2017 수능 EBS연계 장학자료

수학 나

일러두기

2017학년도 대학수학능력시험에서도 EBS 수능교재 연계 비율이 70% 로 유지될 전망입니다. 이 점을 감안하면 EBS 교재의 철저한 학습이 수능 고득점에 결정적인 역할을 할 것이라고 확신합니다. 이 장학 자료는 2016학년도 대학수학능력시험과 2017학년도 대학수학능력시험 모의평가인 6월 및 9월 평가 문제에서 EBS연계문항이 어떻게 변형되어 출제되었는지 분석 제시함으로써 EBS연계에 대한 적응력을 높이도록 하였습니다. 또한 2017학년도 실제 수능시험을 두 달 남짓 남겨 둔 고3 수험생들에게 많은 분량의 EBS 수능교재를 효율적으로 정리하고, 나아가 실전에 대비하여 꼭 알아야 할 대표 문제 유형을 익히는데 도움을 주고자 하는 취지에서 출제 가능성이 높을 것으로 예상되는 EBS수능교재(수능특강, 수능완성)의 단원별 문항을 선정하여 제시하였고, 이를 변형한 문항을 통해 시험에 대비할 수 있도록 제작하였습니다.

이 교재의 특징을 요약하면 다음과 같습니다.

첫째, 본문과 정답 및 해설로 구성되어 있습니다.

둘째, 구성내용은 단원별 기출문항들을 분석하고 이에 따른 수능대비법을 제시하였습니다.

셋째, EBS연계교재인 수능특강과 수능완성에서 각 단원별로 기본적인 내용을 포함하면서 각 단원에서 자주 출제되는 대표예제를 선정하여 문항분석 및 기본개념을 학습하도록 구성하였습니다.

넷째, 2016학년도 대학수학능력시험 수학A 영역의 출제 문항 중 EBS연계교재 문항을 선정하고, EBS연계교재의 변형 전 문항과 변형 후 문항을 비교 분석하여 어떻게 변형되어 출제되고 있는 지 설명하였고, 문제 해결 전략을 제시함으로써 학생들이 쉽게 접근할 수 있도록 하였습니다. 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다. 또한 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다.

다섯째, 2017학년도 대학수학능력시험에 출제가 예상되는 EBS연계교재 문항을 선정하고, 이를 변형한 문항들을 제시함으로써 실전에 대비하도록 하였습니다.

이 교재는 EBS연계교재의 모든 내용을 수록하지 못하였지만 각 단원에서 꼭 챙겨야하는 개념위주로 문항을 구성하여 EBS연계 문항을 대비하는 수험생들에게 작은 도움이 되고자 하는 마음으로 제작하였습니다. 본 교재에 제시된 유형이외에도 중요한 수학적 개념을 담고 있는 여려 유형의 문제들을 통해 부족한 부분을 보충하시기 바랍니다.

C/O/N/T/E/N/T/S

Ⅰ. 수열의 극한 ········ 1
01. 수열의 극한 ········ 2
02. 급수 ········ 14
03. 함수의 극한 ········ 22
04. 함수의 연속 ········ 35
Ⅱ. 다항함수의 미분법 ········ 44
05. 미분계수와 도함수 ········ 45
06. 도함수의 활용(1) ········ 56
07. 도함수의 활용(2) ········ 67
Ⅲ. 다항함수의 적분 ········ 77
08. 부정적분과 정적분 ········ 78
09. 정적분의 활용 ········ 88
Ⅳ. 집합 ········ 97
10. 집합 ········ 98
11. 명제 ········ 110
Ⅴ. 함수 ········ 121
12. 함수 ········ 122
13. 유리함수와 무리함수 ········ 135
Ⅵ. 수열 ········ 147
14. 등차수열과 등비수열 ········ 148
15. 수열의 합 ········ 160
16. 수학적 귀납법 ········ 170
Ⅵ. 지수와 로그 ········ 177
17. 지수 ········ 178
18. 로그 ········ 187
Ⅷ. 순열과 조합 ········ 195
19. 순열 ········ 196
20. 조합 ········ 203
21. 이항정리와 분할 ········ 213
Ⅸ. 확률 ········ 223
22. 확률 ········ 224
23. 조건부확률 ········ 233
Ⅸ. 통계 ········ 232
24. 이산확률분포 ········ 245
25. 정규분포 ········ 255
26. 통계적 추정 ········ 264
정답 및 해설 ········ 272

Ⅰ. 수열의 극한

기출 문항 분석

이 단원에서는 무한수열의 극한에 대한 성질, 무한급수의 수렴과 발산, 무한등비수열의 극한에 대한 성질, 무한등비급수의 합과 성질, 급수와 수열의 극한사이의 관계 등을 묻는 문제가 출제되고 있다. 수열의 극한에 대한 정의 및 성질을 정확하게 이해하여야 문제를 실수 하지 않고 해결할 수 있으며, 수열의 극한의 정의 및 성질에 대한 개념이 무한급수의 개념까지 이어져 오개념이 생기지 않고, 바르게 이해할 수 있다.

매년 출제되던 도형에서 무한등비급수를 활용하는 문제가 2015 수능에서는 출제되지 않고 2016 수능에서는 출제되었다. 단순히 극한값을 계산하는 문제는 매년 출제되므로 계산실수를 하지 않도록 하고, 무한등비급수뿐만 아니라 도형과 함수의 그래프에서 수열의 극한을 활용하는 문제가 출제될 수 있다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 3번	수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제(정답형 2점)
2014수능. A형. 17번	무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제(정답형 4점)
2014수능. A형. 20번	로그의 지표와 가수를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제(정답형 4점)
2015수능. A형. 3번	수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제(정답형 2점)
2015수능. A형. 11번	무한등비급수의 값을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 24번	무한등비급수의 성질을 이용하여 무한등비급수의 값을 구하는 문제 (단답형 3점)
2015수능. A형. 28번	무한등비수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 급수의 값을 구하는 문제 (단답형 4점)
2016수능. A형. 10번	이차함수와 이차방정식의 판별식을 이용하여 극한값을 구하는 문제 (정답형 3점)
2016수능. A형. 14번	이차함수에서 삼각형의 넓이와 선분의 길이를 이용하여 극한값을 구하는 문제 (정답형 4점)
2016수능. A형. 15번	무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제(정답형 4점)
2016수능. A형. 23번	수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제(단답형 3점)

