제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 A$(a,\ -2,\ 6)$, B$(9,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4,\ 0,\ 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\frac{a+9}{2}=4$ $a=-1$

$\frac{6+b}{2}=7$ $b=8$

$a+b=7$

24. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{6}=1$ $\therefore a=3$

$\frac{\sqrt{3}x}{9}-\frac{2y}{6}=1 \Longrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$

$m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$= 53 - 4|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 17$

$\therefore |\vec{a}\cdot\vec{b}| = 9$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}\cdot\vec{b}|$

$= 2$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{2}$

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

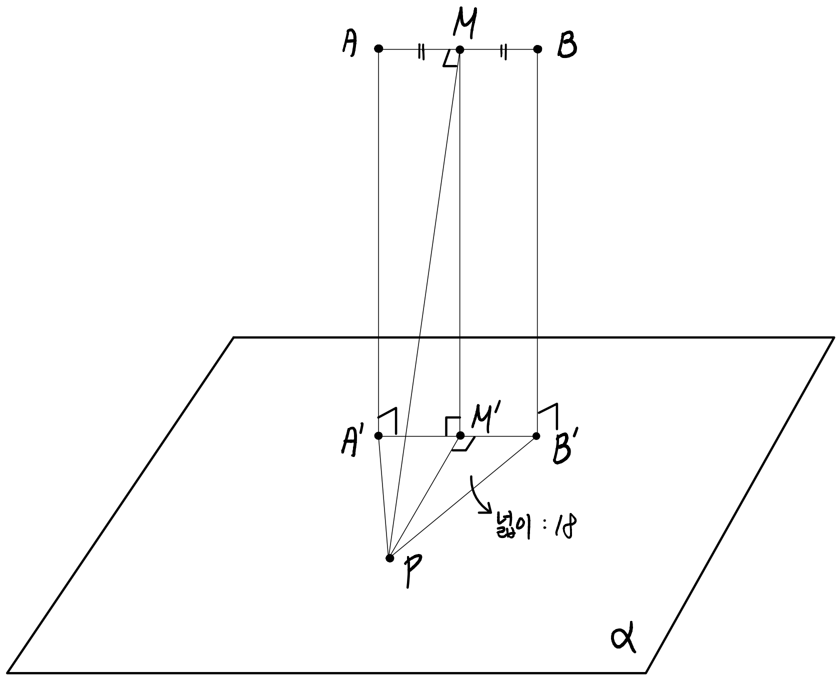
$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = 6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{PM'} \perp \overline{A'B'}, \quad \overline{PM'} = 6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24



점 A, B, P로 만들어지는 평면을 β라 하자.

α와 β의 이면각을 θ라 하면,

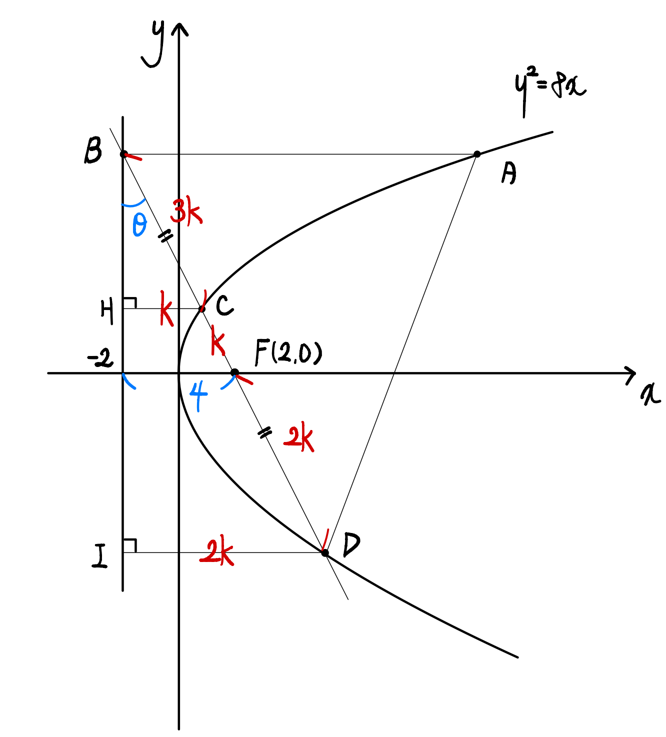
$18 \cdot \cos\theta = \frac{9}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 이다.

$\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = \cos\theta$

$\therefore \overline{PM} = 24$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{CF}}<\overline{\mathrm{DF}}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$
④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$



$\triangle$BCH $\backsim$ $\triangle$BDI 닮음비 1:2

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{CF}}=k$라 하면, $\overline{\mathrm{DI}}=\overline{\mathrm{DF}}=2k$이다.

