

[초성민수학] 수학공부법 - 다섯가지 수학적 능력.

O. 들어가기 앞서.

수학을 잘하기 위한 많은 고민이 있는 학생들에게
방향성을 제시하기 위해서 칼럼을 시작합니다.

잘 써지려나 모르겠으나, 최선을 다해써보겠습니다.

수학을 잘하려면 도대체 어디서부터 어떻게 해야할까. ??
개념서 혹은 교과서를 보고 기출을 풀고, EBS를 풀고. 그럼 그렇게 풀어나가기만 하면 되는건가 ? 누군가는
그렇게 해서 되었는데 누군가는 되지 않았다면 ????

수학공부 역시 분명히 해답이 있다 생각하며, 칼럼을 연구하였습니다.
평가원에서 말하는 수학능력이란 ??? 그리고 기출문제를 계속 보았구요.

그리하여 저는 우선 수학을 잘하기 위해서 5가지 능력을 정의하였고 이 능력들을 소개하겠습니다.
이러한 능력은 제 입맛대로 골랐기보다는 평가원에서 제시한 수학적 도구이며,
이러한 능력이 중요하다는 것을 보여주기 위해 제가 약간 내용을 덧붙여 예시를 들어가며 설명하는 글이라고
보시면 좋을 것 같습니다.

기본능력	계산능력(A)
	수학적 의사소통(B)
	개념의 이해(C)
고급능력	문제해결력(D)
	문제추론능력(E)

다소 추상적인 이야기 일 수 있겠지만, 최대한 공감할 수 있도록 가시적으로 능력들을 살펴볼 것이며,
이러한 능력들을 기르는 것이 모든 수학강사의 목표라고 볼수 있겠습니다.

이 글 이하부터는 경어체를 생략하도록 하겠습니다.

다써놓고 내가 봐도 읽기 싫어서 한 문제를 예시로 들겠습니다..

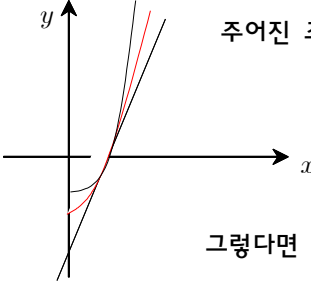
[2016학년도 9월 모의평가 나형 21번]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 2$ 이다.

- ① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

<p>최고차항 1인 다항함수 $f(x)$가 있다. $\Rightarrow f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$ [n차를 언급할 경우 바로 식을 적어가면서 문제를 시작한다. 허나 이 문제에서는 언급이 안되므로 가볍게 그런가보구나 하고 넘어가도 좋다.] 조건(가)를 통해 상수항 획득 조건 (나)를 보고 의사소통 중단.</p>	<p>[수학적 의사소통단계]</p>
<p>문제 및 조건 들을 보아컨대, 함수 유추 문제로 추정. $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 2$ 식을 통해 이게 뭔가 싶음. 여기서 중요한데, 당장의 정보가 부족하므로 $6x - 6$과 $2x^3 - 2$ 을 그린다.</p>	<p>[문제해결력]</p>
<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;">  </div> <div style="flex: 2; padding-left: 10px;"> <p>직선과 삼차함수를 가볍게 그리고 [개념의활용] 눈으로 확인하고 주어진 조건처럼 양의실수에서 $f(x)$가 두 함수 사이에 있어야 한다.</p> <p>이때, $f(x)$는 $(1, 0)$을 지나며 직선과 곡선에 동시에 그 점에서 접하는 함수임을 알아낼 수 있다.</p> <p>그렇다면 우리가 구하고자 하는 함수는 몇 차 다항함수일까? [추론시작] 1차는 죽었다 깨어나도 아니고, 4차라면 x가 커질수록 3차보다 커지므로 아니다. [개념에 의한 배경지식]</p> <p>사실 그래프를 그려보면서, $2x^3 - 2$ 과 직선이 접하므로 $f(x)$ 역시 3차함수임을 추론할 수도 있고, 혹은 2차함수라고 가정하였을 경우에는 (가) 조건과 함께 $(1, 0)$을 지나며 $6x - 6$을 접선으로 가지는 2차함수는 없다.</p> <p>그래서 $f(x)$는 3차함수이고, $(1, 0)$에서 접선의 방정식이 $6x - 6$이며, $(0, -3)$을 지나는 다항 함수를 찾아내면 된다.</p> </div> </div>	<p>[개념의활용] [문제해결력] [문제추론능력]</p>
<p>$f(x)$는 $(1, 0)$, $(0, -3)$을 지나는 최고차항의 계수가 1인 3차 함수이므로 $f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$라 놓을 수 있다. 따라서 $f'(1) = 6$에서 $a + b + 1 = 6$ 이고 $f(0) = -3$에서 $b = 3$이고 $a = 2$이다. 따라서 $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$ $f(3) = 36$이다.</p>	<p>[계산능력]</p>

