공부하다

박수칠 수학

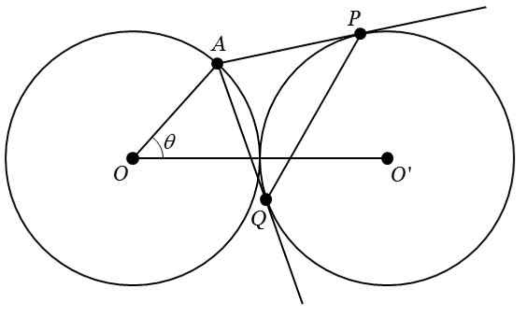
기본서

도형에 대한 삼각함수 극한 기출

미적분Ⅱ-Ⅱ.삼각함수

1 [2014학년도 6월 모평 B형 #29]

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O'이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO'=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값을 구하여라. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

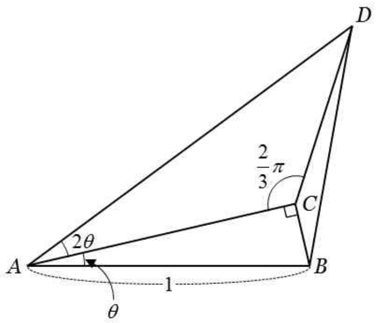


2 [2014학년도 9월 모평 B형 #29]

그림과 같이 길이 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle BAC=\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{6})$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를

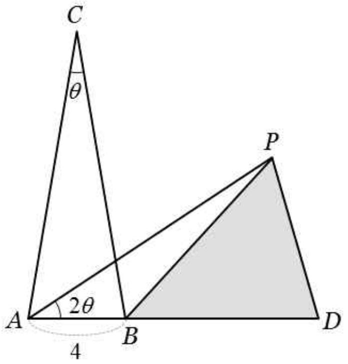
$$\angle ACE=\frac{2}{3}\pi,\ \angle CAD=2\theta$$

가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}=p$이다. $300p^2$의 값을 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.) [4점]



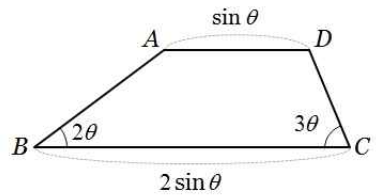
3 예제13 [2014학년도 수능 B형 #28]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle PAB=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\{\theta \cdot S(\theta)\}$의 값을 구하여라. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이다.) [4점]



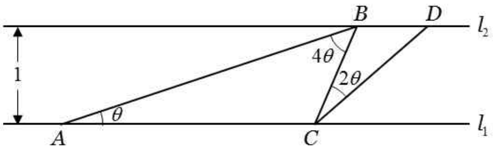
4 [2015학년도 6월 모평 B형 #29]

그림과 같이 사다리꼴 $ABCD$에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle B=2\theta$, $\angle C=3\theta$, $\overline{BC}=2\sin\theta$, $\overline{AD}=\sin\theta$이다. 사다리꼴 $ABCD$의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



5 [2015학년도 9월 모평 B형 #28]

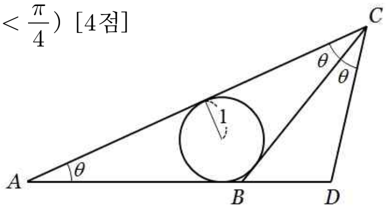
그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle ABC = 4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle BCD = 2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.
삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{T_1}{T_2}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{10}$) [4점]



6 [2015학년도 수능 B형 #20]

반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값을 구하여라.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

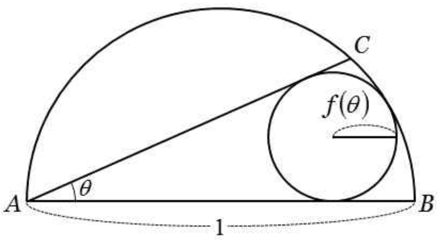


7 [2016학년도 6월 모평 B형 #29]

