수학 I 수능/모의 문과

고3 10년 9월

2023.11.08 | 35문제 | 송재혁 이름 ____________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 0/0꼴의 극한(1) : 유리식 | 정답률 73%

01 [2013년 6월 고3 문과 9번/3점]

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$$

일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

| 다항함수의 결정 | 정답률 81%

02 [2017년 9월 고3 문과 12번/3점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$

$f(2)$의 값은?

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

| 미분법과 미정계수의 결정 | 정답률 74%

03 [2020년 3월 고3 문과 13번/3점]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 9
④ 16 ⑤ 25

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 51%

04 [2020년 11월 고3 이과 28번/4점]

두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$이라 하자.
함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

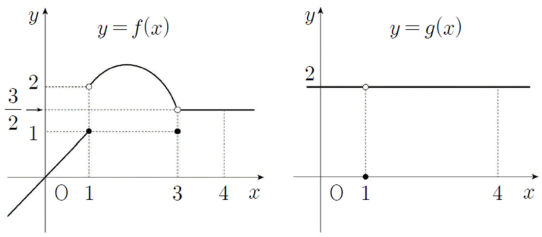
(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

| 함수의 연속과 불연속(3) : 그래프가 주어진 경우 | 정답률 71%

05

[2013년 7월 고3 문과 8번/3점]

그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = 2$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄷ. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)g(x)$의 불연속인 점은 오직 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

| 두 그래프의 교점의 개수 | 정답률 34%

06

[2019년 6월 고3 문과 30번/4점]

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

| 방정식 f(x)=0의 실근 | 정답률 34%

07

[2021년 9월 고3 22번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3) \cdot \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

| a^r이 자연수가 되도록 하는 미지수 구하기 | 정답률 70%

08

[2010년 9월 고3 문과 26번]

$1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

| 함수의 그래프 그리기 | 정답률 52%

09

[2021년 6월 고3 14번/4점]

두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

| 접선의 방정식 구하기(4) : 기울기가 주어지지 않은 경우 | 정답률 74%

10 [2013년 6월 고3 문과 17번/4점]
곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

| 방정식 f(x)=k의 실근의 개수 | 정답률 58%

11 [2016년 9월 고3 문과 20번/4점]
삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

| 미분법의 공식 : 종합 | 정답률 68%

12 [2005년 9월 고3 이과 7번]
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $y=f(x)$에서 x의 값이 -1에서 7까지 변할 때의 평균변화율은 0이다.
ㄴ. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a)+f'(b)=0$이다.
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

| 정적분을 포함한 등식(2) : 적분구간에 변수가 있는 경우 | 정답률 31%

13 [2017년 7월 고3 문과 20번/4점]
최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_0^x tf(t)dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $g'(0)=0$
ㄴ. 양수 α에 대하여 $g(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 양수 β에 대하여 $f(\beta)=g(\beta)=0$이면 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_\beta^x tf(t)dt \geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

| 미분계수를 이용한 극한값의 계산(2) : f(x)-f(a)/x-a 꼴의 극한 | 정답률 54%

14 [2009년 6월 고3 이과 6번]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때,

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$$의 값은?

① -8　② -4　③ 4
④ 8　⑤ 12

| 삼차함수의 증가 · 감소의 조건(1) : 실수 전체의 구간에서 | 정답률 51%

15 [2023년 9월 고3 13번/4점]

두 실수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0) \end{cases}$이

구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$　② $3+3\sqrt{2}$　③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$
④ $6+3\sqrt{2}$　⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

| 부등식이 항상 성립할 조건 | 정답률 52%

16 [2015년 9월 고3 문과 21번/4점]

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to -0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?

① -7　② -3　③ 1
④ 5　⑤ 9

| 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건(2) : 최대 · 최소의 활용 | 정답률 80%

17 [2022년 6월 고3 9번/4점]

두 함수 $f(x)=x^3-x+6$, $g(x)=x^2+a$가 있다. $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

| 미분가능성과 연속성(3) : 구간에 따라 다르게 정의된 함수 | 정답률 34%

18 [2020년 11월 고3 문과 30번/4점]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\ge 1) \end{cases}$이라 하자.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

| 다항함수의 결정 | 정답률 77%

19 [2007년 6월 고3 이과 5번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$를 만족시킬 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$의 값은?

