수학 영역

1. 함수 $f(x)=(x^3+5)(x^2-1)$ 에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

2. $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$ 에 대하여 미분계수 $f'(1)$ 의 값은?

3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$의 값을 구하시오.

(가) $f(a)=f(2)=f(6)$ (나) $f'(2)=-4$

4. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

5. 사차함수 $f(x)=k(x-1)(x-a)(x-a+1)(x-a+2)\ (k>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
> (나) 함수 $f(x)$의 두 극솟값의 곱은 25이다.

두 상수 a, k에 대하여 ak의 값은?

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ -f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $x=-1$에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

7. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x값에서 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

8. 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2+x)=f(2-x)$
> (나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(x)$의 극댓값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수

$$g(x)=|(x-a)f(x)|$$

가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-20$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-4 \text{ 또는 } t>0)\\ 2 & (t=-4 \text{ 또는 } t=0)\\ 3 & (-4<t<0)\end{cases}$$

이다. $f(9)$의 값을 구하시오.

12. 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다. (나) $f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

14. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x|f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 극한
> $$\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h}\times\frac{g(t-h)}{h}\right\}$$가 양의 실수로 수렴하는 실수 t의 개수는 1이다.
>
> (나) x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2+4g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(3)$의 값을 구하시오.

17. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=6$에서 불연속이다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(다) $f(5)f(7)<0$

$f(-4)$의 값을 구하시오.

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, β $(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=\lvert f'(x)\rvert-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

20. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

21. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\ (0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f(k-1)f(k+1)<0$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

23. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x \to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은?

25. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \leq 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

26. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \leq 2$이다.

(나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오.

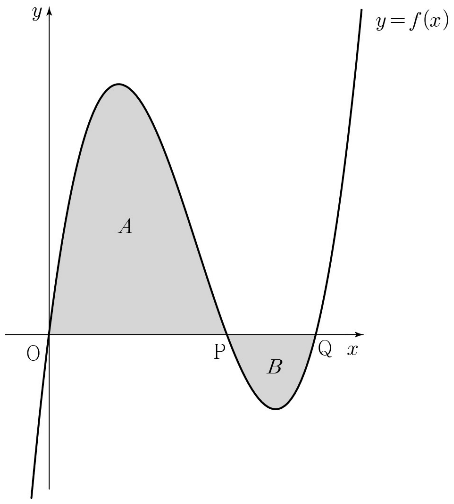
27. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은?



28. 실수 a $(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

29. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 4+}h(t)=5$

(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.