\times\frac{40}{84} = \frac{2}{21}$

2. 뽑은 수가 2 $\rightarrow \frac{1}{5}\times\frac{10}{20} = \frac{1}{10}$

$\therefore P(E\cap F) = \frac{2}{21}+\frac{1}{10} = \frac{41}{210}$

$\therefore P(F|E) = \frac{\frac{41}{210}}{\frac{17}{35}} = \frac{41\times\cancel{35}}{\cancel{210}_{6}\times17} = \frac{41}{102}$

$\therefore p+q=143$

※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+8n+4}-n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+8n+4}+n}{n^2+8n+4-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+8n+4}+n}{8n+4}$$

$$=\frac{1+1}{8}=\frac{1}{4}$$

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+4k}{2n^2+kn+2k^2}$ 의 값은? [3점]

① $\ln\frac{3}{2}$ ② $\ln 2$ ③ $\ln\frac{5}{2}$ ④ $\ln 3$ ⑤ $\ln\frac{7}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}+\frac{4k}{n^2}}{2+\frac{k}{n}+2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+4\cdot\left(\frac{k}{n}\right)}{2+\frac{k}{n}+2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{4x+1}{2x^2+x+2}\,dx=\left[\ln\left|2x^2+x+2\right|\right]_0^1$$

$$=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^n+4\times3^n}{a_n+3^n}=\frac{2}{7}$일 때, a_1의 값은? [3점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

$a_n = a \times r^n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^n+4\times3^n}{a\times r^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{0}+4}{a\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}$

$\left|\frac{r}{3}\right|<1$ 이면 극한값이 $\frac{4}{0+1}\neq\frac{2}{7}$ 이므로 모순

$\left|\frac{r}{3}\right|>1$ 이면 극한값이 $0\neq\frac{2}{7}$ 이므로 모순

극한값이 수렴하기 위해선 $r=3$

$\frac{4}{a+1}=\frac{2}{7} \Rightarrow a=13$

$\therefore a_n = 13\cdot3^n$. $a_1=39$.

26. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선 C를

$$x=\ln(te^t+e^2),\quad y=e^2(t+1)$$

이라 하자. 곡선 C와 곡선 $y=e^x$이 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^2}{\frac{e^t+te^t}{te^t+e^2}}=\frac{e^2(te^t+e^2)}{e^t+te^t}$

$P(a, e^a)$ 라 하면

$e^2(t+1)=e^{\ln(te^t+e^2)}$ 를 만족시키는 t는

$e^2t+e^2=te^t+e^2$. $e^2t=te^t$. $t(e^2-e^t)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$.

$t>0$ 이므로 $t=2$.

즉, $t=2$일 때 곡선 C와 곡선 $y=e^x$ 이 P에서 만나고,

점 P에서의 접선의 기울기는 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=\frac{\cancel{e^2}(\cancel{2e^2+e^2})}{\cancel{e^2+2e^2}}=e^2$

27. 양수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{4}e^{x}+e^{-x}$과 x축 및 두 직선 $x=-t$, $x=t$로 둘러싸인 도형을 A라 하자. A의 넓이가 $\frac{5\sqrt{e}}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$일 때, A의 둘레의 길이는? [3점]

① $\frac{5\sqrt{e}}{4}$ ② $\frac{5\sqrt{e}}{2}$ ③ $5\sqrt{e}$

④ $\frac{5\sqrt{e}}{4}+1$ ⑤ $\frac{5\sqrt{e}}{2}+1$

$f(x)=\frac{1}{4}e^{x}+e^{-x}$ 라 하자.

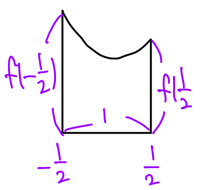
A의 넓이는 $\int_{-t}^{t}\left(\frac{1}{4}e^{x}+e^{-x}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}e^{x}-e^{-x}\right]_{-t}^{t}$

$=\frac{1}{4}e^{t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-t}+e^{t}=\frac{5}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}$

$\frac{5}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}=\frac{5\sqrt{e}}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow e^{t}-e^{-t}=\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}$. $t=\frac{1}{2}$.