01 수열의 극한

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 | 2016년 수능특강 미적분 I 107쪽 1번

자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2-2x+\sqrt{n^2+n}-n=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 수열의 극한값을 구하는 문제이다.
나. 이차방정식의 근을 직접 구해도 되지만, 먼저 극한값을 구하고자 하는 수열을 정리한 후, 근과 계수와의 관계에서 두 근의 합과 곱을 이용해서 식을 n에 관한 식으로 바꾼 후 극한값을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

$\infty-\infty$ 꼴의 극한
가. $\infty-\infty$ 꼴의 다항식은 최고차항으로 묶어 그 극한값을 구한다.
나. $\infty-\infty$ 꼴의 무리식은 유리화를 이용하여 식을 변형한 후 그 극한값을 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분 I 107쪽 5번

$r>0$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^{n}+1}{r^{n}+1}=\frac{1}{2}$을 만족시키는 모든 실수 r의 값의 합은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

EBS 문항 분석

가. 무한등비수열의 극한에서 공비의 값에 따라 극한값이 달라짐을 알고, 공비의 범위를 나누어 값을 구하는 문제이다.

나. 공비가 양수인 실수이므로 $0<r<1$, $r=1$, $r>1$로 나누어 주어진 식을 만족시키는 실수 r의 값을 구하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

등비수열 $\{r^{n}\}$의 수렴과 발산

가. $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{n}=\infty$ (발산)

나. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{n}=1$ (수렴)

다. $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{n}=0$ (수렴)

라. $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^{n}\}$은 진동한다. (발산)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 나형 유형편 52쪽 3번

자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (x, y)의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x, y는 정수이다.
(나) $0 \le x \le n$, $0 \le y \le x$

예를 들면 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$이다. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 좌표평면에 그래프를 그려서 수열 a_n을 구한 후, 주어진 극한값을 구하는 문제이다.
나. 직선의 그래프를 그리고, 주어진 부등식을 만족하는 정수의 순서쌍을 평면에서 찾으면 되는데, $x = k\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$일 때 정수인 y좌표를 구하여 순서쌍의 개수를 구해야 한다.

다시 보는 개념 !!

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 : 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

가. (분모의 차수)>(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

나. (분모의 차수)=(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n =$ (최고차항의 계수의 비)

다. (분모의 차수)<(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 나형 유형편 54쪽 8번

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$n(n-1)<(n^2+1)a_nb_n<n(n+1)$$

이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^3+b_n{}^3)$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 문항 분석

가. 부등식이 주어졌을 때, 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.
나. 주어진 조건에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하고, 수열의 극한값의 성질을 이용하여 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

가. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$ 이면 $\alpha \le \beta$ 이다.

나. 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \le c_n \le b_n$ 을 만족시키고 $\alpha=\beta$ 이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ 이다.

다. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

라. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

마. $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

바. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

사. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\ne0$, $\beta\ne0$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 23번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

EBS 교재 2015 수능특강 수학Ⅰ A형 112쪽 3번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $nx^2-(n+1)x+a_n=0$이 중근을 가질 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 식만 약간 변형하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 분모의 9^n으로 분자, 분모를 나누어서 무한등비수열의 극한값의 성질을 이용하여 값을 구하는 간단한 문항이다. 기출문항은 숫자를 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값을 구하는 방법을 알고 있어야 한다.

나. 무한등비수열의 공비에 따라 극한값이 어떻게 변하는지를 알고 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항

2016학년도 대수능 수학 A형 문제 23번

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 9^n-13}{9^n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 실전편 34쪽 3번

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{2n+1}+5^n}{9^n}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 식만 약간 변형하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 분모의 9^n 으로 분자, 분모를 나누어서 무한등비수열의 극한값의 성질을 이용하여 값을 구하는 간단한 문항이다. 기출문항은 숫자를 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 알고 있어야 한다.

나. 무한등비수열의 공비에 따라 극한값이 어떻게 변하는지를 알고 있어야 한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 3번

$\lim_{x \to \infty} \frac{7n^2 - n}{2n^2 + 3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 103쪽 유제 3번

$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3)^2}{n(n+1)}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 식만 약간 변형하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한을 구하는 간단한 문항이다. 기출문항은 식을 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 알고 있어야 한다.

나. 분자와 분모의 차수가 같을 때는 최고차항의 비가 극한값이 된다.

EBS 기출분석 4

기출 문항	2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 8번

$\lim_{n \to \infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$ 일 때 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 105쪽 예제 3번

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+3}-3^n}{a\times 4^n+2^{n+1}}=4$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 105쪽 유제 5번

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n+1}}{2^{-n+1}-3^{-n}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 주어진 식을 분수로 바꾸어 무한등비수열의 극한값을 구하는 문제로 기출문항은 동일한 개념을 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 음수 지수를 분수로 변형하는 방법을 알고 있어야 한다.

나. 무한등비수열의 공비에 따라 극한값이 어떻게 변하는지를 알고 있어야 한다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 문제 3번

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+1}{3n^2-2}$ 의 값은? [3점]

① 2 ② $\dfrac{8}{3}$ ③ $\dfrac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{14}{3}$

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 178쪽 2번

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5}{n^2+3n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 분모 분자에 n에 대한 2차 다항식이 있는 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

분모 분자에 n에 대한 다항식이 있을 때의 극한은 최고차항의 계수를 이용하여 극한값을 구한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 미적분 I 107쪽 1번 변형

자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2+x+\sqrt{4n^2+n}$, $g(x)=2x+2n$ 의 교점들의 x좌표를 각각 α_n, β_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n{}^3+\beta_n{}^3\right)=\frac{p}{q}$ 일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 미적분Ⅰ 108쪽 1번 변형

두 수열 a_n, b_n이 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 3$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(a_n)^2}{b_n} - \frac{(b_n)^2}{a_n}\right\}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 나형 유형편 55쪽 11번 변형

최고차항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$인 이차함수를 $f(x)$라 하자.
공비가 정수인 등비수열 $\left\{\frac{f(x)}{3}\right\}^n$이 수렴하도록 하는 모든 x의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀 이

02 급수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분Ⅰ 116쪽 1번

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = 4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

무한급수의 성질을 이용해서 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$라 하면 다음이 성립한다.

가. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

나. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

다. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kS$ (단, k는 상수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분 I 117쪽 3번

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$\log_2 b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n + \log_{\frac{1}{2}} a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

EBS 문항 분석

가. 수열과 로그의 성질을 이용하여 수열의 일반항을 구하고 무한급수의 부분합을 이용하여 값을 구하는 문제이다.

나. 등차수열의 일반항을 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 구하고 로그의 성질을 이용하여 수열 $\{b_n\}$을 구한 뒤, 부분분수를 이용하여 무한급수의 값을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 급수의 수렴

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 n이 한없이 커짐에 따라 일정한 수 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 한다.

나. 부분분수

$$\frac{1}{A\times B} = \left(\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 나형 유형편 57쪽 17번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n-2n-1}{2n+1}=1$ 일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 수렴하는 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 알아야 하는 문제이다.

나. 급수의 일반항의 극한이 어떻게 되는지 먼저 살펴보고 수열 $\{a_n\}$의 극한을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

급수와 수열의 극한 사이의 관계

가. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이다.

나. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다.

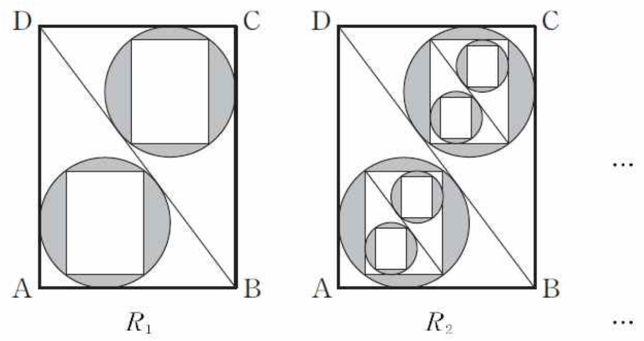
2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 나형 유형편 59쪽 22번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 두 삼각형 ABD, BCD에 각각 내접하는 원을 그린 후 그 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형을 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형에 그림 R_1과 같은 방법으로 내접하는 원과 직사각형을 그린 후 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 그림 R_n의 모든 직사각형들은 대각선 중 하나가 직선 BD와 평행하다.)



① $\frac{49\pi-92}{16}$ ② $\frac{49\pi-93}{16}$ ③ $\frac{50\pi-94}{17}$ ④ $\frac{50\pi-95}{17}$ ⑤ $\frac{50\pi-96}{17}$

EBS 문항 분석

가. 무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제이다.
나. 첫째항을 구하고, 닮음비를 이용하여 공비를 구한 후 무한등비급수 합 공식에 대입하면 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\,(a\neq 0)$은

가. $|r|<1$이면 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

나. $|r|\geq 1$이면 발산한다.

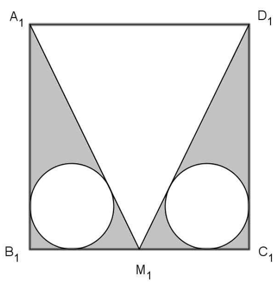
EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 미적분 I 118쪽 4번 변형

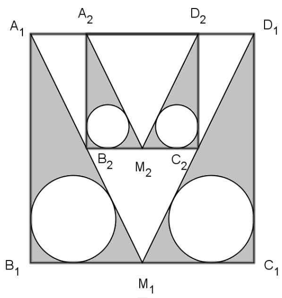
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 변 B_1C_1의 중점 M_1을 잡아 두 삼각형 $A_1B_1M_1$, $D_1M_1C_1$에 각각 내접하는 원을 그리고, 두 원의 외부와 두 삼각형의 내부가 겹치는 곳에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_1D_1 위의 두 점 A_2, D_2와 선분 A_1M_1 위의 점 B_2 및 선분 D_1M_1 위의 점 C_2를 잡아 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 원의 외부와 두 삼각형의 내부가 겹치는 곳에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p-q\pi}{3}$일 때, $p+q$의 값은?



R_1



R_2

① $28-4\sqrt{5}$ ② $30-6\sqrt{5}$ ③ $32-8\sqrt{5}$ ④ $34-10\sqrt{5}$ ⑤ $36-12\sqrt{5}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능완성 나형 유형편 56쪽 13번 변형

모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족한다.

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2},\ a_1=2,\ a_5-a_3=8$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 나형 유형편 58쪽 20번 변형

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^{n-1}$ 은 수렴하고 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(r-3)^n$ 은 발산하도록 하는 모든 자연수 r 의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀 이