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

| 정적분을 포함한 등식(2) : 적분구간에 변수가 있는 경우 | 정답률 37%

20 [2019년 11월 고3 문과 28번/4점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
> (나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

| 정적분을 포함한 등식(2) : 적분구간에 변수가 있는 경우 | 정답률 54%

21 [2023년 9월 고3 22번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모두 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x)-2x^2-1$
> (나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.

| 정적분으로 정의된 함수의 최대 · 최소 | 정답률 52%

22 [2023년 6월 고3 20번/4점]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

> $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$이다.

| 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 44%

23 [2014년 9월 고3 문과 21번/4점]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

> (가) $f(0)=-3$
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여
> $6x-6 \leq f(x) \leq 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

| 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 59%

24 [2013년 6월 고3 문과 21번/4점]

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

| 우함수 · 기함수의 정적분(2) : 피적분함수가 주어지지 않은 경우 | 정답률 59%

25 [2015년 11월 고3 문과 20번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

| 정적분으로 정의된 함수의 극대 · 극소 | 정답률 53%

26 [2021년 6월 고3 20번/4점]

실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수 $g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\cdot\{f(t)\}^4 dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

| 평균값 정리의 활용 | 정답률 68%

27 [2022년 6월 고3 8번/3점]

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은?

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여
> $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

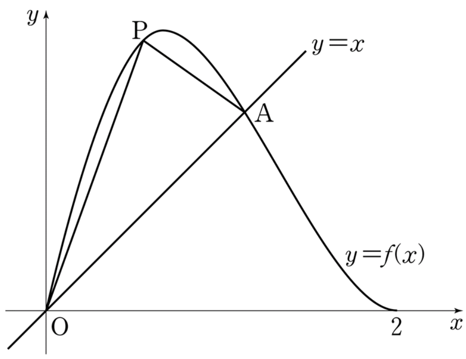
| 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리 | 정답률 61%

28 [2012년 9월 고3 문과 19번/4점]

닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2\ \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{17}{12}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{19}{12}$

| 방정식 f(x)=0의 실근 | 정답률 38%

29 [2021년 6월 고3 22번/4점]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4,\ f'(1)=1,\ f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

| 곡선과 x축 사이의 넓이 | 정답률 60%

30 [2018년 11월 고3 문과 17번/4점]

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가
다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(x-3)+4$이다.
>
> (나) $\int_0^6 f(x)dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및
두 직선 $x=6,\ x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

| 관계식이 주어질 때 미분계수 구하기 | 정답률 56%

31 [2006년 6월 고3 이과 9번]

세 다항함수 $f(x),\ g(x),\ h(x)$에 대하여 <보기>에서
항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

> ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다.
> ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$ 이면
> $g'(0)=0$이다.
> ㄷ. 모든 실수 x에 대하여
> $|h(2x)-h(x)|\le x^2$ 이면 $h'(0)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

| 지수함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 53%

32 [2023년 9월 고3 14번/4점]

두 자연수 $a,\ b$에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$이 다음 조건을

만족시킬 때, $a+b$의 값은?

> 집합 $\{f(x)\,|\,x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가
> 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는
> $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 50%

33 [2021년 11월 고3 14번/4점]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가
두 상수 $a,\ b$에 대하여 $x(t)=t(t-1)(at+b)$ $(a\ne 0)$
이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가
$\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을
있는 대로 고른 것은?

<보기>

> ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$
> ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에
> 존재한다.
> ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면
> $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

| 변곡점 | 정답률 55%

34 [2012년 6월 고3 이과 21번/4점]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은?

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

| 두 그래프의 교점의 개수 | 정답률 58%

35 [2012년 9월 고3 문과 21번/4점]

좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\ \ g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $-\dfrac{11}{18}$ ② $-\dfrac{5}{9}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$
④ $-\dfrac{4}{9}$ ⑤ $-\dfrac{7}{18}$

수학 I 수능/모의 문과

고3 10년 9월

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

2023.11.08 | 35문제 | 송재혁 이름 ____________

빠른 정답

01 ⑤	02 ②	03 ③
04 72	05 ①	06 19
07 108	08 ④	09 ③
10 ②	11 ⑤	12 ③
13 ⑤	14 ①	15 ③
16 ④	17 ⑤	18 39
19 ③	20 7	21 10
22 39	23 ①	24 ⑤
25 ①	26 8	27 ③
28 ②	29 61	30 ④
31 ⑤	32 ②	33 ③
34 ②	35 ④	

수학 I 수능/모의 문과

고3 10년 9월

2023.11.08 | 35문제 | 송재혁 이름 ______________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01 정답 ⑤

해설 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 따라서

$\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$ 이고 $\lim_{x\to2}f(x)=3$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{\{f(x)\}^2-9}{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{f(x)+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}=\frac{1}{30}$$

02 정답 ②

해설 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 그릴 수 있는가?

