2. 다항함수 $f(x)$와 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가 다음과 같이 정의된다.

$$h(x)=\begin{cases} g(x-p)+q & \{x\le 0\} \\ x\sin\frac{1}{x} & \{x>0\} \end{cases}$$

이때 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $\sqrt{|g(x)+12|}$는 x축과 y축을 모두 접선으로 가지고, $x=1$에서 $g(x)$와 동일한 극댓값을 갖는다.

(나) 방정식 $g(x-p)+q=0$과 $f(x)=h(\frac{q}{p})$는 모두 삼중근을 가진다.

(다) $f(h(x))$는 실수 전체 집합에서 도함수를 가지며, 그 도함수는 실수 전체 집합에서 연속이다.

(라) $h(f(x))$는 실수 전체 집합에서 도함수를 가지며, 그 도함수는 $x=2$에서만 불연속이다.

위 조건을 모두 만족하는 $f(x)$중 차수가 가장 낮은 것을 $m(x)$라고 하자. $m(3)$의 값은?

$\sqrt{|g(x)+12|}$ 가 y축을 접선으로 가지려면

$\lim_{x\to0}\frac{d}{dx}\sqrt{|g(x)+12|}$ 가 ∞로 발산해야 한다.

$\frac{d}{dx}\sqrt{|g(x)+12|}=\frac{\frac{d}{dx}|g(x)+12|}{2\sqrt{|g(x)+12|}}$ 이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=-12$ 이고 $\left.\frac{d}{dx}|g(x)+12|\right|_{x=0}\neq0$이다.

$g(x)$는 사차함수이므로 $g(0)=-12$, $g'(0)\neq0$ 이다

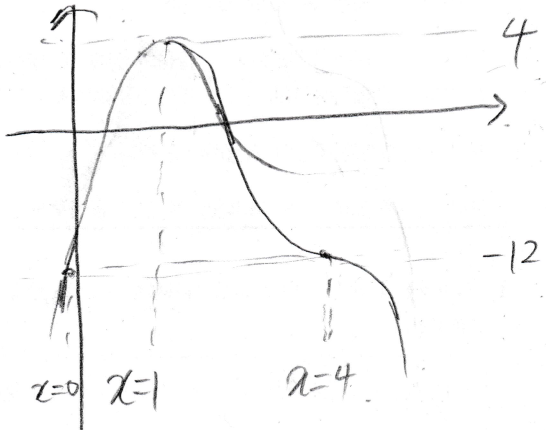
한편 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로

$g'(1)=0$ 이고 $g(1)=\sqrt{|g(1)+12|}$ 이다.

$\therefore\ g(1)=4$

이때 (나)에 의하여 $g(x)$를 평행이동 시켜 삼중근이 존재해야 하므로 $g''(x)=0$, $g'(x)=0$ 인 x가 존재해야한다.

이를 종합해 $g(x)$를 그려보면



이렇게 된다. 거리곱을 통해

$g(x)$ 최고차항의 계수는 $-\frac{16}{27}$임을 알 수있다.

$q=12$ 가 된다.

여기서 잠시 조건 (라)로 넘어가보자

$h(f(x))$가 실수 전체 집합에서 도함수를 가지므로 $h(x)$가 연속이어야 한다.
($f(x)$가 연속이므로)

따라서

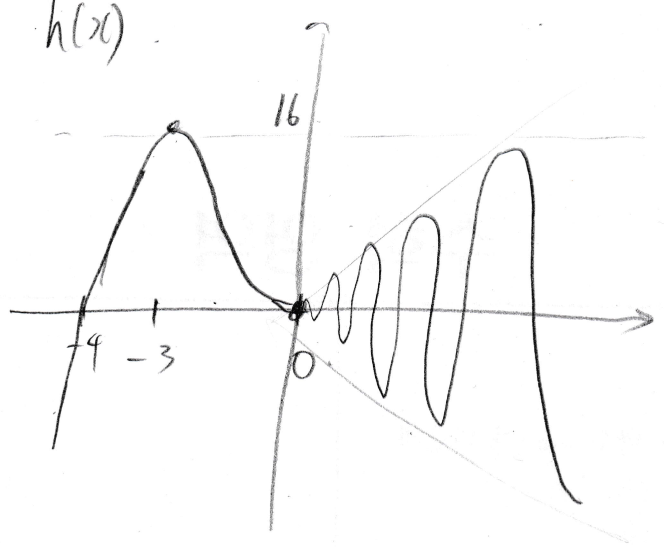
$g(-p)+12=0$ 이어야 한다.

$-p=0,4$ $\therefore$ $p=0,-4$ 이다.

다시 (나)로 돌아와서 $f(x)=h\left(\frac{q}{p}\right)$가 삼중근을 가지므로 $p\neq0$ 이다.

$\therefore$ $p=-4$ 이다. 또한

$f(x)=h(-3)=g(1)+12=16$ 이 삼중근을 가진다.



우선, 조건 (다)부터 해석해보자.

$f(h(x))$는 실수 전체 집합에서 도함수를 가지므로

$f'(h(x)) \times h'(x)$는 실수 전체에서 존재해야 하며, 연속이어야 한다.

즉 $\lim_{x \to 0+} f'(h(x)) \times h'(x) = f'(h(0)) \times h'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(h(x))h'(x)$

인 것이다. $x=0$ 이외의 값에서는 너무 당연히 연속이라 생각하지 않는다.

우선 $f'(h(0)) \times h'(0) = f'(0) \times h'(0)$이다.

이때 $h'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(\Delta x) - h(0)}{\Delta x}$ 이다.

