정적분 칼럼 by Gomblic

2016년 8월 21일

안녕하세요. 곰블릭입니다. 많은 분께 도움이 되고자 수능 수학에서 유용하게 쓰이는 정적분 Technique에 대하여 소개를 하는 칼럼 아닌 칼럼을 써봅니다. 많이들 이미 아실수도 있는 내용이지만 한번 정리해 보겠습니다. 이 정도만 숙달돼도 정적분은 꿀이거든요ㅎㅎ

1. 인테그랄 갖고 놀기-평행이동, 확대축소, 대칭이동

-치환적분의 개념이 아닌 곡선의 변환으로서 이해하는 방법입니다.

가. 평행이동

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

위 식의 의미를 살펴봅시다. 곡선 $y=f(x-c)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 양의 방향으로 c만큼 평행이동한 곡선이죠. 이를 이해하는 것은 어렵지 않을 것이라 생각합니다.

적분구간을 바꾸는 가장 기본적인 테크닉입니다.

나. 확대축소

$$\int_a^b f(x)dx = k \times \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(kx)dx$$

위 식의 의미를 살펴볼까요? 이번에는 마냥 쉽지는 않습니다. 곡선 $y=f(kx)$는 곡선 $y=f(x)$을 원점 기준 x축 방향으로 $\frac{1}{k}$배 늘린 곡선입니다. 적분구간을 바꾸는 꽤나 유용한 테크닉인데요, 적분구간의 길이를 바꾸는 대표적인 방법입니다. 적분구간이 $b-a$에서 $\frac{b-a}{k}$로 바뀌었으니까요. 이는 다음과 같이 공식으로 외워두시면 좋습니다. (핵 빨라져요.)

가로론 곱하고 세로론 나누기

$$\text{곱하기} \int_{\text{나누기}}^{\text{나누기}} f(\text{곱하기}\, x)dx$$

다. 대칭이동

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

이런 식은 보통 한쪽 적분구간이 0인 경우가 많죠.

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^c f(c-x)dx$$

곡선 $y=f(x)$를 각각 $x=\frac{a+b}{2}$, $x=\frac{c}{2}$에 대칭한 곡선의 정적분 값입니다.

적분구간을 바꾸지 않고도 대칭성이 유리한 삼각함수 등에 많이 사용되기도 합니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$$

이런 식으로 말이죠. 또한 적분구간의 길이를 바꾸는 방법이 될 수도 있어요.

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^c f(c-x)dx = \int_0^{\frac{c}{2}} \{f(x)+f(c-x)\}dx$$

이런 경우는 곡선$y=f(x)$를 $x=\frac{c}{2}$에 대하여 접어버린 다음, 절반의 구간에서 두

곡선 (원래 것 + 접은 것)을 동시에 적분하는 셈이죠.

라. 이 세 가지 테크닉을 정확히 사용했는지 확인하는 법

x**에 위끝과 아래끝을 대입해보는 방법**을 사용하시면 됩니다. 이때 주의 할 점이 한가지 있어요.

$\int_a^b f(\quad)dx$에서 **괄호안의** x**의 계수가 양수**일 경우 아래끝 a를 대입한 값이 $f(a)$, 위끝 b를 대입한 값이 $f(b)$이면 올바르게 적용한 것이고

$\int_a^b f(\quad)dx$에서 **괄호안의** x**의 계수가 음수**일 경우 아래끝 a를 대입한 값이 $f(b)$, 위끝 b를 대입한 값이 $f(a)$이면 올바르게 적용한 것입니다.

이는 치환적분을 통하여 증명할 수 있습니다.

마. 확인사살

$$\int_0^5 f(x)dx =$$

$$\int_0^1 \{f(x) + \underbrace{f(2-x)}_{\text{대칭이동}} + \underbrace{f(x+2)}_{\text{평행이동}} + \underbrace{2f(2x+3)}_{\text{평행이동+확대축소}}\}dx$$

이 식이 이해가 가시나요? 그럼 다음 것도 한번 볼까요?

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx =$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(2-x)dx = \quad \text{대칭이동}$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_{-1}^1 f(2-x)dx = \text{확대축소}$$
$$\int_{-1}^1 \left\{\frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f(2-x)\right\}dx \quad \text{평행이동}$$

ㅋㅋㅋ이건 쫌 심했나요?;; 아무튼 이해하실 수 있다면 좋겠습니다.

2. 함수의 근원을 찾아서-이계적분함수(공식명칭 아님.)