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $x\to0$일 때

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하므로

$\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=0$

이때

$\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=3$이므로

$f(x)=2x^2+3x$

따라서 $f(2)=2\times2^2+3\times2=14$

03 정답 ③

해설 이차함수의 성질과 도함수의 정의를 이해하여 함숫값을 구한다.

이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하므로

$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)

$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로

$f'(x)=2(x-a)$

$g(x)=(x-3)f'(x)$

$\quad=2(x-a)(x-3)$

$\quad=2x^2-2(a+3)x+6a$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$에서

$f(0)=3^2=9$

04 정답 72

해설 미분가능성과 음함수의 미분법을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

$g^{-1}(x)=k(x)$라 하면

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$
$=f(k(x))$
$=(k(x)-a)(k(x)-b)^2$

이때 조건 (가)에서 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$k(1)-a=0$

한편, $y=k(x)$는 음함수 $x=y^3+y+1$이므로

$1=y^3+y+1$

따라서 $y=0$이므로 $a=0$

이때 $f(x)=x(x-b)^2$이고, 조건 (나)에서

$h'(3)=2$

이때 $h'(x)=f'(k(x))\cdot k'(x)$이므로

$f'(k(3))\cdot k'(3)=2$ $\cdots$ ㉠

한편, $k(3)$의 값은

$3=y^3+y+1$

$(y-1)(y^2+y+2)=0$

따라서 $y=1$이므로 $k(3)=1$

이때 $f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로

$f'(k(3))=f'(1)$
$=(1-b)^2+2(1-b)$
$=(1-b)(3-b)$

또, $x=y^3+y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1=(3y^2+1)\dfrac{dy}{dx}$

따라서 $k'(3)=\dfrac{1}{4}$이므로 ㉠에서

$(1-b)(3-b)\cdot\dfrac{1}{4}=2$, $b^2-4b+3=8$

$b^2-4b-5=0$, $(b+1)(b-5)=0$

이때 $b>0$이므로 $b=5$

따라서 $f(x)=x(x-5)^2$이므로

$f(8)=8\cdot 3^2=72$

05 정답 ①

해설 ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3)=1\times2=2$

$\lim\limits_{x\to3-}f(x)g(x)=3$, $\lim\limits_{x\to3+}f(x)g(x)=3$에서

$\lim\limits_{x\to3}f(x)g(x)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=4$이고,

ㄱ에 의하여 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=2$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의하여 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

06 정답 19

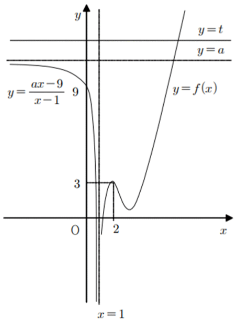
해설 $x<1$일 때, 함수 $g(x)$는

$$y=\frac{ax-9}{x-1}=\frac{a(x-1)+a-9}{x-1}=\frac{a-9}{x-1}+a$$

이 그래프는 함수 $y=\frac{a-9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이다.

$a-9$의 부호에 따라 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $a-9>0$, 즉 $a>9$일 때,



이때 직선 $y=t$가 $t>9$일 때는

곡선 $y=\frac{a-9}{x-1}+a$와 만나지 않는다.

또, t가 충분히 크면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$와 한 점에서 만난다.

(ⅱ) $a-9=0$, 즉 $a=9$일 때,

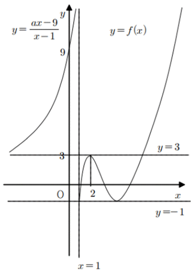
$$y=\frac{a-9}{x-1}+a=9$$

이 경우에도 직선 $y=t$가 $t>9$이고 충분히 크면 직선 $y=t$와 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서 만난다.

(ⅲ) $a-9<0$, 즉 $a<9$일 때,

조건을 만족시키려면 유리함수 $y=\frac{a-9}{x-1}+a$의 그래프의 점근선은 $y=3$이어야 한다. 즉, $a=3$

또, 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=3$, $y=-1$에 접하고 $f(1)\leq-1$이어야 한다.



