2025학년도 avokado 공통 모의고사 1회 문제지

제 2 교시

수학 영역

성명		수험 번호						–				

1. 2^4의 값은? [2점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

2. $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$의 최솟값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\lim_{x\to 2+}\frac{x^x-4}{x-2}\geq k$임을 x^n(n은 상수)의 미분법만을 오직 한 번 사용하여 알 수 있는 k의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x,y에 대해 $f(x+y)=f(x)f(y)$이다.
(나) $f(1)=2$

$\frac{\int_2^3 f(x)dx}{\int_1^2 f(x)dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 세 실수 x,y,z에 대해 $2^x=3^y=5^z$이고 $x+y=1$이다.

$6^{\frac{xy}{z}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 다음과 같이 정의된 a_1이 자연수인 수열 a_n이 있다.

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}a_n\ (\frac{a_n}{3}\text{이 정수}) \\ a_n-3\ (\frac{a_n}{3}\text{이 정수가 아님})\end{cases}$$

$a_1+a_2+a_3$이 3의 배수가 아니며 5로 나눈 나머지가 2이고 a_1,a_2,a_3중 4가 있을 때, 가능한 a_1의 값의 합은? [3점]

① 33 ② 48 ③ 57 ④ 69 ⑤ 90

7. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(18)$의 값은? [3점]

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)+\frac{1}{x}}{f(\frac{1}{x})+x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$$

① 324 ② 342 ③ 360 ④ 378 ⑤ 396

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x+\frac{3}{8}\ (x\le k) \\ k^3-x+\frac{3}{8}\ (x>k)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)$와 x축으로 둘러싸인 넓이가 최대가 되는 $k(-1<k<1)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

9. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형의 넓이의 최댓값이 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$임이 알려져 있다. $\sin x \times \sin y \times \sin(x+y)$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{8}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(7)$의 값은? [4점]

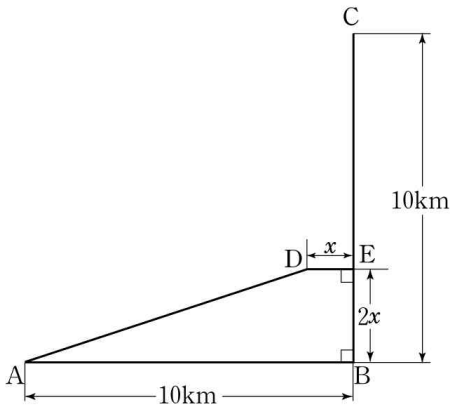
(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(g(x)) = f(1) + (x-1)g(x)$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 1이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

11. 영희와 철수는 DE 구간을 제외하면 -y 방향의 가속도 a로 다음과 같이 이동하여 A 지점에 동시에 도달하였다.

> 영희는 C 지점에서 -x 방향으로 떨어져 A 지점에 도달하였다.
> 철수는 E 지점을 영희와 동시에 출발하여 D 지점까지는 일정한 속도로 이동하였고, D 지점에서 떨어져 A 지점에 도달하였다.

그림을 참고할 때, x의 값은? [4점]



① $20-10\sqrt{3}\ km$ ② $30-15\sqrt{3}\ km$ ③ $20-10\sqrt{2}\ km$
④ $30-15\sqrt{2}\ km$ ⑤ $30-10\sqrt{5}\ km$

12. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n(a_n-1)(a_n-2)=0$이다.
> (나) 두 집합
> $A=\{n|a_n>a_{n+3}\}$, $B=\{n|a_n<a_{n+3}\}$
> 에 대하여 $A=\{13\}$, $B=\{1, 7\}$이다.

$\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값으로 가능한 값을 모두 더한 것은? [4점]

① 75 ② 80 ③ 85
④ 90 ⑤ 95

13. 한 변의 길이가 $\frac{a}{\sqrt{\pi}}$인 정육각형을 대각선으로 이등분한 도형의 꼭짓점 중 2개를 지나고 나머지 두 꼭짓점을 이은 변과 접하는 원의 넓이는 S_1또는 S_2또는 S_3이다. $S_1+S_2=195$일 때, S_3의 값은? (단, S_1, S_2, S_3의 값은 모두 다르며, a는 유리수이다.) [4점]

① $16(33-18\sqrt{2})$ ② $16(32-18\sqrt{2})$ ③ $16(33-16\sqrt{2})$
④ $16(32-16\sqrt{2})$ ⑤ $16(36-18\sqrt{2})$

14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4\sqrt{2})$의 값은? [4점]

> 방정식 $f(\int_0^x f(t)dt)=f(x)$의 서로 다른 실근은 5개이며 이들은 등차수열을 이룬다.

① $\frac{17}{3}$ ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$
④ $\frac{23}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

15. 1부터 100까지의 수가 하나씩 적힌, 앞면이 위를 가리키는 100장의 카드가 있다. 다음 시행을 $n=1,2,\ldots,50$에 대하여 한 번씩 모두 행한 후 앞면이 위를 가리키는 카드의 개수는? [4점]

> 적힌 수가 $2n$ 이상 100 이하의 n의 배수인 카드를 모두 뒤집는다.

① 93 ② 90 ③ 51 ④ 10 ⑤ 7

단답형

16. 실수 x에 대하여 점 $(x, f(x))$와 점 A의 거리의 제곱을 $g(x)$라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(x)=\begin{cases}2 & (x<2)\\ x & (x\geq 2)\end{cases}$ 일 때, 점 A의 x좌표와 y좌표의 합을 구하시오. [3점]

17. 양수 x에 대해 $\sin(2t)=(\sin t)^2$ $(0\leq t\leq x)$의 모든 실근의 합을 $f(x)$라 하자. $f(a)=2a, f(b)=3b$를 만족시키는 두 상수 a,b에 대하여 $\frac{b-a}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점]

18. 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$가 $\int_0^2 f(x)dx < a$를 만족시킬 때, 상수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

> 원점을 지나는 연속함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여
> $f(x+1)=\begin{cases} f(x)+3 & (f(x)<4) \\ 11-f(x) & (f(x)\geq 4) \end{cases}$을 만족시키며
> $0<x<1$에서 이차함수 그래프의 일부를 이룬다.

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=\infty$을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [3점]

20. 6 이하의 자연수 k에 대하여 모든 항이 정수인 수열 a_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_4=a_7=k$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+3}=\begin{cases} k & (\frac{a_n}{3}+\frac{a_{n+1}}{2}+a_{n+2}\text{이 정수}) \\ 0 & (\frac{a_n}{3}+\frac{a_{n+1}}{2}+a_{n+2}\text{이 정수가 아님}) \end{cases}$$
> 이다.

가능한 모든 순서쌍 (a_4, a_5, a_6)의 개수를 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $\frac{f(x)}{x^2}$의 최솟값은 0이고 최소인 x는 2개이다.

(나) 함수 $\frac{f(x)}{x^2}$는 $x=6$에서 최댓값 1을 가진다.

22. 첫째 항과 둘째 항이 모두 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 a_2의 값의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오. [4점]

(가) $a_7=55$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2}a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 짝수가 아닌 경우})\\ \frac{1}{8}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이다.