$f'(x)=\frac{1}{4}e^{x}-e^{-x}$

$t=-\frac{1}{2}$부터 $t=\frac{1}{2}$까지 곡선의 길이는

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+f'(x)^{2}}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}\,dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}e^{x}+e^{-x}\right)dx$

$=\frac{5\sqrt{e}}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

$\therefore \frac{5\sqrt{e}}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+1$

$=\frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}}}+\cancel{\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}}+e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}\cancel{+e^{-\frac{1}{2}}}+1$

$=\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}}+1=\frac{5\sqrt{e}}{2}+1$.

28. $x=-1$에서 극댓값을 갖는 함수 $f(x)=(x^{2}+ax+b)e^{x}$과 $f'(t)\neq 0$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $h(t)$를

$$h(t)=\begin{cases} g(t) & (f'(t)\neq 0) \\ -1 & (f'(t)=0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 극값을 갖는 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, α_3이다. $\alpha_1+\alpha_2+h(\alpha_3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

#28.

- $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$ 가 $x=-1$ 에서 극대이므로
  $f'(x)=(x^2+ax+b+2x+a)e^x=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$
  $f'(-1)=(1-a-2+a+b)e^{-1}=0.\quad b=1$
  $f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+1\}e^x=(x+a+1)(x+1)e^x$
  $f(x)$는 $x=-a-1,\ x=-1$ 일 때 극값을 가진다.

- $(t, f(t))$ 위의 점에서의 접선의 방정식은

  $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이고, x절편은

  $-f(t)=f'(t)(x-t),\quad x=t-\dfrac{f(t)}{f'(t)}\quad (f'(t)\neq 0)$

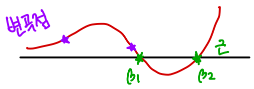
  $\therefore g(t)=t-\dfrac{f(t)}{f'(t)}\quad (f'(t)\neq 0).$

  $g'(t)=1-\dfrac{\{f'(t)\}^2-f(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}=\dfrac{f(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}=0$ 에서

  $g'(t)=0 \Leftrightarrow f(t)f''(t)=0.$

- $f(x)=(x^2+ax+1)e^x$ 에서 $D=a^2-4$ 이다.

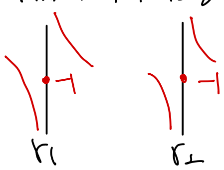
① $a^2-4>0$ 이면 $f(x)=0$은 두 개의 실근을 가진다.



$x=\beta_1$ 에서 변곡 X → $h(t)$ 극값 4개

$x=\beta_2$ 에서 변곡 O → $h(t)$ 극값 2개

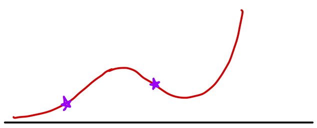
* $f(x)$가 극대·극소를 갖는 x의 값을 r_1, r_2라 하면



이 상태이므로

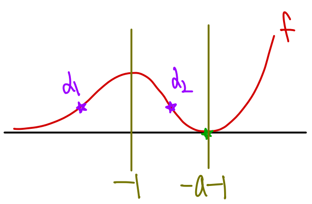
$x=r_1, r_2$에서 $h(x)$는 극값을 가지지 않는다.

② $a^2-4<0$ 이면 $f(x)=0$은 실근을 가지지 않는다.



$h(t)$ 극값 2개.

③ $a^2-4=0$ 이면 $f(x)=0$은 중근을 가진다.



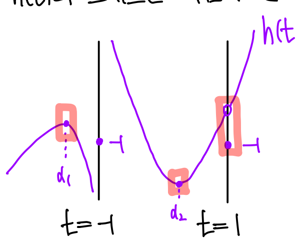
f가 $x=-1$ 에서 극대이므로

f는 $x=-a-1$ 에서 극소이고,

$-1<-a-1.\quad a<0$ 이다.