이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항이 1이므로

$f(x)=(x-2)^2(x-k)+3$ $(k>2)$으로 놓으면

$$f'(x)=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2$$
$$=(x-2)(3x-2k-2)=3(x-2)\left(x-\frac{2k+2}{3}\right)$$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{2k+2}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{2k+2}{3}$에서 극솟값 -1을 가져야 하므로

$$f\left(\frac{2k+2}{3}\right)=\left(\frac{2k+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2k+2}{3}-k\right)+3$$
$$=-\frac{4}{27}(k-2)^3+3=-1$$

$(k-2)^3=27$, $k=5$

그러므로 $f(x)=(x-2)^2(x-5)+3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3x-9}{x-1} & (x<1)\\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x\geq1)\end{cases}$$ 이므로

$(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(6)=19$

07 정답 108

해설 $i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$, $\lim_{h\to0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$의 값이 항상 존재한다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

$$g(x)=f(x-3)\cdot\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=f(x-3)\cdot\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}f(x-3)\cdot\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\cdot\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$

이어야 하므로 $f(\alpha-3)\cdot\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\cdot\{2f'(\alpha)\}=0$

이때 $f'(\alpha)\neq0$, $f(\alpha-3)\neq0$이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}f(x-3)\cdot\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\cdot\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$ 이어야 하고 $f'(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha-3)\cdot\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\cdot\{2f'(\alpha)\}=0$이 성립한다.

이때 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고

$f(\alpha)\neq0$, $f(\beta)\neq0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서

함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅳ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq0$, $f(\beta)=0$,

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서

함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅴ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$,

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<l<\beta<m)$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅵ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq0$,

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}f(x-3)\cdot\{-2f'(x)\} & (x<k)\\ 0 & (x=k)\\ f(x-3)\cdot\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k+}g(x)=g(k)$

이어야 하므로 $f(k-3)\cdot\{-2f'(k)\}=f(k-3)\cdot\{2f'(k)\}=0$

이때 $f'(k)\neq0$이므로 $f(k-3)=0$이고 $k-3=\alpha$ … ㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은 $x<k$ 일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$, $x=k$일 때 $x=k$, $x>k$일 때 $x=k+3$

조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로 $\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4$ … ㉡

또, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$, $f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\beta=\frac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면 $\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore$ $f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\cdot3=108$

08 정답 ④

해설 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 에서 $n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,\ 2,\ 3$

$2\le n\le 7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,\ 2,\ 3$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$3+6+3=12$

09 정답 ③

해설 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$\quad=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고,

$x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

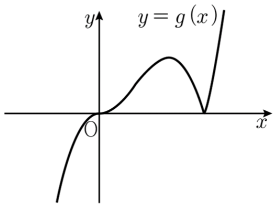
즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼,

y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에

그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.



이때 $p,\ q$가 모두 양수이고, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가

$x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로

$p=1,\ q=7$이어야 한다.

$\therefore\ p+q=1+7=8$

10 정답 ②

해설 두 개의 접선이 서로 평행할 조건을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$이므로

점 $\mathrm{A}\ (3,\ 4)$에서의 접선의 기울기

$f'(3)=10$

$f'(x)=10$일 때의 $x=3,\ x=-1$이므로

점 $\mathrm{B}(-1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$y+4=10(x+1)$이다

따라서 구하는 y절편은 6 이다.

11 정답 ⑤

해설 삼차함수의 그래프의 특징을 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\ne 0)$라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(-3)=f'(3)$에서 $b=0$이고

$x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=12a+c=0$에서 $c=-12a$이다.

따라서,

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\quad=3ax^2-12a\ (a>0)$

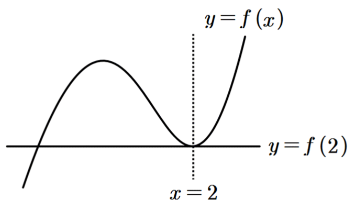
이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2-12a$

$\quad=3a(x+2)(x-2)$

이고 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서, 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$f(x)=ax^3-12ax+d\ (a>0)$

$f'(x)=3ax^2-12a$

이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(11a+d)=-9a(x+1)$

$y=-9ax+2a+d \qquad \cdots ㉠$

㉠에 점 $(2,\ f(2))$ 즉, $(2,\ -16a+d)$를 대입하면

등식이 성립하므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의

접선의 방정식은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 정답 ③

해설 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=p(x-3)^2+q$ (단, $p\neq 0$)로 놓으면

ㄱ. $f(-1)=f(7)$

$\therefore \dfrac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=2p(x-3)$이고

$a+b=6$에서 $b=6-a$이므로

$f'(a)=2p(a-3)$

$f'(b)=f'(6-a)=2p(a-3)$

$\therefore f'(a)+f'(b)=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)\\
&=f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+\cdots f'(12)\\
&=\{f'(-2)+f'(8)\}+\{f'(-1)+f'(7)\}\\
&\qquad+\{f'(0)+f'(6)\}+\{f'(1)+f'(5)\}\\
&\qquad\quad+\{f'(2)+f'(4)\}+f'(3)\\
&\qquad\qquad+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)\\
&=0+0+0+0+0+0\\
&\qquad+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)\\
&=f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)\\
&=2p(9-3)+2p(10-3)\\
&\quad+2p(11-3)+2p(12-3)\\
&=60p\neq 0
\end{aligned}$$
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

13 정답 ⑤

해설 정적분의 성질을 활용하여 참, 거짓 추론하기

ㄱ. $g'(x)=xf(x)$이므로 $g'(0)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ \alpha]$에서 연속,

열린 구간 $(0,\ \alpha)$에서 미분가능,

$g(0)=g(\alpha)=0$이므로 롤의 정리에 의하여

$g'(c)=cf(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ \alpha)$에

적어도 하나 존재한다.