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

기출 문항 분석

이 단원에서는 함수의 극한값 계산 또는 극한에서 미정계수를 결정하는 이해력 문제가 매년 거의 빠짐없이 출제되고 있다. 함수의 그래프를 이용하여 함수의 합, 곱, 합성함수의 극한값 계산과 연속성을 판단하는 문제는 고난이도 문제로 최근에 자주 출제되는 경향을 보인다. 중간값의 정리를 이용하여 방정식의 실근의 존재성을 묻는 문제가 최근 5년 동안 수능에서는 출제되지 않았지만 앞으로 출제될 가능성이 높은 부분이므로 충분히 학습하여 준비하여야 할 것으로 보인다. 극한 단원에서는 다양한 유형의 극한값을 구하는 문제들을 많이 풀어보는 것이 무엇보다 중요하다. 또한 함수의 그래프가 주어질 때 우극한과 좌극한을 구하여 극한값의 존재성을 판별하는 연습과 두 함수의 곱이나 합성함수가 연속이 될 수 있는지를 판별하는 연습을 많이 해 두어야 한다. 극한의 성질과 연속성에 대한 성질을 알고 있는가를 묻는 합답형 문제는 개념을 꼼꼼히 정리하고 활용할 수 있어야 하고, 거짓인 명제에 대한 반례를 제시하기 위해 몇 가지 기본적인 함수들을 기억해 두어야 한다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 11번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. A형. 22번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(단답형 3점)
2014수능. A형. 28번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(단답형 4점)
2015수능. A형. 8번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 22번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(단답형 3점)
2015수능. A형. 23번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(단답형 3점)
2016수능. A형. 3번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(정답형 2점)
2016수능. A형. 8번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 27번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(단답형 4점)

03 함수의 극한

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅰ 127쪽 3번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3}{x^3}=0$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)}=1$

(다) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은 -2이다.

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건과 미정계수를 이용하여 함수를 정하고 나머지 조건을 이용하여 미정계수를 구한 후 최종적으로 함수를 구하여야 한다.
나. (가), (나) 조건에서 함수를 예측하고 (다) 조건에서 함수를 최종 결정한다.

다시 보는 개념 !!

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때

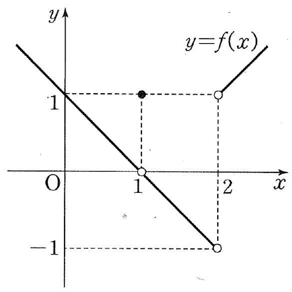
가. $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

나. $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq 0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분Ⅰ 128쪽 2번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0}\frac{g(x)}{f(x+1)}$와 $\lim_{x \to 2}f(x)g(2x-1)$의 값이 모두 존재할 때, $g(10)$의 값은?



① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

EBS 문항 분석

가. 주어진 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한이 같아야 극한값이 존재함을 이용하여 $g(x)$를 구하는 문제이다.
나. 함수 $g(x)$를 미정계수를 이용해서 이차함수로 두고 해결한다.

다시 보는 개념 !!

좌극한과 우극한

가. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 한다.
나. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 한다.
다. $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 모두 α이면 $\lim_{x \to a}f(x)=\alpha$이다. 또한, 그 역도 성립한다. 즉, $\lim_{x \to a-}f(x)=\lim_{x \to a+}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to a}f(x)=\alpha$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 나형 유형편 63쪽 6번

함수 $f(x)$가 1보다 큰 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x-1} < \frac{1}{2}(x+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{f(x)}{x^3-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

EBS 문항 분석

함수의 극한의 대소관계와 함수의 극한의 성질을 이용하여 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

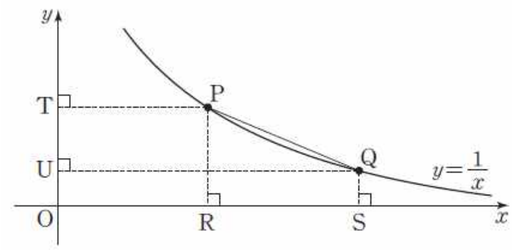
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$이고 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 상수)일 때, 상수 a에 가까운 모든 x에 대하여

가. $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

나. $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 나형 유형편 65쪽 11번

그림과 같이 $t>1$일 때, 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{\mathrm{t}}, \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{t}}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\mathrm{t}, \dfrac{1}{\mathrm{t}}\right)$에 대하여 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S, y축에 내린 수선의 발을 각각 T, U라 하자.



사각형 PRSQ의 넓이를 $S_1(t)$, 사각형 PTUQ의 넓이를 $S_2(t)$라 할 때,

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S_1(t)\times S_2(t)}{t}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{6}$

EBS 문항 분석

그래프에 나타난 길이나 넓이 또는 좌표를 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

극한값의 계산

가. $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값 : 분모와 분자를 각각 인수분해하거나 무리식이 들어 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

나. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

다. $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어서 극한값을 구한다.

② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 만들어 극한값을 구한다.

라. $0\times\infty$꼴의 극한값 : 식을 적당히 변형하여 $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty\times c, \dfrac{c}{\infty}$ (c는상수)꼴로 만들어 구한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 3번

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x^2+5)}{(x+2)}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계 기본 12쪽 2번

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(3x+5)(x-3)}{2x-6}$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 함수의 극한 중 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한을 구하는 간단한 문항이다. 기출문항은 숫자를 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

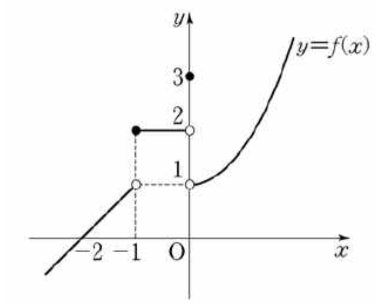
문항풀이 Point !!

$\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 분모와 분자를 각각 인수분해하거나 무리식이 들어 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

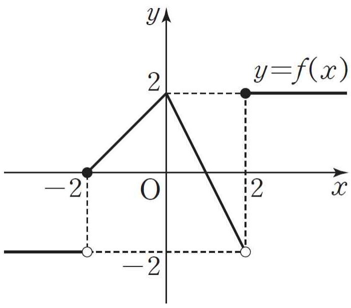


$\lim_{x\to -1-0} f(x)+\lim_{x\to +0} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 실전편 43쪽 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2-0} f(x)+\lim_{x\to 2+0} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

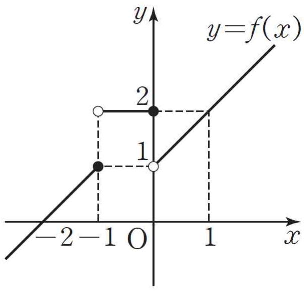
EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 함수의 좌극한과 우극한을 구하는 문제로 기출문항은 다른 그래프에서 동일한 개념을 물어보고 있다.