2. 다섯가지 수학적 능력소개.

A. 계산능력.

주로 초등학생 때 배우는 능력이다. 흔히 말하는 산수 능력이며,
초딩때부터 삶의 끝까지 계속 가지고 가야할 능력 중 하나이기도 하다.
아무리 수학교수라고해도 방심할 수 없는 능력이며, 수학교수나 강사들이 때로는 더 약할 수도 있는 능력이다.
기본 중 에서도 기본능력이기에, 2점 혹은 쉬운 3점에서 묻는 능력이기도하지만 단원에 따라서 이 능력을
중요시하는 단원들이 간혹 있다. (적분의 연산 등)

B. 수학적 의사소통.

A, B, C, D의 시작을 알리는 능력이며, 동시에 수학을 풀어나가는 내내, 자신이 구해내는
새로운 식과 정보들을 외계언어가 아닌 수학적 진행(커뮤니케이션)을 이끌어가는 능력이다.
외국인과 대화하듯이 우리는 문제를 보자마자 이 외계어가 무슨 말을 하는지 핵심을 알아야하고
풀어나가는 동안에도 계속하여 내가 써내려가는 언어(수학적 식)들을 해석하고 대화를 진행한다.
처음 펜을 들고 써나가기 직전에 방향성을 잡아가기 위한 중요한 능력이고,
문제가 막혔을 때 한번 더 '무슨 말을 하는거지?'
라면서 발휘해야 하는 능력이다.

C. 개념의 이해.

개념이 중요하다.??? 너무나 당연한말인데 어떻게 와 닿아야할까 ??

권투시합을 빗대어 상황 설명해보자. 최종 결승전.
여기까지 오기까지 한 선수는 어떻게 살아왔는가. ???
처음 권투를 시작할 때 보자. 들어본 적 있을 것이다. 줄넘기만 수천 번을 몇 주 몇 달을 한다고 한다.
당연하지만 모든 스포츠의 기본은 체력이다. 체력은 너무나 필수적인 요소이다.
농구선수도 하루 1000번 자유투 이런 연습들을 한다고 한다. 이러한 운동의 가장 기본이 되는 능력들을
수학문제에 있어서 수학의 개념으로 보면 좋겠다.

어떤 상황에서 라이트를 뺏어야하며 어떤 상황에서 뒤로 물러나고 어떤 상황에서 클런치(방어하기위해 상대를
끌어안는 행동)를 해야하는지는 수백번 수천번 체력이 바탕이 된 상황에서
라이트를 , 클런치를, 자유투를, 3점 슈트를 연습해봐야 가능하다고 본다.

수학에서의 개념은 단순히 누군가가 얘기해줬을 때 아는 것으로 끝나면 안 된다.
특 건드리면 입으로 튀어나올 정도로. 그리고 그것의 가장 기본예제정도는
떠오를 정도로 머릿속에 박혀 있어야한다.