$c\neq 0$이므로 $f(c)=0$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ \alpha)$에

적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

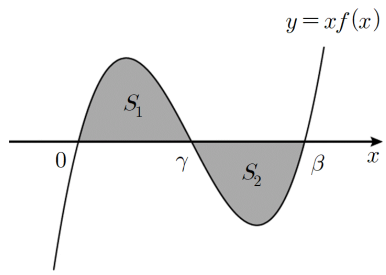
ㄷ. $\beta>0$이고 $g(\beta)=0$이므로 ㄴ에 의하여

$f(\gamma)=0$인 γ $(0<\gamma<\beta)$가 존재한다.

$f(x)=a(x-\gamma)(x-\beta)$ $(a>0)$이고

$S_1=\displaystyle\int_0^{\gamma}|xf(x)|dx,\ S_2=\int_{\gamma}^{\beta}|xf(x)|dx$라

하면 $y=xf(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(\beta)=\displaystyle\int_0^{\beta}tf(t)dt=S_1-S_2=0$이므로

$S_1=S_2$이다.

$$\begin{aligned}
\int_{\beta}^{x}tf(t)dt&=g(x)-g(\beta)\\
&=g(x)=\int_0^{x}tf(t)dt\geq 0
\end{aligned}$$

이므로, 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_{\beta}^{x}tf(t)dt\geq 0$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 정답 ①

해설 $f'(2)=-3$, $f'(4)=6$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times(x-2)}{\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$$

한편, $x^2=t$로 놓으면 $x\to -2$일 때,
$t\to 4$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(4) \quad \cdots ㉠$$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$$f(-x)=\lim_{t\to -x}\frac{f(x)-f(-x)}{t-(-x)}$$

이때 $s=-t$로 놓으면 $t\to -x$일 때,
$s\to x$이고 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\lim_{t\to -x}\frac{f(x)-f(-x)}{t-(-x)}=\lim_{s\to x}\frac{f(-s)-f(-x)}{-s-(-x)}$$
$$=-\lim_{s\to x}\frac{f(s)-f(x)}{s-x}$$
$$=-f(x)$$

$$\therefore f'(-x)=-f'(x) \quad \cdots ㉡$$

따라서 ㉠과 ㉡에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\frac{\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to -2}(x-2)}{\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$$
$$=\frac{f'(4)\times(-4)}{f'(-2)}$$
$$=\frac{f'(4)\times(-4)}{-f'(2)}$$
$$=\frac{6\times(-4)}{-(-3)}=-8$$

15 정답 ③

해설 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0)\end{cases}\text{에서}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고,
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

$x<0$일 때,

$$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$$
$$=-(x+1)(x+2a-1)$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다.
이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고,
구간 $[-1,\ 0)$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서
$f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

$$\therefore a\le\frac{1}{2} \quad \cdots ㉠$$

한편, $x>0$일 때

$$f'(x)=x^2+2ax-b$$
$$=x^2+2ax-2a+1$$
$$=(x+a)^2-a^2-2a+1$$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우
$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면
$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.
$\therefore 0<a\le\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우
$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면
$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.
$a^2+2a-1\le 0$
$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$
$\therefore -1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2} \quad \cdots ㉡$$

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$-1-\sqrt{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=3a-1$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{2}$,

최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때, $-4-3\sqrt{2}$이다.

$$\therefore M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

16 정답 ④

해설 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악하고 미분계수와 관련된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\mathrm{A}(t,\ t^4-4t^3+10t-30)$

$\mathrm{B}(t,\ 2t+2)$

$f(t)=\overline{\mathrm{AB}}$

$=\sqrt{(t-t)^2+(t^4-4t^3+10t-30-2t-2)^2}$

$=\sqrt{(t^4-4t^3+8t-32)^2}$

$=|t^4-4t^3+8t-32|$

$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$라 하자.