$a^2-4=0,\ a=\pm 2$ 에서 $a=-2$ 이다.

$h(t)$의 그래프는 다음과 같고



$f(x)=(x^2-2x+1)e^x$ 이므로

$f'(x)=(x^2-1)e^x,\ f''(x)=(x^2+2x-1)e^x$ 이다.

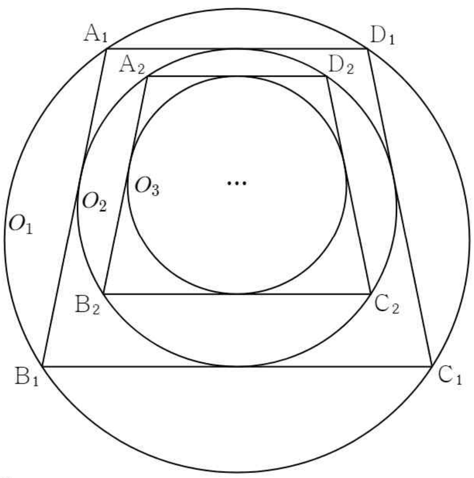
d_1과 d_2는 $x^2+2x-1=0$ 의 근이므로

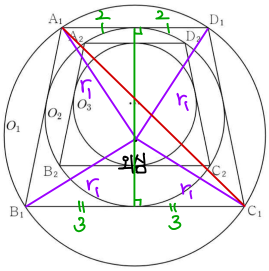
$d_1+d_2=-2$ 이고,

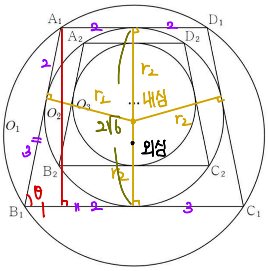
$d_3=1.\ h(d_3)=-1$ 이므로 $d_1+d_2+h(d_3)=-3.$

단답형

29. 그림과 같이 원 O_1 위의 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1에 대하여 두 선분 A_1D_1, B_1C_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1D_1}=4$, $\overline{B_1C_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 이 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$의 네 변에 모두 접하는 원을 O_2라 하자.
원 O_2 위의 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2에 대하여 세 선분 A_1D_1, A_2D_2, B_2C_2가 서로 평행하고, 두 선분 A_1B_1, A_2B_2가 서로 평행하도록 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 이 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$의 네 변에 모두 접하는 원을 O_3라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} r_n = \frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]







$\overline{A_1D_1} \parallel \overline{B_1C_1}$ 이고 원 O_1이 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$에 외접하므로
사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$은 등변사다리꼴이다.
$\overline{A_1B_1}=3+2=5$, $\angle A_1B_1C_1=\theta$라 하면 높이가 $\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt6$ 이므로
$r_2=\frac12\times2\sqrt6=\sqrt6$이고, $\tan\theta=2\sqrt6$. $\cos\theta=\frac15$. $\sin\theta=\frac{2\sqrt6}{5}$.
$\triangle A_1B_1C_1$에서 코사인법칙에 의해 $\overline{A_1C_1}^2=5^2+7^2-2\times5\times7\times\frac15=49$
$\Rightarrow \overline{A_1C_1}=7$.
$\triangle A_1B_1C_1$에서 사인법칙에 의해 $\overline{A_1C_1}=2r_1\sin\theta$. $r_1=\frac{35\sqrt6}{24}$.
공비가 $\frac{r_2}{r_1}=\sqrt6\div\frac{35\sqrt6}{24}=\frac{24}{35}$ 이고 $r_2=\sqrt6$ 이므로
$\sum_{n=2}^{\infty} r_n=\frac{\sqrt6}{1-\frac{24}{35}}=\frac{35}{11}\sqrt6$. $\therefore p+q=35+11=46$.