혹은 그 증명과정들을 유도 할줄 알아야, 그러한 개념들이 활용되는 폭까지 확장시킬 수 있다.

개념에 대해서 공부가 잘된 학생들은 문제의 상황자체를 보자마자,
떠오르는 유형 및 식 전개를 이끌어내갈 수 있다

개념이 단단해야 위에서 언급한 계산능력에 있어서 실수가 줄고, 좀더 정확한 계산을 할 수 있다.

개념이 단단해야 위에서 언급한 수학적 의사소통이 원활하다.

개념이 단단해야 문제해결력이 증진된다.

개념이 단단해야 문제 추론하는 과정에서 큰 추진력을 얻게된다.

D. 문제해결력.

지금부터는 고급능력이다.

고급능력들은 단순히 양치기로 한다고 쉽게 획득되는 능력은 아니라고 본다.

d 와 e 능력을 요구하는 문제는 어지간하면 4점 문제가 된다.

계산만 잘하고 개념들을 안다고 해서 되는게 아니고

더 나아가 주어진 곤란한 상황에서 해결을 해야함을 의미한다.

권투로 다시 보자면 상대가 가드를 유난히 올리고 있을 때, 복부가격 !

반대로 그렇게 무리해서 들어올 때 허점을 노리고 가격 !

상황에 맞춰 판단하고 행동하는 것이 수학에 있어서 문제 해결력이다.

주어진 상황만으로는 바로 보이는 것이 아닌, 우리가 가진 개념을 가지고 수학문제를 읽고 난 후 해석을 한 후(수학적 의사소통을 한 후) Hint 들을 가지고 상황을 분석하면서 해결해 나가는 능력이다.

어떤 행위적인 능력이며, 복잡하고 엉켜있는 실을 풀어가는 느낌이다.

계산 및 수학적 의사소통 그리고 개념의 이해를 하는 단원은 그 즉시 진행되고 눈에 보이는 능력이며, 단순한 양치기 및 짧은시간내에 단단해질 수 있는 **반면에 추론과 해결 능력은 단순하게 공부해서는 안된다.**

이러한 능력을 쌓아야해서 수학을 단순하게 양치기만으로는 커버가 안된다고 보면 된다.

(물론 말도 안 될 만큼의 반복된 학습으로 추론과 해결력 역시 쌓이는 경우가 있다.)

보통 이러한 해결능력은, 경험에 의한 학습으로 쌓여야하는데,

d와 e 능력은 다음 칼럼들에서부터 더 자세히 설명해 보도록 하겠다.

E. 문제추론능력.

추리소설. 혹은 추리만화 등을 한번쯤은 접해봤을 것 같다.

아주 작은 단서 혹은 힌트를 가지고 큰 그림을 그려나간다.

그렇다고 우리가 코난이던가 ???

남들은 무심코 지나갈 수 있는 단서들을 가지고 어떻게 그렇게까지 생각을 하는건가 ??

올해는 문제 배분이 어떻게 될지 확신은 없지만 (비슷하겠지만..) 2016수능까지 이과 30번 문과 21번형태들이
추론능력을 묻는 대표적인 문제라고 할 수 있다.

문제의 제시된 몇몇의 조건들을 가지고 수학적 해석을 통해 (개념을 바탕으로 한)
새로운 Hint 와 해결방안을 찾는다. 하지만 거기서 끝나는 것이 아니고.

오히려 결과들이 나와있으며 이러한 결과를 얻으려면 어떠한 상태가 되어야지 ??

하는 역추론이 시작된다. [주로 고난이도 문제일수록 역 추론이다 . 예시로 “어떠한 곡선이 있는데 (O, -k)를
지나는 직선이 접선이 3개가 된다. 이 때 어쩌고 저쩌고 ~” 하면서 함수를 구해야한다]

추론능력문제들은 답지를 정말 **조심스럽게** 보아야 한다.