$g'(t)=4t^3-12t^2+8$

$\quad=4(t-1)(t^2-2t-2)$

$g'(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

함수 $g(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	-27	$\searrow$	극소	$\nearrow$

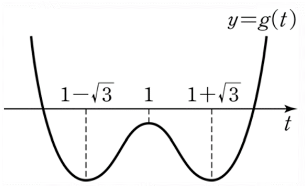
사차함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값 -27을 갖고, $t=1-\sqrt{3}$, $t=1+\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다.

또한,

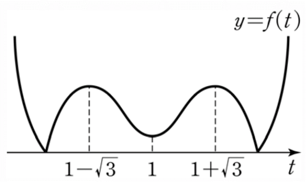
$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$

$\quad=(t+2)(t-4)(t^2-2t+4)$

이므로 함수 $g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은

$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

이다.

17 정답 ⑤

해설 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면 $x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$\therefore\ h'(x)=3x^2-2x-1$

$\qquad\quad=(3x+1)(x-1)$

따라서 $h'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

이때 $x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a\le 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

18 정답 39

해설 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$에서 $f(0)=g(0)$

또, $x<1$일 때,

함수 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능하고

$f(0)=g(0)$이므로 $x=0$에서

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 접해야 한다.

즉, $f'(0)=g'(0)$

또, $x=1$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$에서

$\lim_{x\to1-}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}$ $\cdots$ ㉠

(ⅰ) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)>g(x)$일 때,

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$g'(1)=0$

이때 $g(x)$는 일차함수이므로 모순이다.

(ⅱ) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)<g(x)$일 때,

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$\therefore\ f'(1)=0$

또한, ㉠에서 $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$이므로

$f(1)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$

(a, q는 상수, p는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있으므로

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$g'(x)=p$

이때 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서

$a=q$, $-2a+1=p$이고

$$\begin{aligned}h(2)&=f(2)+g(2)\\&=(2+a)+2p+q\\&=2+a+2p+q=5\end{aligned}$$

$\therefore\ a+2p+q=3$

즉, $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(4)&=f(4)+g(4)\\&=9\cdot\frac{7}{2}+8-\frac{1}{2}=39\end{aligned}$$

19 정답 ③

해설 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$에서

$-1+a-b+c=2$, $c=0$, $1+a+b+c=-2$

$\therefore\ a=0$, $b=-3$, $c=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x}{x}\\&=\lim_{x\to0}(x^2-3)\\&=-3\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$g(x)=f(x)+2x$라 하면

$f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$ 이므로

$g(-1)=g(0)=g(1)=0$

이 때, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=f(x)+2x=(x+1)x(x-1)$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x$

20 정답 7

해설 정적분과 미분의 관계와 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1)+\frac{x-1}{2}f'(x)$$

즉,

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x) \quad \cdots ㉠$$

㉠의 좌변인 $f(x)$의 최고차항을

ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)라 하면

㉠의 우변의 최고차항은

$$x\times anx^{n-1}=anx^n$$

이므로 $ax^n=anx^n$에서

$$n=1$$

이때 $f(0)=1$이므로 일차함수 $f(x)$는

$f(x)=ax+1$로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax+1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2$$

이고,

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^2+x)dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}$$

이므로 조건 (나)에서

$$2a+2=5\times\frac{2a}{3}$$

$$a=\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$$f(4)=\frac{3}{2}\times 4+1=7$$

21 정답 10

해설 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$이므로

$$f(1)=3 \quad \cdots ㉠$$

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$$f'(x)=4$$

즉, $f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)로 놓을 수 있다.

이때 ㉠에서 $f(1)=3$이므로

$$f(1)=4+C_1=3$$

$$\therefore C_1=-1$$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로

양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분상수)로

놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고

$G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$$2a-1=1$$

즉, $a=1$이므로

$$G(x)=x^2+x+b$$

$$\therefore \int_1^3 g(x)dx=\Big[G(x)\Big]_1^3$$
$$=G(3)-G(1)$$
$$=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)$$
$$=10$$

22 정답 39

해설 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면
$F'(x)=f(x)$이고

$g(x)=\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$이므로

$g'(x)=f(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.
조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠
즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로
$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) … ㉡
로 놓을 수 있다.
(i) $g(4)\geq 0$인 경우
$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq g(4)\geq 0$이므로 이 범위에서
$|g(x)|=g(x)$
조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)|\geq |g(3)|$
즉, $g(x)\geq g(3)$이어야 한다. … ㉢
이때 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.
(ii) $g(4)<0$인 경우
$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)|\geq |g(3)|$이려면 $g(3)=0$ … ㉣
이어야 한다.
㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$$

(단, C는 적분상수)
따라서

$$g(x)=F(x)-F(0)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서 $g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$

$$\frac{15}{2}a=9$$

$$\therefore\ a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)=5\cdot\frac{39}{5}=39$$