30. 최고차항의 계수가 -2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x f(|x|t)\,dt$$

일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이다.
(나) $g'(-1)=\frac{1}{2}$

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

$x>0$일 때 $g(x)=\int_0^x f(tx)\,dt$
$tx=u$라 하면 $x\,dt=du$이고,
$\int_0^x f(tx)\,dt=\frac1x\int_0^{x^2}f(u)\,du$
$x<0$일 때 $g(x)=\int_0^x f(-tx)\,dt$
$-tx=u$라 하면 $-x\,dt=du$이고,
$\int_0^x f(-tx)\,dt=\frac1x\int_{-x^2}^0 f(u)\,du$.
(가)에서 $g(x)=g(-x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.
즉. $f(x)=-2x^3+ax$.
$g'(x)=-g'(-x) \Rightarrow g'(1)=-\frac12$.
$x>0$에서 $g'(x)=\frac{2x^2f(x)-\int_0^{x^2}f(t)\,dt}{x^2}$ 이고
$g'(1)=2f(1)-\int_0^1 f(t)\,dt=2(a-2)-\int_0^1(-2t^3+at)\,dt$
$=2a-4-\left[-\frac12t^4+\frac12at^2\right]_0^1=\frac32a-\frac72=-\frac12$
$\therefore a=2$, $f(x)=-2x^3+2x$
$f'(x)=-6x^2+2$ 이고. $f'(0)=2$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(-1, 2, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(2, 2, 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$B(-1, -2, 2)$

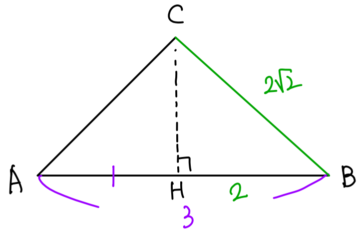
$\overline{BC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

24. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$|\overrightarrow{AB}| = 3,\quad |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2},\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$$

일 때, $|\overrightarrow{AC}|$의 값은? [3점]

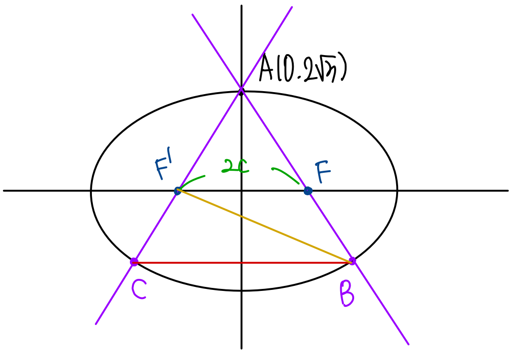
① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3



$\overline{CH} = 2$, $\overline{AC} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

25. 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위의 점 $A(0, 2\sqrt{3})$에 대하여 두 직선 AF, AF'이 타원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 $AF'B$의 둘레의 길이는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32



$\triangle ABC$가 정삼각형이면 $\triangle AF'F$도 정삼각형이다.

타원이 $(0.2\sqrt{3})$을 지나므로 $b^2=12$.

$\triangle AF'F$의 높이는 $2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \Rightarrow c=2$

$c^2=a^2-b^2$ 에서 $a^2=c^2+b^2=16$.

장축의 길이는 8 이다.

$\triangle AF'B$의 둘레 $=(\overline{AF'}+\overline{AF})+(\overline{F'B}+\overline{FB})$

$=2a+2a$

$=4a=16$.

26. 좌표평면에서 점 $A=(6, 12)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=3,\quad 6\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$$

를 만족시킨다. 점 P가 나타내는 도형 위의 점과 점 Q가 나타내는 도형 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은? [3점]

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{39}{4}$ ⑤ $\frac{43}{4}$

· $|\overrightarrow{AP}|=3$: 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (6.12) 이고 반지름이 3인 원.