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 유형편 91쪽 30번

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le -1) \\ 2 & (-1 < x \le 0) \\ x+1 & (x > 0) \end{cases}$의 그래프가 다음과 같다.



함수 $f(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \to 1+0} \{f(x)+f(-x)\}=3$

ㄴ. 함수 $(-x+a)f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 음수 a의 값이 존재한다.

ㄷ. 방정식 $(x+1)f(x)-1=0$은 열린 구간 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 유사한 그래프를 제시하여 출제

나. EBS교재에 있는 그래프를 보고 함수의 극한의 성질과 연속의 성질에 대해 합답형으로 묻고 있다. 기출문항은 그래프를 약간 변형하여 함수의 좌극한과 우극한을 묻고 있다.

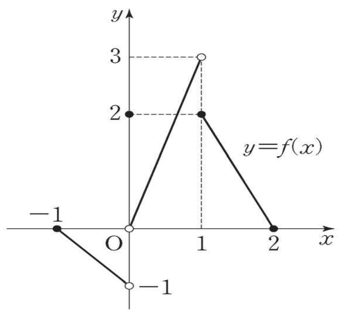
문항풀이 Point !!

함수의 좌극한과 우극한의 정의를 잘 알고 함수의 그래프를 보고 극한값을 찾을 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 10번

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

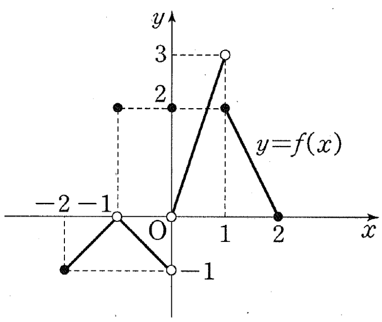


$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 121쪽 유제1번

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x \to 0+} f(x+1) + \lim_{x \to 1+} f(x-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 그래프를 활용하고 문항을 축소하여 출제

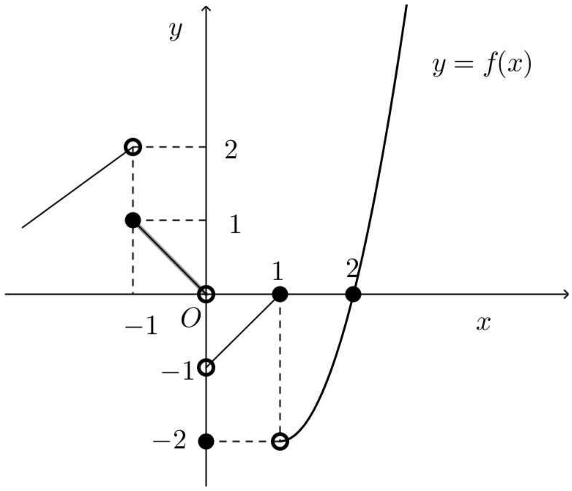
문항풀이 Point !!

주어진 그래프에서 함수의 좌극한과 우극한을 찾을 수 있어야한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 문제 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

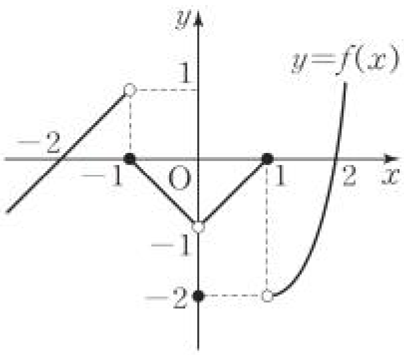


$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 155쪽 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(0)+\lim_{x\to 1+} f(x)f(-x)$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 0

④ 2　⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS교재에 있는 함수의 그래프와 기출의 함수 그래프의 형태가 비슷하고 질문 내용도 매우 유사한 문항이다.

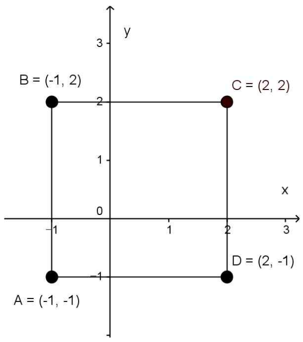
문항풀이 Point !!

주어진 그래프에서 함수의 좌극한과 우극한을 찾을 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 미적분 I 128쪽 3번 변형

좌표평면 위에 원점 O 와 네점 A$(-1,\ -1)$, B$(-1,2)$, C$(2,2)$, C$(2,\ -1)$이 있다. 양수 a에 대하여 원 $x^2+y^2=r^2$의 그래프가 정사각형 ABCD 의 둘레와 만나는 점의 개수를 $f(r)$이라 하자. $\lim\limits_{r\to\sqrt{2}-} f(r)+\lim\limits_{r\to 2-} f(r)$의 값은?

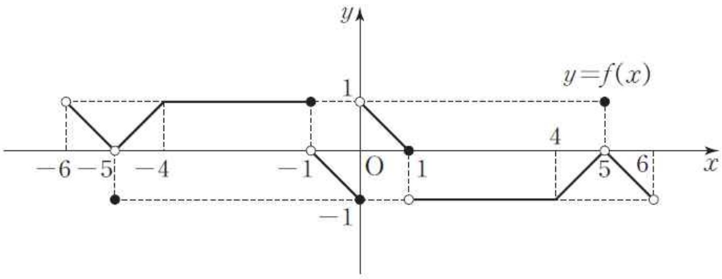


① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능완성 나형 유형편 62쪽 3번 변형

정의역이 $\{x \mid -6 < x < 6\}$ 인 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 나형 유형편 64쪽 9번 변형

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-1}=3$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)-1}{x-1}=5$

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합이 -3 일 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

풀 이

04 함수의 연속

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분 I 136쪽 4번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ x^3+1 & (x \ge 0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & (x<0) \\ x+k & (x \ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

$x=a$에서 함수 $y=f(x)$가 연속이 되는 조건을 이용하여 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속.

가. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

나. 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

다. $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2　2016년 수능특강 미적분 I 137쪽 3번

함수 $f(x)=x+\frac{x}{1+|x|}+\frac{x}{(1+|x|)^2}+\frac{x}{(1+|x|)^3}+\cdots$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-1,1)$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

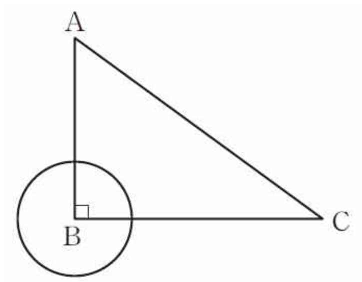
가. 주어진 함수를 x의 값에 따라 먼저 정리한 후 구하는 문제이다.
나. 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위에 따라 함숫값이 달라진다.

다시 보는 개념 !!

$\lim_{x\to\infty}x^n$을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 구분하여 함수 $f(x)$를 구한 후 연속성을 조사한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 나형 유형편 67쪽 17번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\angle B=90^\circ$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r $(r>0)$인 원이 삼각형 ABC의 변과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(r)$라 하자.



최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(r)$에 대하여 함수 $f(r)g(r)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건에 따라 함수 $f(r)$를 구하고 함수가 연속이 되는 조건을 이용하여 함수 $g(r)$를 구하는 문제이다.

나. $f(r)g(r)$이 불연속이 되는 r값을 먼저 찾고 그 값에서 연속이 되는 조건을 찾아본다.

다시 보는 개념 !!

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

가. $kf(x)$ (단, k는 상수)

나. $f(x)+g(x)$

다. $f(x)-g(x)$

라. $f(x)g(x)$

마. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 나형 유형편 69쪽 22번

방정식 $x^3+2x+k-3=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 그 실근이 열린 구간 $(0, 2)$에서 존재하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

EBS 문항 분석

사이값 정리를 이용하여 방정식의 실근이 존재하는 조건을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 사이값 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

나. 사이값 정리의 활용 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 a와 b사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 27번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases},\ g(x)=x-(2a-7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 실전편 12쪽 9번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<2) \\ x^2-x & (x \ge 2) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x<2) \\ x^2+a & (x \ge 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 조건을 약간 변형하고 문제를 확대 변형하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 함수식에 미지수가 들어있어 함수의 성질과 정의를 이용하여 구하는 문항이다. 기출문항은 x의 범위와 함수식 모두에 미지수를 두고 함수의 성질과 정의를 이용하여 구하도록 변형하였다.

문항풀이 Point !!

함수가 연속이 되는 조건과 연속함수의 성질을 알고 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 9번

함수

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-a & (x<1)\\ x^3+a & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 131쪽 유제 1번

함수 $f(x)=\begin{cases}x+2a & (x<1)\\ 2x-a & (x\geq 1)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 준 식만 약간 달리하여 같은 유형으로 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 연속의 정의를 이용하여 구하는 문제로 기출문항은 식을 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 *Point !!*

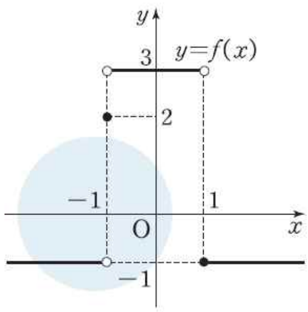
함수가 연속이 되는 조건을 알고 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 미적분 I 137쪽 4번 변형

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=x^2-3ax+8$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

풀 이

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 나형 실전편 173쪽 15번 변형

두 상수 a,b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{3-x}+a & (x<2) \\ \dfrac{bx+8}{x-1} & (x \geq 2) \end{cases}$$

의 치역이 $\{y \mid y>-1\}$일 때, $f\left(\dfrac{a}{b}\right)$의 값은?

① 3 ② $3+2\sqrt{2}$ ③ 5 ④ $5+2\sqrt{2}$ ⑤ 7

풀 이

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 나형 실전편 160쪽 25번 변형

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x-1) & (x \le 1) \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속일 때, $\lim_{x\to 0}(x+1)f(x)$의 값을 구하시오.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀 이

Ⅱ. 다항함수의 미분법

기출 문항 분석

다항함수의 미분법은 매년 수능에서는 두 문항에서 세 문항이 출제되었다. 그 내용을 살펴보면 간단한 미분계수의 정의를 묻는 문항과 극대·극소를 이용한 그래프 및 관련된 개념을 묻는 문항, 여러 가지 상황에서의 접선의 방정식을 구하는 문항이다.

출제 경향을 분석해 보면 미분계수의 정의를 이용하여 계산만을 묻는 문제, 증감표를 활용한 그래프의 개형파악문제가 자주 출제된다. 특히, 삼차함수의 극대·극소와 관련된 문제와 그래프 위의 점에서의 접선에 대한 문제가 자주 출제되는 편이다.

이상을 정리하면 2017학년도 수능에서도 미분계수를 구하는 간단한 문제와 극대•극소를 이용한 그래프의 성질을 묻는 문항이 출제될 것이라 예측된다. 특히 올해는 사차함수의 그래프 개형에 대해서도 충분한 연습이 필요할 것으로 예상된다. 따라서 미분법의 공식을 잘 습득하고 삼차와 사차함수의 그래프 개형의 특징을 파악하며 극값을 가질 때의 여러 가지 성질들을 충분히 연습해 두어야 한다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 5번	미분계수의 정의와 극한값의 계산을 통한 상수값을 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. A형. 25번	도함수를 이용한 삼차함수의 극댓값을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 14번	접선의 방정식을 이용하여 해결하는 문제(정답형 4점)
2015수능. A형. 21번	미분을 이용하여 다항함수의 그래프를 구하는 문제(정답형 4점)
2015수능. A형. 29번	도함수의 성질을 이용하여 극솟값을 구하는 문제(단답형 4점)
2016수능. A형. 5번	미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 28번	도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하는 문제(단답형 4점)

05 미분계수와 도함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분 I 141쪽 예제1번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.