∴ $\angle\mathrm{CBH}=\theta$라 하면, $\sin\theta=\frac{1}{3}$, $k=3$이다.

$B(-2, 8\sqrt{2})$, $A(16, 8\sqrt{2})$

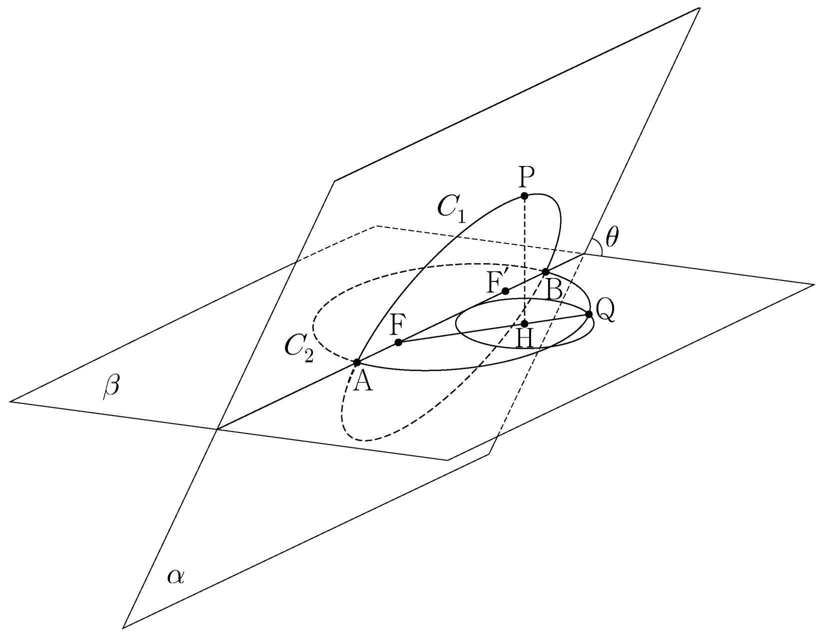
$\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 두면, 높이는 $\overline{\mathrm{BI}}$와 같고,

$\overline{\mathrm{BI}}=6k\cos\theta=12\sqrt{2}$

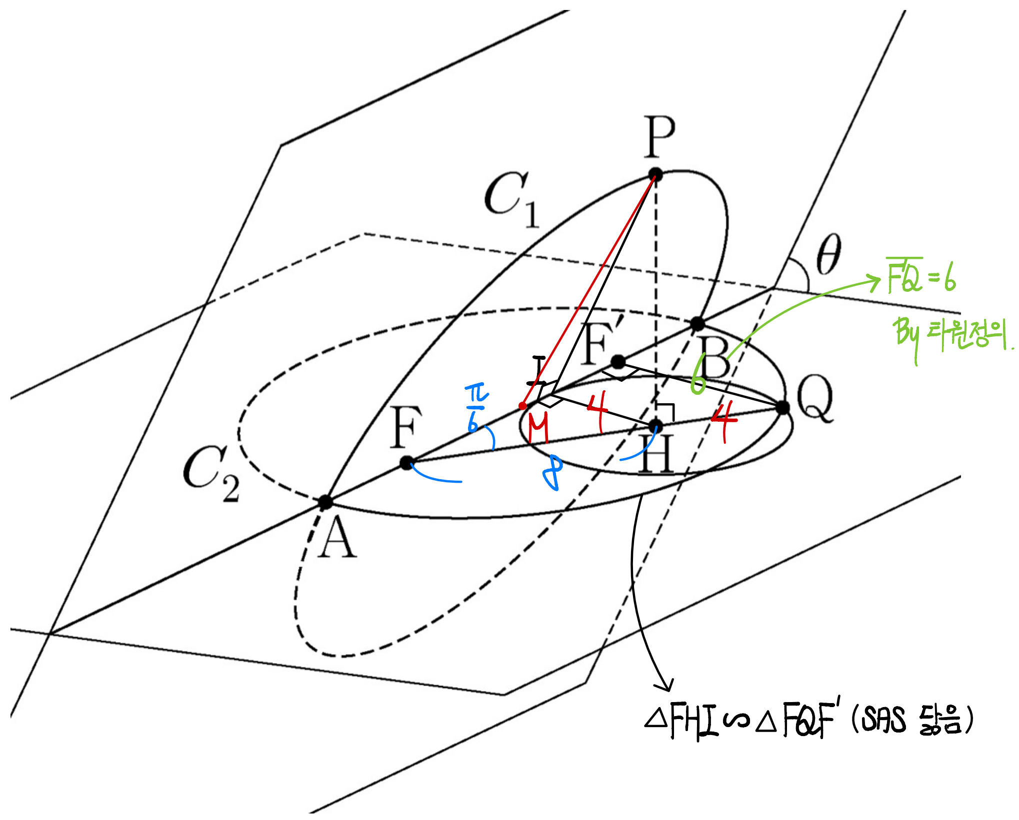
∴ $S=\frac{1}{2}\times18\times12\sqrt{2}$