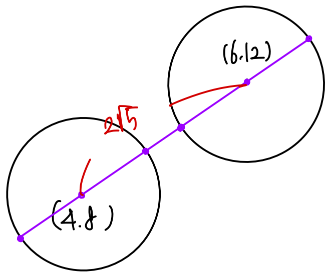
· $6\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OP}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$

$\frac{2}{3}(6.12)=(4.8)$

$\Rightarrow$ 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 (4.8) 이고 반지름이 $3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$인 원

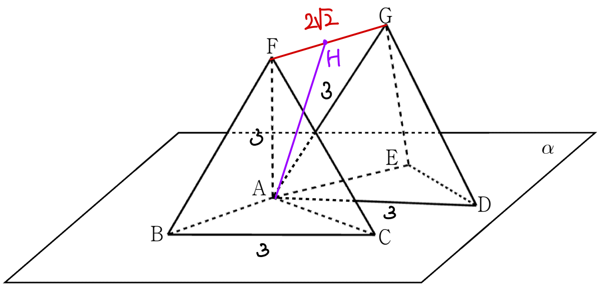


$M=2\sqrt{5}+3+\frac{1}{2}=2\sqrt{5}+\frac{7}{2}$

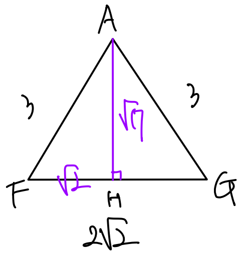
$m=2\sqrt{5}-3-\frac{1}{2}=2\sqrt{5}-\frac{7}{2}$

$\therefore M\times m=(2\sqrt{5}+\frac{7}{2})(2\sqrt{5}-\frac{7}{2})=20-\frac{49}{4}=\frac{31}{4}$.

27. 그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 두 정삼각형 ABC, ADE가 있다. 두 점 F, G에 대하여 두 사면체 ABCF, ADEG가 정사면체이고 $\overline{\mathrm{FG}}=2\sqrt{2}$이다. 두 평면 α와 AFG가 이루는 예각의 크기가 θ일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

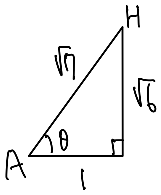


① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$



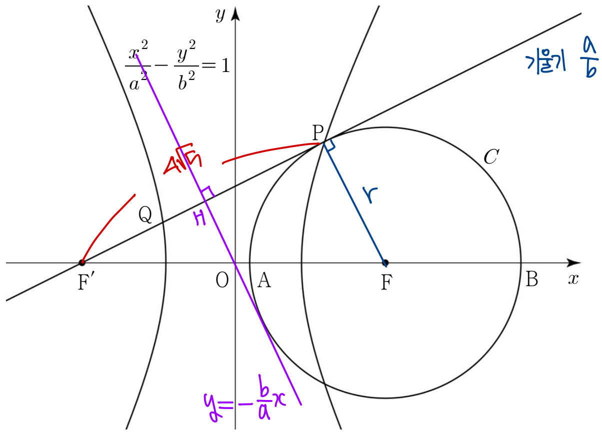
점 H에서 평면 α 까지의 거리는 정사면체의 높이와 같다.

$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} \times 3 = \sqrt{6}$.



$\therefore \tan\theta = \sqrt{6}$

28. 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 F$'$P가 이 쌍곡선의 한 점근선에 수직이다. 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원을 C라 할 때, 직선 F$'$P가 원 C와 한 점에서 만난다. 원 C가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{F'A}}\times\overline{\mathrm{F'B}}=80$이다. 선분 PF$'$이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? (단, a, b는 양수이고, $\overline{\mathrm{F'A}}<\overline{\mathrm{F'B}}$이다.) [4점]



① $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\frac{7\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

#28.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이다.

직선 F'P는 $y=-\frac{b}{a}x$ 와 수직이므로 기울기가 $\frac{a}{b}$ 이다.

$\overline{PF}=r$, 직선 $y=-\frac{b}{a}x$가 직선 F'P와 만나는 점을 H라 하자.

$\overline{F'A}\times\overline{F'B}=\overline{F'P}^2=80$ 에서 $\overline{F'P}=4\sqrt{5}$ 이고

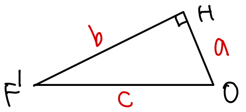
$\overline{OF'}=\overline{OF}$ 이므로 H는 선분 $\overline{F'P}$의 중점이다.

