제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\ln(1+5x)}{5x}} \times \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3+1), \quad y = \sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad \frac{dy}{dt} = \pi \cos \pi t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pi \cos \pi t\,(t^3+1)}{3t^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{-2\pi}{3}$$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1) = 8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36　② 40　③ 44　④ 48　⑤ 52

$g(f(x)) = x$

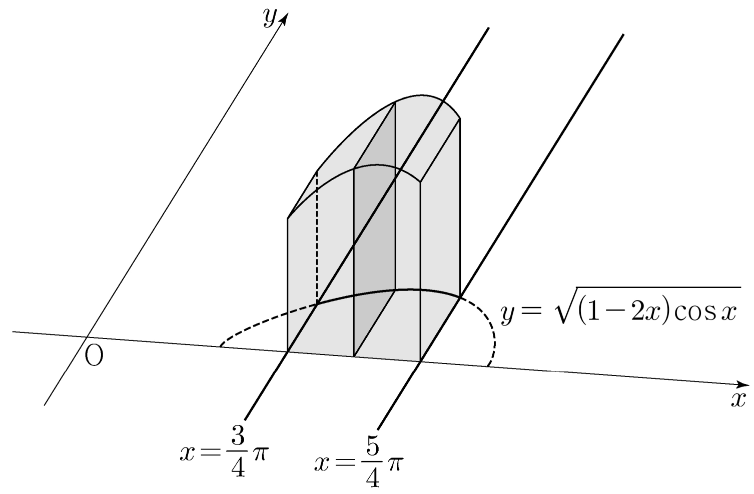
$g'(f(x))\cdot f'(x) = 1 \implies \frac{1}{g'(f(x))} = f'(x)$

$\therefore \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(a) - \ln f(1) = \ln\frac{a^2(a+1)}{2}$

$\ln f(a) = \ln 4a^2(a+1)$

$f(x) = 4x^2(x+1)$, $f(2) = 48$.

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}\pi-1$　③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$　⑤ $2\sqrt{2}\pi$

$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (1-2x)\cos x\,dx$

$= [\sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} - [2x\sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} 2\sin x\,dx$

↳ $(\pi, 0)$ 점대칭.

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi\right)$

$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$
④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

접점의 x좌표를 s라 하자.

s는 t에 대한 함수이다. $s=s(t)$.

· $f(t)\cdot s = e^{-s}+e^{t}$ … (1) (함숫값)

· $f(t) = -e^{-s}$ … (2) (기울기)

$f(a) = -e^{-s(a)} \Rightarrow s(a) = -\frac{3}{2}$

(*)의 양변을 t에 대해 미분하자.

$f'(t)\cdot s + f(t)\cdot\frac{ds}{dt} = -e^{-s}\cdot\frac{ds}{dt} + e^{t}$

(**)에 의해, $f(t) = -e^{-s}$이므로,

$f'(t)\cdot s = e^{t}$ … (3)

$t=a$를 (1), (3)에 대입하자.

$f(a)\cdot s(a) = e^{-s(a)} + e^{a}$

$\Rightarrow -e^{\frac{3}{2}}\cdot(-\frac{3}{2}) = e^{\frac{3}{2}} + e^{a}$ $\therefore e^{a} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$f'(a) = \frac{e^{a}}{s(a)} = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}$

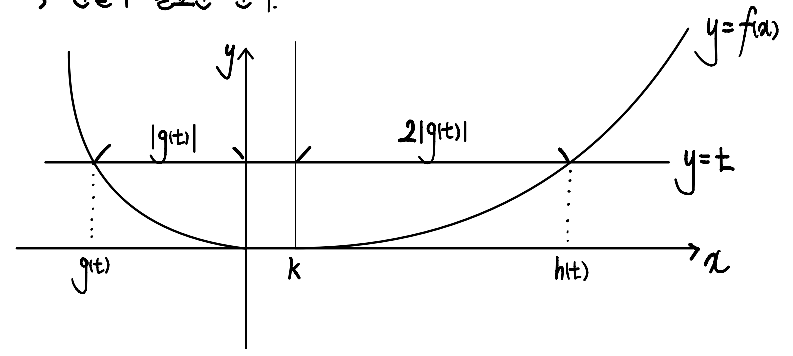
28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$ (k는 상수)

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx = e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

§ 관찰이 필요한 문제.



if $k<0$ 이라면, $y=f(x)$가 함수가 될 수 없다.