$=108\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{HF'}}<\overline{\mathrm{HF}}$이고 $\angle\mathrm{HFF'}=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{FH}}<\overline{\mathrm{FQ}}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$



$\overline{\mathrm{FF'}}$의 중점을 M이라 하자. $\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PM}}=9$ (반지름), $\overline{\mathrm{PI}}=\sqrt{78}$

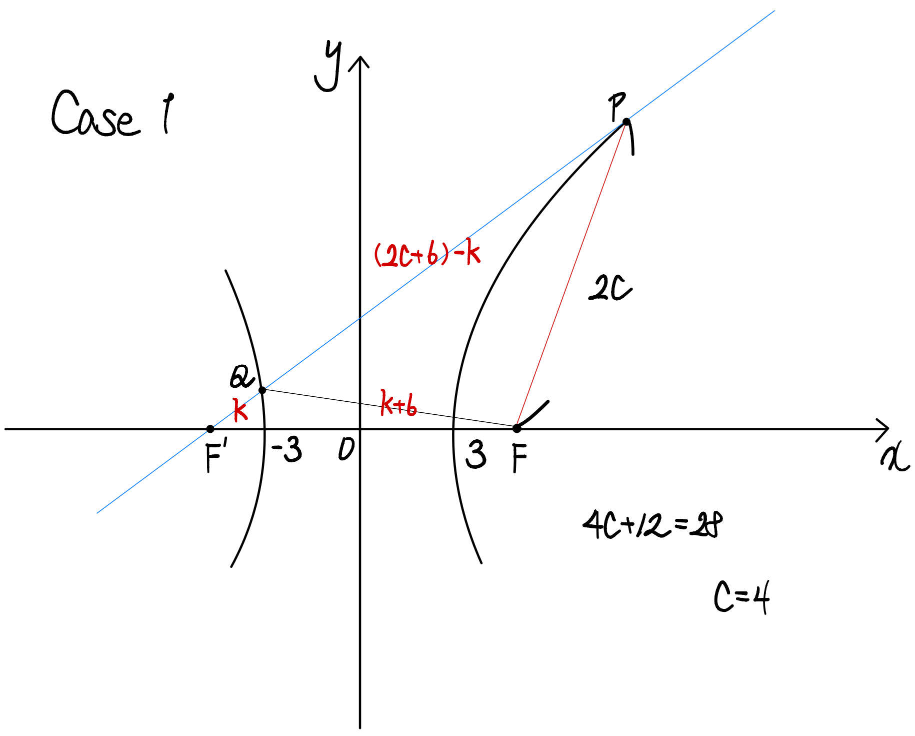
∴ $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{78}}$

단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
> 점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
>
> (나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.
>
> (다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