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

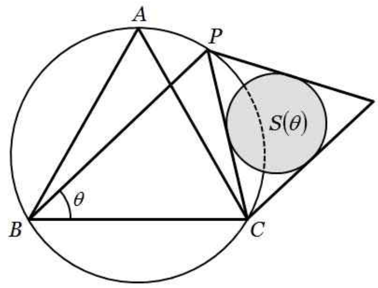
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



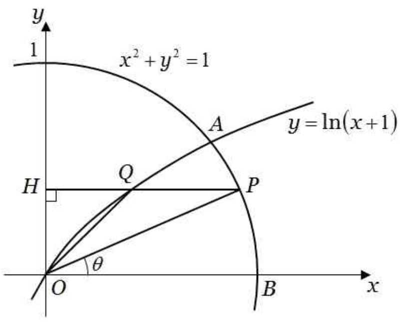
8 [2016학년도 9월 모평 B형 #28]

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\angle PBC=\theta$라 하고, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=a\pi$일 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]



9 [2016학년도 수능 B형 #28]

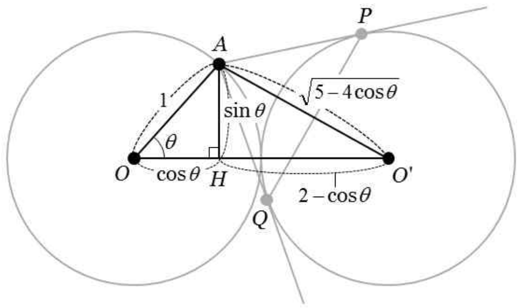
그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 $B(1, 0)$에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle POB=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) [4점]



정답 및 해설

1 $2\sqrt{2}$

각 θ는 왼쪽 원에 있고, 극한에 포함된 선분 PQ는 오른쪽 원에 있다. 여기에 선분 AO'을 추가하면 각 θ를 포함하는 삼각형 AOO'의 한 변이면서 선분 PQ를 수직이등분하므로 각 θ와 선분 PQ를 연결시킬 수 있다.



점 A에서 선분 OO'으로 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 AHO, AHO'이 만들어진다. 삼각형 AHO에서

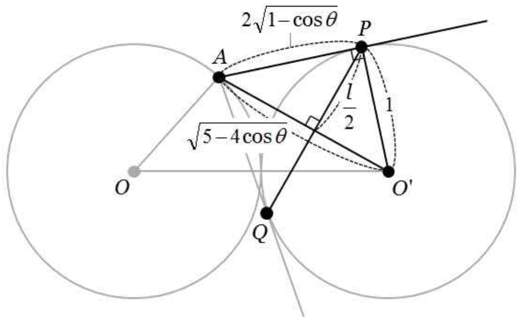
$$\sin\theta=\frac{\overline{AH}}{1}\Rightarrow\overline{AH}=\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{OH}}{1}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\theta$$

이고, $\overline{OO'}=2$로부터 $\overline{HO'}=2-\cos\theta$가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\overline{AO'}^2&=\sin^2\theta+(2-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta-4\cos\theta+4=5-4\cos\theta\end{aligned}$$

$$\overline{AO'}=\sqrt{5-4\cos\theta}$$



다음으로 선분 PO'을 추가하면 직각삼각형 APO'이 만들어지고, 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AP}^2=\overline{AO'}^2-1=(5-4\cos\theta)-1=4(1-\cos\theta)$$

$$\overline{AP}=2\sqrt{1-\cos\theta}$$

가 된다. 그리고 선분 PQ의 길이를 l로 두면 점 P에서 선분 AO'에 내린 수선의 길이가 $\frac{l}{2}$이므로

$$\frac{l}{2}\times\sqrt{5-4\cos\theta}=2\sqrt{1-\cos\theta}\times 1$$

$$l=\frac{4\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}=\overline{PQ}$$

이 된다.