(나) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-12}{x+2}=3$

$f(2)+f'(2)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 극한값의 성질 및 미분계수의 정의를 이용하여 함숫값을 구하는 문제이다.

나. 주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 성질을 파악하고 극한의 성질을 이용하여 값을 구하는 빈도가 높은 유형이다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

나. 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ (α는상수)이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분 I 145쪽 예제3

삼차함수 $f(x)=ax^3-4x^2+5$에 대하여 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{2h}=-4$일 때, $f'(2a)$의 값은?

(단, a는 실수이다.)

① 58　② 60　③ 62
④ 64　⑤ 66

EBS 문항 분석

가. 미분계수의 정의를 알고 주어진 극한값을 이용하여 미분계수 값을 구하는 문제이다.
나. 미분계수의 정의에서 주어진 식을 잘 유도할 수 있어야 한다.
다. 위의 문제처럼 단순한 미분법의 계산이나, 식의 변형을 통해 같은 개념을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 미분계수의 정의의 확장

$$f'(a)=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(a)}{g(x)-a}\qquad (\text{단, } \lim_{x\to c}g(x)=a)$$

$$f'(a)=\lim_{h\to c}\frac{f(a+g(h))-f(a)}{g(h)}\qquad (\text{단, } \lim_{h\to c}g(h)=0)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 74쪽 5번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-2)x & (x<1) \\ -3x+a+b & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 미분가능성과 연속성에 관한 문제로 주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하기 위한 미정계수 a, b를 정해야 한다.

나. 두 다항함수의 곱이나 합성으로 정의된 함수의 연속성과 미분가능성에 관한 문제는 수능에서 꾸준히 출제되고 있으며 특히 불연속점을 가지는 함수와 다항함수의 곱에서 미분가능하도록 미정계수를 결정하는 위와 같은 문제는 반드시 익혀야 하는 유형의 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 미분가능성과 연속성

$x=a$에서 미분계수 $f'(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 일반적으로 역은 성립하지 않는다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(나) 77쪽 13번

함수 $f(x)=(x^3+2x-3)(x^2-4)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 다항함수의 미분을 묻는 문제이다.
나. 다항함수를 미분한 식을 적절한 값의 대입으로 해결할 수 있어야 한다.
다. 위의 문제처럼 단순한 미분법의 계산이나, 식의 변형을 통해 다른 듯 하지만 같은 개념을 묻는 문제가 출제될 수 있다.
라. 곱으로 나타난 함수의 미분법을 사용하여 문항을 해결할 수 있도록 연습하여 쉬운 문항의 풀이 시간을 줄일 수 있도록 연습해 두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분 가능할 때,
① $y=c\cdot f(x) \quad \rightarrow \quad y'=c\cdot f'(x)$
② $y = f(x) \pm g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$
③ $y=c \quad \rightarrow \quad y'=0$ (단, c는 상수)
④ $y=x^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$
⑤ $y=f(x)\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학A형 5번

함수 $f(x)=x^3+7x+3$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계기본 31쪽 유제4번

함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대 변형

나. EBS교재에 있는 문항은 곱의 미분법을 이용하는 것이고 기출문항은 그냥 다항함수의 미분법을 이용하여 식의 값을 구하면 되는 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 주어진 함수를 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

나. 곱의 미분법 이용할 수 있어야 하며 그렇지 않을 때는 전개하여 다항함수의 미분법을 써도 좋다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 23번

함수 $f(x)=x^3-2x-2$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 146쪽 2번

함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+x-2$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대 변형

나. EBS교재에 있는 문항은 다항함수의 미분법 공식을 적용하는 단순한 문제이고 기출문제 역시 같은 삼차함수이고 계수만 다르게 출제된 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 다항함수 미분법 공식을 그대로 적용할 수 있으면 된다.

나. 미분하여 정리한 식에 값을 대입하여 함수 값을 구하는 문항으로 매우 쉽다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 문제 25번

함수

$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 143쪽 유제 4번

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^4+6 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $g(-2)$ 의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항은 함수 속에 미지수가 2개 들어 있는 형태이고 기출문항은 미지수가 1개 들어 있는데 미분했을 때 경계에서의 값이 같다는 성질을 공통적으로 이용하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

구간별로 나뉘어진 함수가 미분가능하기 위한 조건은 경계가 되는 점에서 연속이고 좌우 미분계수가 같아야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 147쪽 4번 변형

함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}$ 에 대하여 $f'(1)\neq 0$ 을 만족시키는 1000 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분Ⅰ 148쪽 3번 변형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-g(x)}{x-2}=6$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x^2-x+2)g(x)=f(x)-3$이다.

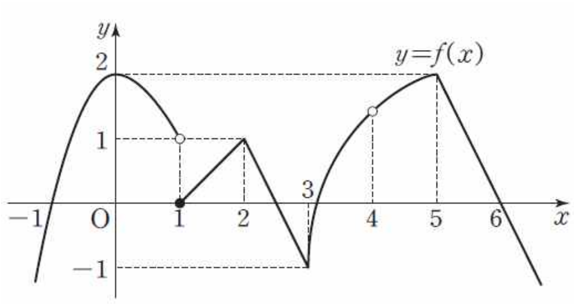
$f'(2)+g(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학영역 나형 74쪽 5번 변형

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



정수 전체의 집합의 부분집합 A를

$$A=\left\{a \,\middle|\, \lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0,\ -1\le a\le 6\text{이다.}\right\}$$이라 할

때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4 2016 수능완성 수학영역 나형 76쪽 11번 변형

미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = -3$ 을 만족하고 $g(x)=(x-1)^2$ 이다. 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 x 좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀 이

06 도함수의 활용(1)

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅰ 157쪽 3번

삼차함수 $f(x)=x^3-3ax^2+15x$ 가 열린 구간 $(0,\ 2)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 문항 분석

가. 주어진 구간에서 함수의 증가와 감소 상태를 파악하여 계수를 정하는 문제이다.