23 정답 ①

해설 함수의 그래프와 접선의 관계를 이용하여 함수를 정할 수 있는가?
조건 (나)에 $x=1$을 대입하면
$0\leq f(1)\leq 0$
$\therefore f(1)=0$ … ㉠
또한, 조건 (나)에서 $x\neq 1$일 때,
먼저 $x>1$일 때

$$\frac{6x-6}{x-1}\leq\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\leq\frac{2x^3-2}{x-1}$$

그런데,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{6x-6}{x-1}=6,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(x^2+x+1)=6$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$x<1$일 때도 같은 방법으로 생각하면

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

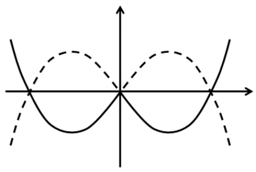
$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6 \quad \cdots ㉡$$

따라서, 다항함수 $f(x)$가 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 삼차 이하의 다항함수이어야 한다.
(i) $f(x)$가 일차함수인 경우
최고차항의 계수가 1이면서 ㉡을 만족시킬 수는 없다.
따라서, 조건을 만족시키는 일차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.
(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우
$f(x)=x^2+ax-3$ ($\because$ (가))라 하면 ㉠에서
$f(1)=a-2=0 \quad \therefore a=2$
그런데, $f'(x)=2x+2$이므로 ㉡을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.
(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우
$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ ($\because$ (가))라 하면 ㉠에서
$f(1)=a+b-2=0 \quad \therefore a+b=2$ … ㉢
$f'(x)=3x^2+2ax+b$라 하면 ㉡에서
$f'(1)=2a+b+3=6 \quad \therefore 2a+b=3$ … ㉣
㉢, ㉣에서 $a=1$, $b=1$이므로
$f(x)=x^3+x^2+x-3$
$\therefore f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

24 정답 ⑤

해설 극댓값을 가질 조건을 이용하여 함수를 정하고 함숫값을 구할 수 있는가?

$a>0$이면 아래 그림과 같이 극댓값이 존재하지 않게 되므로 $a<0$이다.



$f'(x)=\begin{cases} 3a(1-x)(1+x) & (x<0) \\ 3x^2-a & (x \geq 0) \end{cases}$이므로

$f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 5를 갖는다.

$f(-1)=-2a=5$

$\therefore\ a=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ f(2)=2^3-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\cdot 2=13$

25 정답 ①

해설 조건을 만족시키는 다항함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$h(-x)=f(-x)g(-x)$

$\quad=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\int_{-3}^{3}(xh'(x)+5h'(x))dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{3}5h'(x)dx$

$=10\Big[h(x)\Big]_0^3$

$=10(h(3)-h(0))$

$10(h(3)-h(0))=10$에서

$h(3)=h(0)+1=0+1=1$

26 정답 8

해설 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$\quad=3(x-3)(x-5)$

$\displaystyle g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\cdot\{f(t)\}^4dt$

$\displaystyle\quad=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$\displaystyle g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$\displaystyle\quad=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

이때 $g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\neq 3$, $a\neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

27 정답 ③

해설 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고
열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로
평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c) \qquad \cdots ㉠$$

이를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 조건 (나)에 의하여 $f'(c) \geq 5$이므로

㉠에서 $\frac{f(5)-3}{4} \geq 5$

$\therefore\ f(5) \geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

28 정답 ②

해설 도형의 넓이 미분법을 이용하여 접선의 접점을 구할 수 있는가?

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서
직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.
이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로
$f'(x)=1$에서

$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$

$3ax^2-8ax+4a-1=0$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$

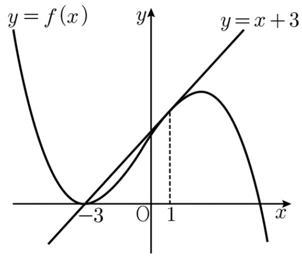
$\frac{3}{4}a-1=0$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

29 정답 61

해설 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을
$\alpha,\ \beta$라 하면 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$로 놓을 수 있다.
또, 조건 (나)에서 $x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$를
만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.
즉, $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서
곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha,\ y=x-\beta$가
만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.
한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의
접선의 기울기가 1이므로 접선의 방정식은
$y=x+3$
이때 $f(0)>0,\ f'(0)>1$이므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$은 다음 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\cdot2(x-1)+1 \quad \cdots ㉠$

이때 $f'(-3)=0$이므로 ㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\cdot16+1$에서

$k=-\frac{1}{16}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot3\cdot1+3=\frac{45}{16}$

즉, $p=16,\ q=45$이므로

$p+q=61$

30 정답 ④

해설 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있으며 이를 이용하여 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야 한다.