그러므로 주어진 극한은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

가 되고, $\frac{0}{0}$의 꼴이므로 분모・분자에 $\sqrt{1+\cos\theta}$를 곱해서 계산하면 다음과 같다.

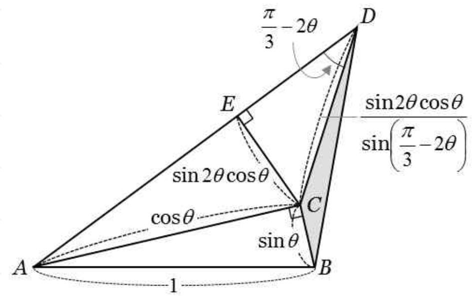
$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sqrt{1-\cos\theta}\times\sqrt{1+\cos\theta}}{\theta\sqrt{5-4\cos\theta}\times\sqrt{1+\cos\theta}}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin\theta}{\theta\sqrt{5-4\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\sqrt{5-4\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}\right)\\&=4\times1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

★조건 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에 의해 분자를 다음과 같이 계산했다.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos\theta}\times\sqrt{1+\cos\theta}&=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}\\&=|\sin\theta|=\sin\theta\end{aligned}$$

2 100

각 BCD의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$이므로 두 변 BC, CD의 길이만 알면 삼각형 BCD의 넓이를 구할 수 있다.



먼저 삼각형 ABC에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{1}\Rightarrow\overline{BC}=\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{AC}}{1}\Rightarrow\overline{AC}=\cos\theta$$

이다. 그리고 점 C에서 선분 AD로 내린 수선의 발을 E라 하면 직각삼각형 ACE, CDE가 만들어지며, 삼각형 ACE에서

$$\sin2\theta=\frac{\overline{CE}}{\cos\theta}\Rightarrow\overline{CE}=\sin2\theta\cos\theta$$

가 된다. 또한 삼각형 CDE에서 $\angle CDE=\frac{\pi}{3}-2\theta$이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)=\frac{\sin2\theta\cos\theta}{\overline{CD}}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sin2\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

이다.

따라서

$$S(\theta)=\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\times\sin\frac{5}{6}\pi$$

$$=\frac{1}{4}\times\sin\theta\times\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

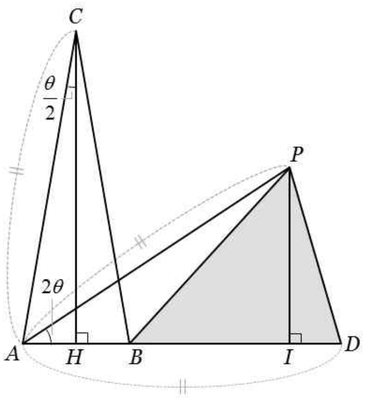
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{4}\times\frac{\sin\theta\sin2\theta}{\theta^2}\times\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$300p^2=300\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=100$$

3 16

이등변삼각형 ABC의 한 변 길이 $\overline{AB}=4$와 한 내각 크기 $\angle ACB=\theta$를 이용해서 다른 변의 길이를 θ에 대한 식으로 표현해보자.



꼭짓점 C에서 밑변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle ACH=\frac{\theta}{2},\ \overline{AH}=2$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\overline{AC}}\ \Rightarrow\ \overline{AC}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

가 된다. 그리고 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 AIP에서

$$\sin2\theta=\frac{\overline{PI}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PI}}{\overline{AC}}\ \Rightarrow\ \overline{PI}=\overline{AC}\sin2\theta=\frac{2\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

가 된다. 또한

$$\overline{BD}=\overline{AD}-4=\overline{AC}-4=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}-4=\frac{2-4\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

이므로 삼각형 BDP의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{PI}=\frac{1}{2}\times\frac{2-4\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{2\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(2-4\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

이며, 주어진 극한은 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{\theta\to0+}\{\theta\cdot S(\theta)\}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(2-4\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\theta\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

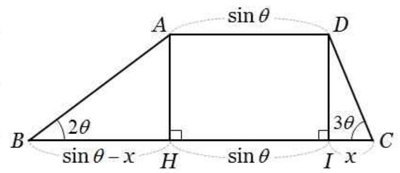
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(2-4\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\theta\times2\theta}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=2\times\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=16$$

★극한 $\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$의 계산에서는 $\theta\to0+$일 때 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$임을 이용했다.