직선 F'P의 기울기가 $\frac{a}{b}$ 이므로 $\frac{a}{b}=\frac{r}{4\sqrt{5}}$ 이고,

$\overline{F'P}-\overline{FP}=2a$ 에서 $4\sqrt{5}-r=2a$ 이다.

$c^2=a^2+b^2$ 이고 $\triangle OF'H$ 가 직각삼각형이고 또한

직선 F'P의 기울기가 $\frac{a}{b}$ 이므로

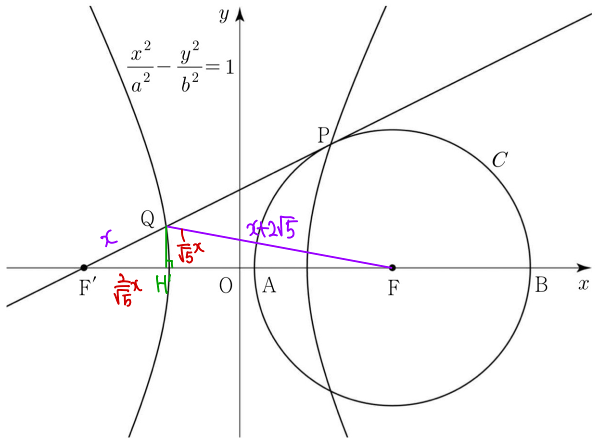


$\overline{F'H}=b$, $\overline{OH}=a$ 이다.

H가 중점이므로 $b=2\sqrt{5}$. $2a=r$ 이고,

$4\sqrt{5}-2a=2a$, $a=\sqrt{5}$ 이다.

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 이고, $c^2=25$. $c=5$ 이다.



$\overline{QF'}=x$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF}=x+2\sqrt{5}$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H'라 하면

$\overline{F'H}=\frac{2}{\sqrt{5}}x$. $\overline{QH'}=\frac{1}{\sqrt{5}}x$ 이다.

삼각형 QH'F 에서 $\overline{QF}^2=\overline{QH'}^2+\overline{HF}^2$

$$\Rightarrow (x+2\sqrt{5})^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x\right)^2+\left(10-\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+4\sqrt{5}x+20=\frac{1}{5}x^2+100-\frac{40}{\sqrt{5}}x+\frac{4}{5}x^2$$

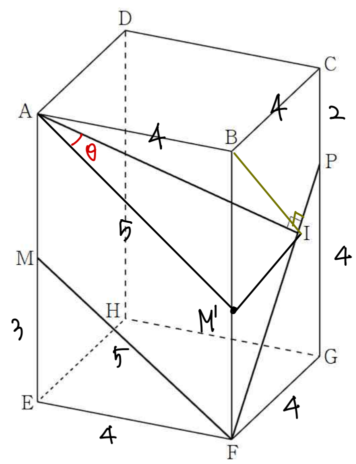
$$\Rightarrow 12\sqrt{5}x=80$$

$$\therefore x=\frac{80}{12\sqrt{5}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

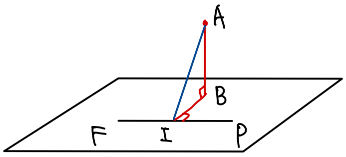
따라서 $\overline{PQ}=4\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{8}{3}\sqrt{5}$

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=6$인 직육면체 ABCD-EFGH에서 선분 CG를 $1:2$로 내분하는 점을 P, 점 A에서 선분 FP에 내린 수선의 발을 I라 하자. 선분 AE의 중점 M에 대하여 직선 MF와 직선 AI가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

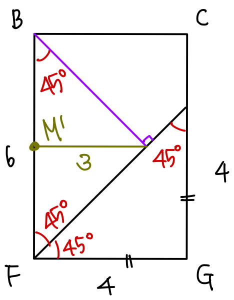


선분 BF 의 중점을 M'이라 하자

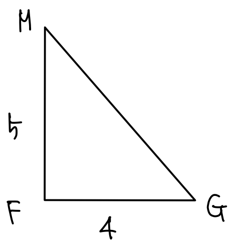


삼수선의 정리에 의해

$\overline{BI} \perp \overline{FP}$



따라서 $\overline{M'I}=3$ 이다.