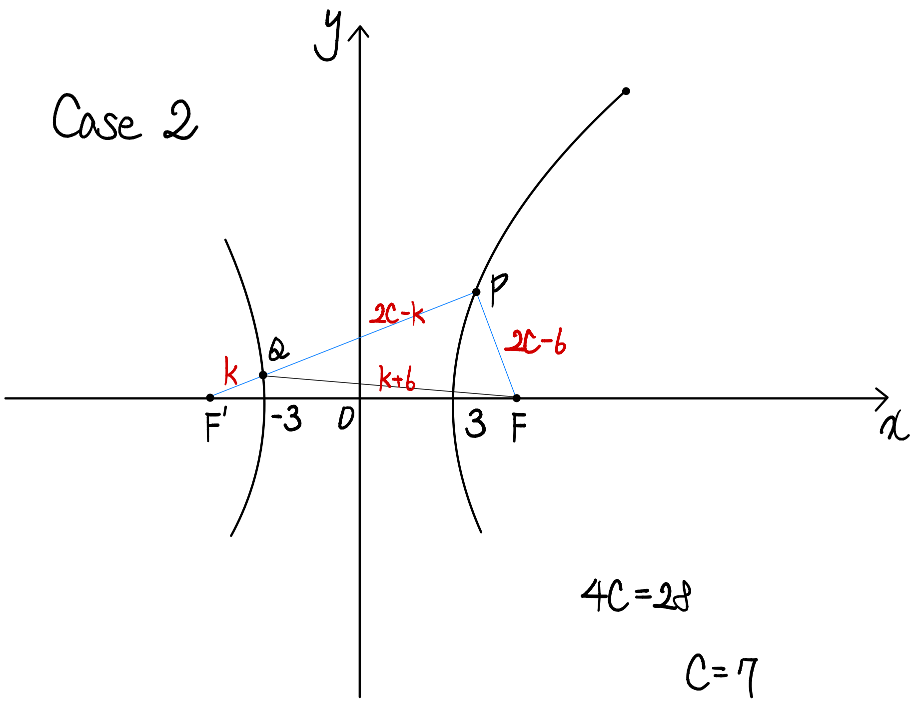
Case 1



$4C+12=28$

$C=4$

Case 2



$4C=28$

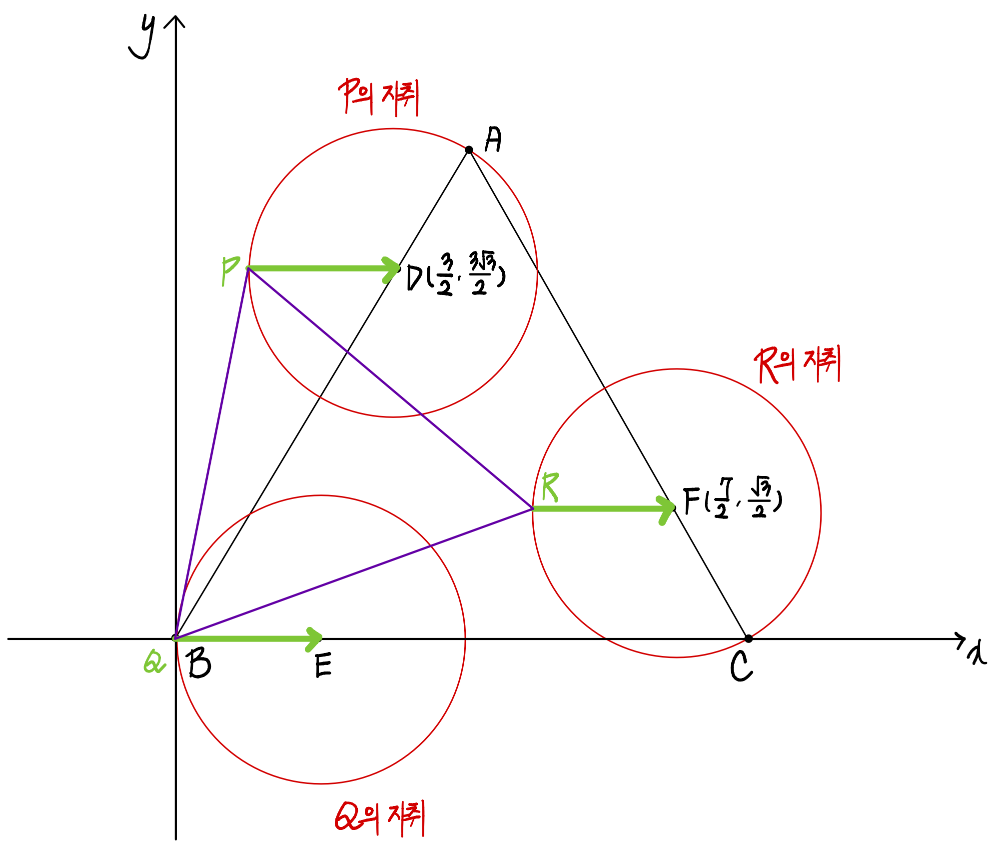
$C=7$

11

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{FR}}|=1$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]



$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{EC}$

$+\ \overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FA}$

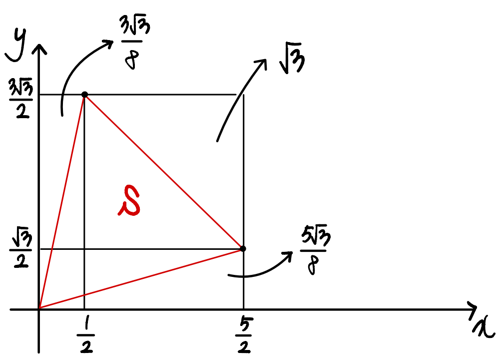
$\overrightarrow{AX}=\underbrace{\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF}}_{\text{크기 : 1 \& 모든 방향 가능}}$

∴ $|\overrightarrow{AX}|$가 최대일 때는, $\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE}, \overrightarrow{RF}$ 방향이 모두 같을 때이다.

위의 세 벡터를 모두 (1,0)으로 두고, 좌표를 잡자.

Q(0,0)이라 두면,

$P(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $R(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$이다.



$S=\frac{7\sqrt{3}}{4}$, $16S^2=147$