4 14

평행사변형의 높이를 구하기 위해 두 점 A, D에서 아랫변 BC에 수선을 내려 직각삼각형을 만든다.



이때 생긴 수선의 발을 각각 H, I라 하고 $\overline{CI}=x$라 두면

$$\overline{HI}=\sin\theta,\ \overline{BH}=\sin\theta-x$$

가 된다.

x를 θ에 대한 식으로 나타내기 위해 $\triangle ABH$의 한 변 AH와 $\triangle CDI$의 한 변 DI의 길이가 같음을 이용하자. $\triangle ABH$에서

$$\tan2\theta=\frac{\overline{AH}}{\sin\theta-x}\ \Rightarrow\ \overline{AH}=(\sin\theta-x)\tan2\theta$$

이고, $\triangle CDI$에서

$$\tan3\theta=\frac{\overline{DI}}{x}\ \Rightarrow\ \overline{DI}=x\tan3\theta$$

이므로 $\overline{AH}=\overline{DI}$에 의해

$$(\sin\theta-x)\tan2\theta=x\tan3\theta\ \Rightarrow\ x=\frac{\sin\theta\tan2\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

가 성립하고, 사다리꼴의 높이는 다음과 같다.

$$\overline{DI}=x\tan3\theta=\frac{\sin\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

따라서 사다리꼴의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta+\sin\theta)\times\frac{\sin\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

$$=\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2(\tan2\theta+\tan3\theta)}$$

이며, 주어진 극한의 값은 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2\theta^3(\tan2\theta+\tan3\theta)}$$

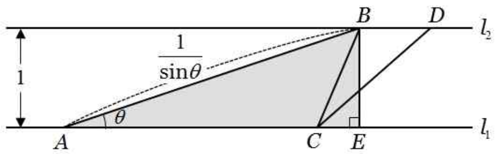
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\theta^2\times2\theta\times3\theta}{2\theta^3(2\theta+3\theta)}=\frac{9}{5}$$

$\therefore p+q=14$

★극한 $\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2\theta^3(\tan2\theta+\tan3\theta)}$ 의 계산에서는 $\theta\to0+$일 때 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$, $\tan\theta\fallingdotseq\theta$임을 이용했다.

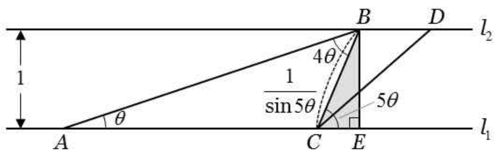
5 6

삼각형 ABC, BCD의 변의 길이를 구하기 위해 주어진 각과 직선 l_1, l_2 사이의 거리를 포함하는 직각삼각형을 만들어보자.



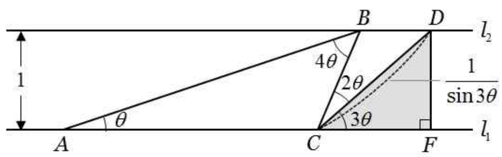
점 B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 E라 하면 직각삼각형 ABE에서

$$\sin\theta=\frac{1}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{1}{\sin\theta}$$



직각삼각형 BCE에서 $\angle BCE=\angle BAC+\angle ABC=5\theta$이므로

$$\sin5\theta=\frac{1}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{BC}=\frac{1}{\sin5\theta}$$



점 D에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 F라 하면 직각삼각형 CDF에서 $\angle DCF=\angle BCF-\angle BCD=3\theta$이므로

$$\sin3\theta=\frac{1}{\overline{CD}}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{1}{\sin3\theta}$$

따라서 T_1, T_2와 $\lim_{\theta\to0+}\frac{T_1}{T_2}$은 다음과 같이 계산된다.