추론 훈련을 해야하는데 다짜고짜 결과를 알려주는 답지를 너무 쉽게 봐버리면, 죽었다 깨어나도 수능당일에
그런 능력을 발휘하기가 어려울 것이다.

그리고 실제로 평가원에서는 이러한 능력을 가장 중요시 여기고 있으며, 수학의 본질인 문제해결력과 추론능력을
기르기 위한 시험이며 나아가, 이러한 능력이 함유된 인재들은
‘단순 수학기제 그 이상으로, 다방면에서 능력들을 발휘할 수 있다’

이것이 수능에서 수학기제의 최종 목적이 아닌가 싶다. (확대해석 지존)

2) 행동 영역

수학적 사고력은 크게 계산 능력, 이해 능력, 추론 능력, 문제해결 능력으로 구분된다.

계산 능력

계산 능력은 연산의 기본 법칙이나 성질을 적용하여 주어진 식을 간단히 하는 능력,
수학의 기본적인 공식이나 계산법을 적용하는 능력, 수학의 전형적인 풀이 절차
(알고리즘)를 적용하는 능력을 의미한다.

이해 능력

이해 능력은 문제에 주어진 수학적 용어, 기호, 식, 그래프, 표의 의미와 관련
성질을 알고 적용하는 능력, 주어진 문제와 관련된 수학적 개념을 파악하고 적용
하는 능력, 교과서에 나오는 기본 예제나 정형화된 응용문제를 해결하는 능력,
주어진 문제 상황을 수학적으로 표현하는 능력, 수학적 표현을 다른 표현으로 바꾸어 표현하는
능력을 의미한다.

추론 능력

추론 능력은 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하
는 능력, 유추를 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력, 수학의 개념·원
리·법칙을 이용하여 참인 성질을 이끌어 내거나 주어진 명제의 참·거짓을 판별
하는 능력, 주어진 정의를 이해하고 참인 성질을 이끌어 내는 능력, 반례를 들어 주어진 명제가 거
짓임을 판단하는 능력 등을 의미한다. 조건 명제의 증명, 삼단논법에 의한 논리적 추론, 반례에
의한 증명, 모순법, 동치 명제의 증명, 수학적 귀납법에 의한 증명 등을 이해하는 능력과 주어진
증명을 읽고 결론을 도출하는 능력 등도 이에 해당한다.

문제해결 능력

문제해결 능력은 두 가지 이상의 수학적 개념·원리·법칙의 관련성을 파악하고
종합하여 문제를 해결하는 능력, 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결
하는 능력, 실생활 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·법칙 등을 파악하고 이를
적용하여 문제를 해결하는 능력, 타 교과와 소재를 사용한 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·
법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제를 해결하는 능력을 의미한다.

<표 III-1> 고등학교 수학과 과목별 목표

과 목	목 표
수학Ⅰ	가. 다항식, 방정식과 부등식, 도형의 방정식에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.
수학Ⅱ	가. 집합과 명제, 함수, 수열, 기수와 로그에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.
평면과 공간	가. 선형과 포물, 좌표, 통계에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적 및 통계적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.
미적분Ⅰ	가. 수열의 극한, 함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.
미적분Ⅱ	가. 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 매분법, 적분법에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.
기하학Ⅱ	가. 평면 곡선, 평면해석, 공간도형과 공간해체에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다. <u>나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.</u> 다. 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다. 라. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하여, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 태도를 기른다.

(교육과학기술부, 2011년 49-100)

(헛소리가 아님을 제시하는 평가원 자료들)

그래 그렇다면 저러한 다섯 개의 능력들이 어떻게 발휘 되는가 ??
 그리고 어떻게 공부해야하는가 ??

저러한 능력을 도구삼아 우리는 향후 1년간 저 도구사용법을 기르고 길러서
 어떠한 문제든 풀어나갈 수 있는 능력을 길러야 한다.

앞으로 제 수학 칼럼들은 이러한 능력을 기본삼아서 진행되도록 하겠습니다.