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

이런 꼴의 함수를 만난 적이 있을 것입니다. 못 봤다면...

$$F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

이건요? 적어도 이건 봤어야 하는데... (이거 저 현역 때 평가원 기출임.) 이식은 위에 "인테그랄 갖고 놀기"에서 다룬 대칭이동으로 변형하면 (인테그랄 내부에서 t가 변수이고) 곡선 $y=tf(x-t)$는 곡선 $y=(x-t)f(t)$를 $t=\frac{x}{2}$에 대하여 대칭한 곡선입니다. 즉 두식은 같죠. (아래끝 빼고.)

x는 인테그랄 밖으로 빼고 곱의 미분과 미적분 기본정리를 써주면

$$F(x) = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

$$F'(x) = \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(t)dt$$

이렇게 정리할 수 있군요. 근데 인테그랄이 살아있네요? 한 번 더 미분하면

$$F''(x) = f(x)$$

오호 이계도함수가 $f(x)$인 함수였군요. $F'(a)=0, F(a)=0$을 만족하면서요.
이런 특징을 갖는 함수 $F(x)$의 꼴의 함수를 저는 **이계적분함수**라고 불러요.(저만요.)

3. 역함수 적분하기

문제를 풀다보면 '다음과 같이 생긴 식의 값을 구하여라.'라는 발문을 자주 만나실 수 있을 겁니다. (예를 들면 한석원이라든가, 한석원이라든가 등등. 아 빡모도 있네요.)

$$\int_{a}^{b} xf'(x)dx$$

일단 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 합시다. $f^{-1}(y)=x$로 치환하면

$$f^{-1}(y)=x,\ y=f(x)$$
$$dy=f'(x)dx$$

이므로

$$\int_{a}^{b} xf'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

입니다.

역함수가 없다면요? 알 수 없다면요? ;;"닫힌 구간 $[a, b]$에서" 라는 표현은 괜히 쓴 게 아닙니다. 어떤 구간에서 일대일 대응이면 역함수를 정의할 수 있습니다. 만일 닫힌 구간 $[a, b]$에서 일대일 대응이 아니라면, 그리고 어떤 상수 c에 대하여 두 닫힌 구간 $[a, c]$, $[c, b]$에서 일대일 대응이라면, 두 구간에서 각각 역함수가 다르게 정의 되겠죠. 그 이후론 그래프의 넓이만 잘 구해주시면 됩니다.
(역함수가 존재하지 않는 함수에 대하여 구간을 나누어 역함수를 정의해서 풀 수 있는 기출 문제로는 작년 16학년도 수능 B형 21번 문제가 있습니다.)

4. 좌우 뒤집기 말고 상하 뒤집기는?

여러분은

$$g(x)=\int_{a}^{x} |f'(t)|dt$$

라는 함수를 어떻게 분석 하실 건가요? 함수 $g(x)$를 미분하면
$g'(x)=|f'(x)|$입니다. 신기하죠? 아니라고요? 그럼 조금 더 신기하도록 (느낌 오도록)설명해 드리겠습니다.

"여러분은 지금부터 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프(롤러코스터) 위의 점 P에 있습니다. 이 롤러코스터의 x축 방향으로의 속도성분이(기벡 개념 죄송합니다.) 일정하며, 곡선 $y=f(x)$는 극댓값을 (롤러코스터니까 당연히)갖습니다. 점 P가 움직입니다.
'철컥철컥철컥철컥..철컥..철컥....철컥......철컥..........철컥.............철커덕......끼익'
아.. 때가 됐군요. $f'(x)=0$인 극댓점인가 봅니다..이제 떨어질 일만 남았..............
.......지 않네요? 왜 다시 올라가지????? 어??? 뭐야 이거 $f(x)$인줄 알았는데 $g(x)$잖아..."

이런 상황입니다. 절대로, 절대로, 감소하지 않죠. Naver.

그럼 과연 개형이 심각하게 바뀌었을까요? 그건 아닐 것 같습니다.
아까 롤러코스터에서의 극점, 극댓점에서는 떨어지기 마련인데 떨어지지 않았네요.
근데 올라는 왔고요. 그 말은 즉슨

"모든 극점 주위의 감소하는 부분을 뒤집어 증가하게 했다."

"모든 극점을 변곡점으로 바꿨다."

라고 해석할 수 있겠습니다.
함수 $g(x)$는 그래프의 굴곡은 $f(x)$와 동일하지만, 언제나 증가하는 함수로 $f(x)$를 뒤집어버린 함수입니다. 이 개념은 종종 "역함수 적분하기"와 섞여 활용될 수 있습니다.

$$\int_a^b x|f'(x)|dx = \int_a^b xg'(x)dx$$

이니까요.

5. 그럼 이제 한번 써먹어 볼까요?

◉ 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \frac{1}{4}x(x-3)^2$$

$$g(x) = x^3\int_0^1 (t-t^2)|f'(xt)|dt$$

에 대하여 $g'(4)$의 값을 구하시오.

[4점이상]

힌트를 조금 드리자면 확대축소->이계적분함수->상하뒤집기->역함수적분 순서대로 적용하시면 됩니다.

답은 $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\int_e^{\frac{\ln 7}{\pi}}\tan^{2958}\theta d\theta - \sum_{i=1}^{917} S(917,\, i)\,{}_{917}\mathrm{C}_i + 6\mathrm{n}}{n}$입니다.

제 칼럼을 읽어주신 모든 분께 감사의 말씀을 드립니다.