$$T_1=\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin4\theta$$

$$T_2=\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\frac{1}{\sin3\theta}\times\sin2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T_1}{T_2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin4\theta}{\frac{1}{\sin5\theta}\times\frac{1}{\sin3\theta}\times\sin2\theta}$$

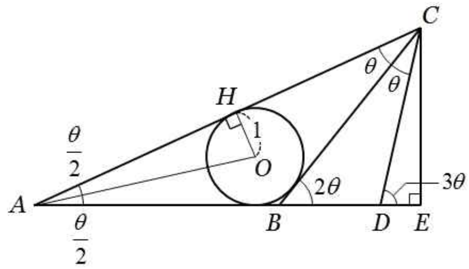
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin5\theta\times\sin3\theta\times\sin4\theta}{\sin\theta\times\sin5\theta\times\sin2\theta}$$

$$=\frac{5\times3\times4}{1\times5\times2}=6$$

★극한 $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin5\theta\times\sin3\theta\times\sin4\theta}{\sin\theta\times\sin5\theta\times\sin2\theta}$ 의 계산에서는 $\theta\to0+$일 때 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$임을 이용했다.

6 $\frac{4}{3}$

삼각함수의 정의로 접근하기 위해 길이를 알 수 있는 선분을 변으로 하는 직각삼각형을 그려보자.



먼저 원의 중심을 O로 두고, 원과 선분 AC의 접점을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서 $\angle OAH=\frac{\theta}{2}$이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\overline{AH}}\Rightarrow\overline{AH}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이고, 삼각형 BAH에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

가 성립한다.

다음으로 점 C에서 선분 AD의 연장선으로 내린 수선의 발을 E라 하면 삼각형 ACE에서 $\overline{AC}=2\overline{AH}=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\Rightarrow\overline{CE}=\overline{AC}\sin\theta=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이고, 삼각형 CDE에서 $\angle CDE=3\theta$이므로

$$\sin3\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\overline{CE}}{\sin3\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

가 성립한다.

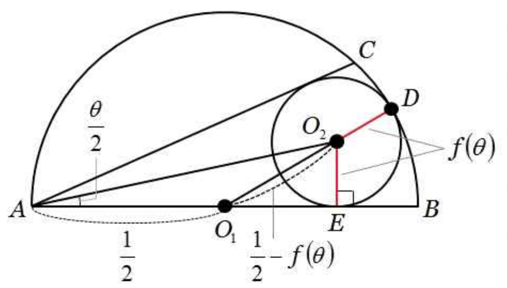
따라서 $S(\theta)$와 $\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$S(\theta)=\triangle BDC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\theta$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\sin^2\theta}{\cos\theta\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{3}\times4=\frac{4}{3}$$

7 25

반원의 중심을 O_1, 원의 중심을 O_2, 반원과 원의 접점을 D라 하면 세 점 O_1, O_2, D는 한 직선 위에 있다. 그리고 직각삼각형을 만들기 위해 원과 선분 AB의 접점을 E라 하고 선분 O_1O_2, O_2A, O_2E를 추가하면 다음과 같은 그림이 나타난다.



여기서

$$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1D}-\overline{O_2D}=\frac{1}{2}-f(\theta)$$

이고, 삼각형 O_2AE에서 $\angle O_2AE=\frac{\theta}{2}$이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{f(\theta)}{\overline{AE}}\Rightarrow\overline{AE}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\overline{O_1E}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

이 된다.

삼각형 O_1O_2E에 피타고라스의 정리를 적용하면 $f(\theta)$를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$\overline{O_1O_2}^2=\overline{O_1E}^2+\overline{O_2E}^2$$
$$\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\right\}^2+f(\theta)^2$$
$$\frac{1}{4}-f(\theta)+f(\theta)^2=\frac{f(\theta)^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}+f(\theta)^2$$
$$-f(\theta)=\frac{f(\theta)^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$-1=\frac{f(\theta)}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

그러므로 α의 값은 다음과 같이 계산된다.