$\Delta x \to 0-$로 갈 때 이는 0 이지만

$\Delta x \to 0+$로 갈 때 이는

$\lim_{\Delta x \to 0+} \sin \frac{1}{\Delta x}$ 이므로 존재하지 않는다.

따라서 $f'(0) = 0$ 이어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to 0} f'(h(x)) \times h'(x) = 0$ 이 된다.

※ 조건 (가)를 해석해보자 (많이 어려움…).

$h'(f(x)) \times f'(x)$가 존재하고 $x=2$에서만 불연속이어야 한다. 여기서 핵심은 도함수가 불연속 지점에서도 값을 가져야 한다는 것이다. 이게 어떻게 가능하냐고 물을 수 있지만 놀랍게도 가능하다. 예를 들어

ex) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

에서 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$이고

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ 이므로 $f'(0) = 0$이다.

따라서 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 이다.

$f'(x)$가 실수 전체 집합에서 정의되지만 $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f(0)$ 이므로 연속은 아니다.

위와 같은 경우가 존재한다.

따라서 $h(f(x))$가 미분가능하다고 해서 도함수가 연속이 아니라는 말이다.

우선 $x=2$에서 $\frac{d}{dx} h(f(x))$가 불연속이지만 값이 존재하므로

$\lim_{x \to 2} \frac{h(f(x)) - h(f(2))}{x - 2}$는 존재하지만

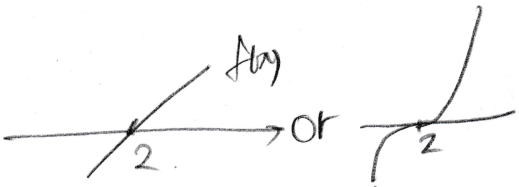
$\lim_{x \to 2} h'(f(x)) \times f'(x) \neq h'(f(2)) \times f'(2)$ 라는 의미다.

i) $f(2)>0$, $f(2)<0$

무난하게 $h'(f(x))f'(x)$가 $x=2$ 에서 연속이다.

ii) $f(2)=0$

①

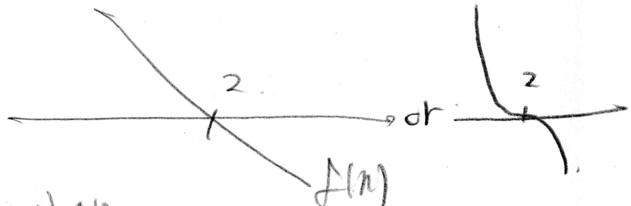


$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\sin\frac{1}{f(x)}}{x-2} \neq \lim_{x\to 2-}\frac{g(f(x)+4)+12}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2+}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)\times\sin\frac{1}{f(x)} = f'(2)\times\sin\frac{1}{f(2+)}\neq 0$$

이므로 안된다.

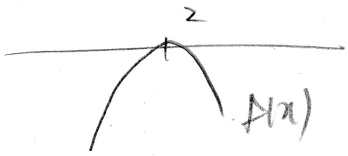
②



$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(f(x)+4)+12}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)\sin\frac{1}{f(x)}}{x-2}\neq 0$$ 이므로 안된다.

③

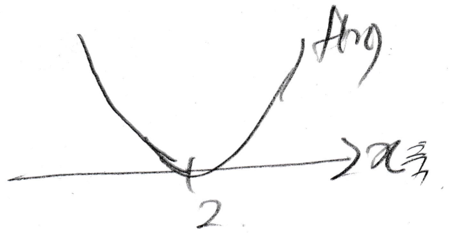


$$\lim_{x\to 2}\frac{g(f(x)+4)+12}{x-2}=0$$ 이므로 미는 존재한다. 다만

$$\lim_{x\to 2}h'(f(x))\times f'(x) = h'(f(2))\times f'(2)$$ 이므로

조건에 맞지 않는다.

④



$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)\cdot\sin\frac{1}{f(x)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\sin\frac{1}{f(x)} = f'(2)\lim_{x\to 2}\sin\frac{1}{f(x)}$$

$=0$ 이므로 미는 존재한다.

$x=2$ 근처에서

$$h'(f(x))\times f'(x) = \left\{\sin\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}\cos\frac{1}{f(x)}\right\}f'(x)$$

다만 $x=2$에서 $\frac{d}{dx}h(f(x))=0$ 이고

$$\lim_{x\to 2}\left(f'(x)\sin\frac{1}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)}\cos\frac{1}{f(x)}\right)\neq 0$$ 이므로

문제조건을 만족시킨다.

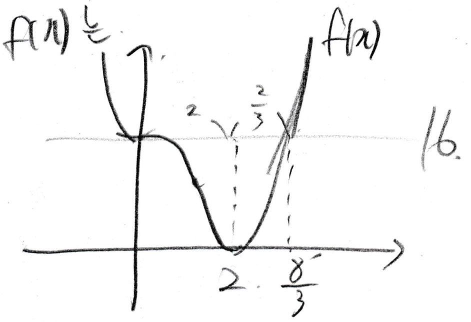
따라서 $f(x)$는 $y=16$에서 삼중근을 가지고

$x=2$ 에서 극솟값 0을 가진다.

또는 $f'(0)=0$ 이어야 한다. 이 세 조건을

만족시키는 $f(x)$를 하나가 최소인

$f(x)$는



$-\frac{16}{3}$

이거다.

$$f(x)-16 = 3x^3\left(x-\frac{8}{3}\right)$$

$$m(x) = 3x^4 - 8x^3 + 16$$

$$m(3) = 243 - 216 + 16 = 40$$