$\int_0^7 f(x)dx = \int_0^k f(x)dx + \int_k^7 f(x)dx$

$= \int_0^{7-k} f(x+k)dx$

하지만 정확히 함수의 식을 아는 $x<0$ 구간이므로,
이를 통해 $x\geq 0$ 구간의 식을 추론하자.
닫힌 구간 $[0,k]$에서 $f(x)=0$이며,
$x>k$ 구간의 개형은 $x<0$ 구간의 그래프를
(i) 가로로 2배 늘린 후 $f(x)\to f(\frac{x}{2})$
(ii) y축에 대해 대칭한 뒤, $f(\frac{x}{2})\to f(\frac{-x}{2})$
(iii) x축의 양의 방향으로 k만큼 평행이동한 것과 같다. $f(-\frac{x}{2})\to f(-\frac{(x-k)}{2})$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -4xe^{4x^2} & (x<0) \\ 0 & (0\leq x\leq k) \\ 2(x-k)\cdot e^{(x-k)^2} & (x>k) \end{cases}$$

적분하기 좋음.

$\int_k^7 f(x)dx = [e^{(x-k)^2}]_k^7$

$= e^{(7-k)^2}-1 = e^4-1$ $\therefore k=5$ $(0\leq k\leq 7)$

$f(9) = 8\cdot e^{16}$, $f(8) = 6\cdot e^{9}$

$\frac{f(9)}{f(8)} = \frac{4}{3}e^{7}$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

$a_1 = b_1 = 1$으로 두어도 문제 없다.

∴ $a_n = r_a^{n-1}$, $b_n = r_b^{n-1}$ 이라 하자.

두번째 식을 계산하면,

$$\frac{3\cdot\cancel{|r_a|}}{\cancel{1-|r_a|^2}} = \frac{7\cdot|r_a|^{\cancel{2}}}{\cancel{1-|r_a|^3}}$$

$1+|r_a|$ $\quad$ $1+|r_a|+|r_a|^2$

$7|r_a|+7|r_a|^2 = 3+3|r_a|+3|r_a|^2 \Longrightarrow |r_a| = \frac{1}{2}$

if $r_a = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 이므로,

$\frac{1}{1-r_a r_b} = \frac{1}{1-r_b}$ $\quad$ $r_b = 0$. 모순.

∴ $r_a = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1+\frac{r_b}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-r_b} \Longrightarrow r_b = \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^{2n-2}+(\frac{1}{4})^{3n}}{(\frac{1}{4})^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = S$$

∴ $120S = 162$.

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

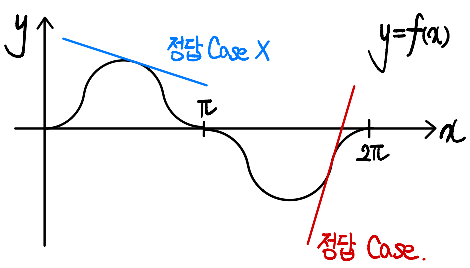
$$h(x) = \int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ 이므로,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\cos 2x + \alpha & (2n\pi \le x \le (2n+1)\pi) \\ \frac{1}{4}\cos 2x + \beta & ((2n+1)\pi \le x \le 2(n+1)\pi) \end{cases}$$

WLOG, $f(0)=0$이라 하자.



$h'(x) = f(x) - g(x)$

조건상 $f(a) = g(a)$이므로,

$x=a$ 근처에서 $h'(x)$의 부호 변화가 있는지 살피자.

∴ 정답 Case : a가 $y=f(x)$의 변곡점일 때.

$a_1 = \frac{\pi}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}\pi$, $a_3 = \pi$ 이며

$a_{n+3} = a_n + \pi$ (By 주기성)

∴ $a_6 = 2\pi$

$\frac{100}{\pi} \times (2\pi - \frac{3}{4}\pi) = 125$.