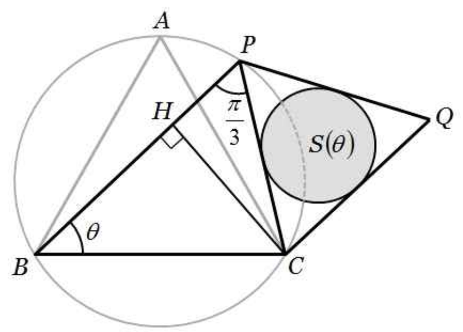
$$\alpha=\lim_{x\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\lim_{x\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$100\alpha=25$$

8 80

원의 넓이를 θ에 대한 식으로 표현하려면 원에 외접하는 정삼각형의 한 변 길이를 θ에 대한 식으로 표현해야 하고, 그러려면 원에 외접하는 정삼각형과 삼각형 PBC의 공통 변 PC를 θ에 대한 식으로 표현해야 한다.

먼저 두 각 BAC, BPC는 호 BC의 원주각이므로 크기가 같다. 따라서 $\angle BPC=\frac{\pi}{6}$이고, 삼각형 PBC에서 두 각 B, P와 한 변 BC를 아는 상태가 된다. 이를 이용해서 선분 PC의 길이를 구하기 위해 직각삼각형을 만들어보자.



위 그림과 같이 점 C에서 선분 BP로 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH는 두 삼각형 BCH, PCH의 공통 변이 된다. 그리고 삼각형 BCH에서

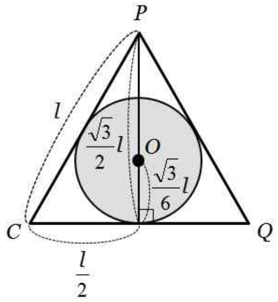
$$\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\overline{CH}=2\sqrt{3}\sin\theta$$

이고, 삼각형 PCH에서

$$\overline{PC}:\overline{CH}=2:\sqrt{3}\Rightarrow\overline{PC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\overline{CH}=4\sin\theta$$

가 된다.

정삼각형은 내심과 무게중심이 일치하므로 다음 그림과 같이 한 변 길이가 l인 정삼각형의 내접원 반지름은 $\frac{\sqrt{3}}{6}l$, 내접원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2=\frac{\pi}{12}l^2$이다. 이때, $l=\overline{PC}=4\sin\theta$이므로



$$S(\theta)=\frac{\pi}{12}\times(4\sin\theta)^2=\frac{4}{3}\pi\sin^2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\frac{4}{3}\pi\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\frac{4}{3}\pi$$

$$a=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ 60a=80$$

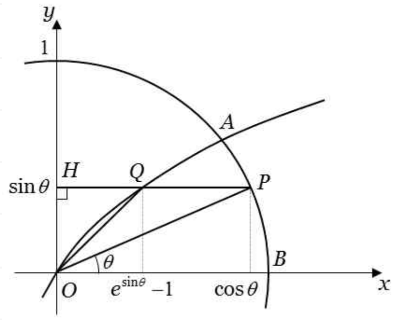
9 30

$S(\theta)$, $L(\theta)$를 θ에 대한 식으로 표현하기 위해 각 꼭짓점의 좌표부터 구해보자.

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고, 두 점 P, Q의 y좌표가 일치하므로 점 Q의 y좌표는 $\sin\theta$이다. 이를 함수식 $y=\ln(x+1)$에 대입하면

$$\sin\theta=\ln(x+1)\ \Rightarrow\ x=e^{\sin\theta}-1$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\left(e^{\sin\theta}-1, \sin\theta\right)$가 된다.



따라서

$$S(\theta)=\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\sin\theta$$

$$L(\theta)=\overline{HQ}=e^{\sin\theta}-1$$

$$k=\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}\times\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\right\}$$

이고, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$에서 $\sin\theta=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{t}{e^t-1}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 60k=30$$