또, 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)dx=0$이므로

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx$$

$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 \{f(x)+4\}dx$$

$$=2\int_0^3 f(x)dx+12$$

에서

$$2\int_0^3 f(x)dx+12=0$$

$$\int_0^3 f(x)dx=-6$$

따라서

$\int_3^6 f(x)dx=6$이므로

$$\int_6^9 f(x)dx=12+\int_3^6 f(x)dx=12+6=18$$

31 정답 ⑤

해설 ㄱ. (반례) $f(x)=x^2+2x$라 하면 $f(0)=0$

$f'(x)=2x+2$이므로 $f'(0)=2\neq 0$ (거짓)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=g(-x)$이므로 $g(x)$는 우함수

따라서 $g'(x)$는 기함수이고 모든 기함수의 그래프는 원점에 대칭이므로 반드시 원점을 지난다.

$\therefore g'(0)=0$ (참)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여

$0\le |h(2x)-h(x)|\le x^2$ 이므로 양변을 $|x|$로 나누면

$$0\le \left|\frac{h(2x)-h(x)}{x}\right|\le \frac{x^2}{|x|}$$

$$0\le \lim_{x\to 0}\left|\frac{h(2x)-h(0)}{2x-0}\cdot 2-\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right|\le \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$$

$0\le |2h'(0)-h'(0)|\le 0$

$0\le h'(0)\le 0$

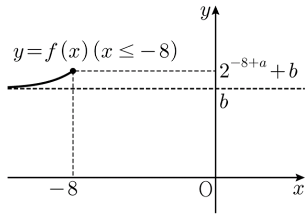
$\therefore h'(0)=0$ (참)

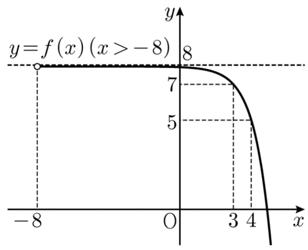
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

32 정답 ②

해설 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한, 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉, $b=5$이고 $6\le f(-8)<7$이어야 하므로

$6\le 2^{-8+a}+5<7$

$1\le 2^{-8+a}<2$

$0\le -8+a<1$

$\therefore 8\le a<9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

$\therefore a+b=13$

33 정답 ③

해설 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

$x(0)=0$, $x(1)=0$이므로 점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|dt=2$이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로 점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34 정답 ②

해설 함수의 미분가능성을 이해하고 삼차함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$f(x)=mx$인 $x=\alpha$라 하면

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ … ㉠

$g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하므로 $x=\alpha$에서도 미분가능하다. 즉,

$3\alpha^2-6\alpha-9=m$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

$\therefore\ \alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

그래프를 그려보면 $\alpha=1$일 때 $m=-12$이고 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\alpha=-\frac{1}{2}$일 때 $m=-\frac{21}{4}$이고 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이지만 미분불가능한 점이 발생한다.

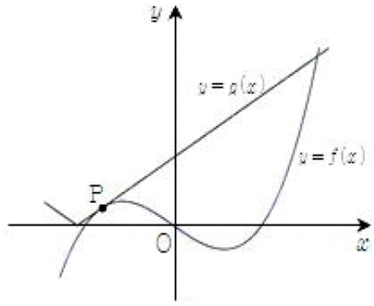
따라서 직선 $y=mx$가 $y=f(x)$의 변곡점을 지날 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 알 수 있다.

따라서 $m=-12$

35 정답 ④

해설 미분법을 이용하여 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



<그림 1>

<그림 1>에서 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하므로

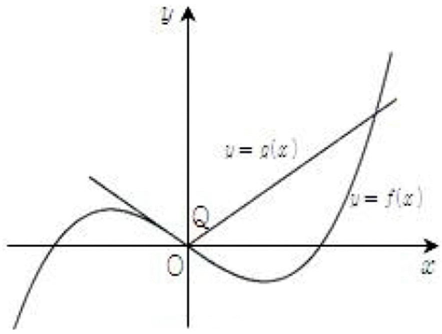
$f'(x)=1$에서 $18x^2-1=1,\ x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}\ (x<0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$이므로

$\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}-a$

$\therefore\ a=-\frac{4}{9}$



<그림 2>

<그림 2>에서 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하므로

$f'(x)=-1$에서 $18x^2-1=-1,\ 18x^2=0$

$\therefore\ x=0$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0,\ 0)$이므로

$0=0+a$

$\therefore\ a=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{4}{9}+0=-\frac{4}{9}$