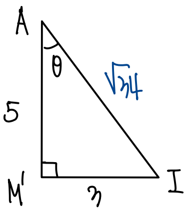


$\overline{MG}^2 = 3^2+4^2+4^2$

$= 5^2+4^2$ 이므로

$\angle MFG = 90^\circ$ 이고,

$\overline{FG} \,/\!/\, \overline{M'I}$ 이므로 $\angle AM'I = 90^\circ$ 이다.



$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos^2\theta = \frac{25}{34}$

$\therefore 34+25 = 59$

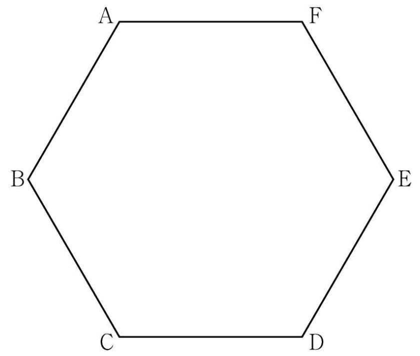
30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$|\overrightarrow{CX}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CP}|,\quad \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CX}|^2$$

을 만족시키는 점 X의 집합을 S라 할 때, 집합 S에 속하는 두 점 Q와 R이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CQ}<0$이고, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CR}>0$이다.
> (나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AR}$

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BR}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]



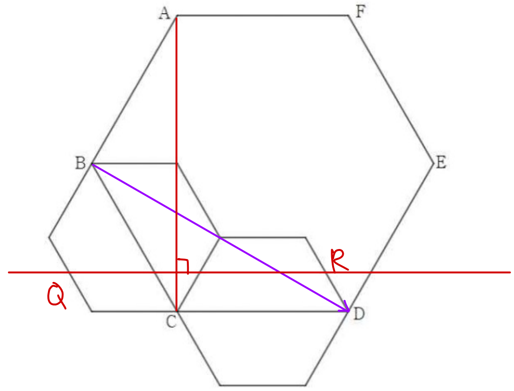
＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

#30. $|\vec{CX}| = \frac{1}{2}|\vec{CP}|$, $\vec{CX}\cdot\vec{CP} = |\vec{CX}|^2$

$\angle XCP = \theta$ 라 하면 $|\vec{CX}||\vec{CP}|\cos\theta = |\vec{CX}|^2$

$\Rightarrow 2|\vec{CX}|^2\cos\theta = |\vec{CX}|^2$

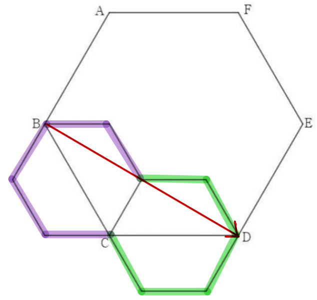
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$.



점 P가 정육각형 ABCDEF 위의 점이고 $|\vec{CX}| = \frac{1}{2}|\vec{CP}|$ 이므로 점 X는 정육각형 ABCDEF를 $\frac{1}{2}$ 축소한 후, 점 C를 기준으로 $60°$ 회전한 정육각형을 그린다.

(가)에서 $\vec{BD}\cdot\vec{CQ} < 0$ 이므로 ($\vec{BD}$와 $\vec{CQ}$가 이루는 각의 크기) $> 90°$ 이고, $\vec{BD}\cdot\vec{CR} > 0$ 이므로 ($\vec{BD}$와 $\vec{CR}$이 이루는 각의 크기) $< 90°$ 이다.

∴ 점 Q는 위에. 점 R은 위에 있다. $\longrightarrow$

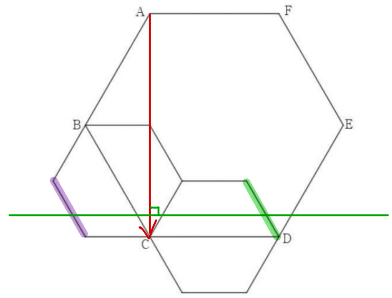


(나)에서 $\vec{AC}\cdot\vec{AQ} = \vec{AC}\cdot\vec{AR} \Rightarrow \vec{AC}\cdot(\vec{AQ}-\vec{AR}) = 0$

$\Rightarrow \vec{AC}\cdot\vec{RQ} = 0$ 이므로

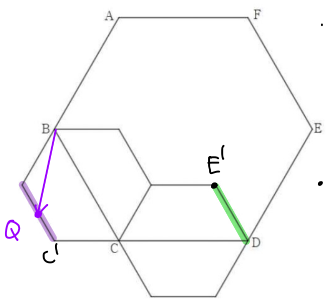
$\vec{AC}$와 $\vec{RQ}$는 수직이다.

이를 종합하면 Q는 위에, R은 위에 있어야 한다. $\longrightarrow$



$\angle QBR = \theta$ 라 하면 $\vec{BQ}\cdot\vec{BR} = |\vec{BQ}||\vec{BR}|\cos\theta$ 이다.

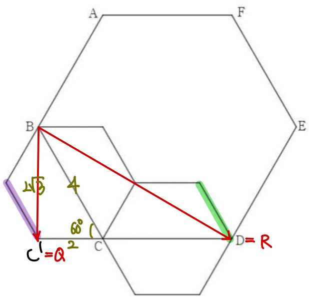
① $\vec{BQ}\cdot\vec{BR}$의 최댓값



· Q를 고정시킬 때, R이 D쪽으로 가면 $|\vec{BR}|$이 커지고, θ가 작아지므로 $\cos\theta$도 커진다.

· R을 고정시킬 때, Q가 C' 쪽으로 가면 $|\vec{BQ}|$가 커지고, θ가 작아지므로 $\cos\theta$도 커진다.

이를 종합하면 Q가 C', R이 D에 있을 때 $|\vec{BQ}|, |\vec{BR}|, \cos\theta$ 모두 최대이므로 $\vec{BQ}\cdot\vec{BR}$도 최대이다.

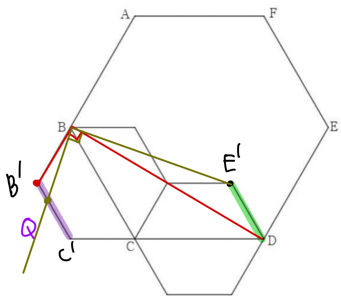


$\vec{BC'}\cdot\vec{BD} = |\vec{BC'}||\vec{BD}|\cos\theta$

$= |\vec{BC'}|\cdot|\vec{BC'}|$

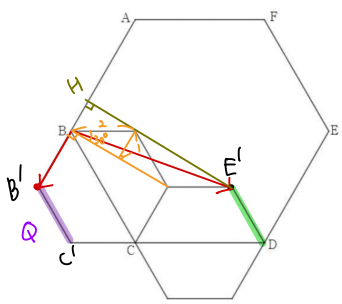
$= (2\sqrt{3})^2 = 12$.

② $\vec{BQ}\cdot\vec{BR}$의 최솟값



· R을 고정시킬 때. $\vec{BQ}\cdot\vec{BR} = 0$ 이 되는 Q가 존재하고, $\vec{BQ}\cdot\vec{BR}$의 값이 작아지기 위해선 $\vec{BQ}$를 $\vec{BR}$ 위로 사영시킬 때 1. 반대 방향 2. 크기가 커짐. 이어야 한다. 따라서 Q는 B'에 있어야 한다.

$\vec{BQ}$가 고정된 상태에서 내적의 값이 작아지기 위해선 $\vec{BR}$을 $\vec{BQ}$로 사영시킬 때 1. 반대 방향. 2. 크기가 커짐. 이어야 한다. 따라서 R은 E'에 있어야 한다.



$\vec{BB'}\cdot\vec{BE'} = -|\vec{BB'}||\vec{BH}|$

$= -2\times1 = -2$

∴ $M = 12$, $m = -2$

$M + m = 10$.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.