나. 도함수를 구하여 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<2$ 인 모든 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이어야 한다는 사실을 알고 a값의 범위에 따라 $f'(x)$의 값을 파악하는 다소 어려운 문항으로 구간에서의 증가상태를 파악해 보는 어려운 유형의 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수의 증가와 감소

함수$f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

① $x_1<x_2$ 일 때, $f(x_1)<f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$ 일 때, $f(x_1)>f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

나. 함수의 증가와 감소의 판정

① $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분 I 153쪽 유제4번

다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

(가) 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.
(나) $0<c<1$인 모든 c에 대하여 $|f'(c)|\le 5$이다.
(다) $f(0)=3$

EBS 문항 분석

가. 평균값정리의 개념을 알고 이를 적용하여 $f(1)$의 값을 구하는 문제이다.
나. 함수의 최대, 최소를 구할 때 미분을 이용하여 극대와 극소를 알고 그 구간에서 양끝값을 넣어 최대, 최소를 구하는 문제는 많이 출제되었다.
다. 위의 문제처럼 평균값 정리를 이용한 식의 변형을 통해 같은 개념을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 롤의 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간$[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(x)=0$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

나. 평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간$[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면,
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 78쪽 16번

곡선 $y=-3x^3+4x+1$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -20　② -25　③ -30
④ -35　⑤ -40

EBS 문항 분석

가. 도함수를 활용하여 접선의 기울기를 계산할 수 있어야 한다.
나. 위의 문제처럼 곡선 위의 점이 주어진 경우는 쉽게 접선의 방정식을 찾아낼 수 있지만 곡선 밖의 점이 주어진 경우는 반드시 연습을 통해 익혀 두어야 시험에서 당황하지 않고 문제를 해결할 수 있다. 또한, 기본적인 도형의 성질을 잘 파악하고 있어야 하며, 도함수의 개념을 활용해야 해결할 수 있는 결합형 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 접점 (x_1, y_1)의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법
① 접선의 기울기 $f'(x_1)$을 구한다.
② $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$에 대입한다.
나. 기울기 m이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법
① $f'(x_1)=m$을 만족하는 접점의 좌표를 구한다.
② $y-y_1=m(x-x_1)$에 대입한다.
다. 곡선 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법
① 접점을 $(\alpha,\ f(\alpha))$로 놓는다.
② $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$에 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입하여 α값을 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 79쪽 19번

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+2ax+3$이 열린 구간 $(a,\ 3)$에서 감소할 때, $f(3)$의 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 함수가 증가 또는 감소할 조건을 이용하여 미정계수를 결정하면 문제를 해결할 수 있다.

나. 도함수의 그래프를 보고 원시함수 그래프 개형을 찾아보고 원시함수의 특징을 파악하고 a값의 범위를 찾은데 해결하는 문제이다.

다. 삼차함수와 사차함수의 그래프 특징을 알고 각 함수들이 극값을 가질 때의 특징을 익혀두어야 하는 도함수를 이용한 그래프 활용의 기본적인 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

나. 삼차함수는 극값을 가지지 않거나 갖는다면 2개를 갖는다.

다. 사차함수는 극값을 1개 또는 3개 갖는다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학A형 28번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)=x^3f(x)-7$
>
> (나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

EBS 교재 2015 수능완성 수학A형 유형편 100쪽 20번

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 교점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. $a+b$의 값은?

① $\frac{6}{5}$　　② $\frac{8}{5}$　　③ 2

④ $\frac{12}{5}$　　⑤ $\frac{14}{5}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 상황 및 자료를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 주어진 함수의 미분계수가 서로 수직이란 조건을 이용하여 두 접선의 교점을 구하는 문제라면 기출문항은 접선의 방정식과 미분계수의 정의를 활용한 조건이 첨가된 문항으로 난이도는 비슷하게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 주어진 함수를 미분하여 $f(x)$함수와 $g(x)$함수의 관계를 파악한다.

나. $g'(2)$를 구하기 위해 $f(2)$, $g(2)$값을 주어진 극한값을 이용하여 구하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 20번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 $(2, f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 유형편 79쪽 20번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $f(1)=1$, $f(2)=0$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

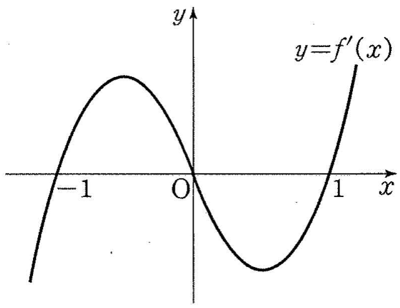
보기

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 168쪽 3번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보 기

ㄱ. $f(0)>f(1)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념・원리 활용
나. EBS교재에 있는 문항은 도함수와 원래함수 중 어느 하나의 특성을 바탕으로 나머지 하나의 특성을 파악하는 내용이고 기출문제도 이와 유사하게 도함수의 특성을 바탕으로 원래함수의 특성을 파악하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

어떤 함수와 그 도함수 사이의 관계에 대해 잘 알고 있어야 하며 극값을 이용한 실근의 개수도 파악할 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 156쪽 3번 변형

삼차함수 $f(x)=x^2+ax^2+2ax$가 실수 전체 구간에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2　2016 수능특강 미적분 Ⅰ 158쪽 1번 변형

함수 $f(x)=x^4+ax^3$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 A가 아닌 두 점 B, C에서 곡선 $y=f(x)$와 만난다. 두 점 B, C의 x좌표의 합이 -1이라 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학 나형 81쪽 26번 변형

삼차함수 $f(x)=-x^3+3x+1$ 이 $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극값을 가질 때, 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 를 지나는 직선의 기울기는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4

2016 수능완성 수학 나형 82쪽 30번 변형

1. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, k는 실수이다.)

(가) 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $y=f(x)$의 그래프는 $x=k$인 점에서 x축에 접한다.
(다) 함수 $f(x)$는 $x=3k$에서 극댓값 32를 가진다.

풀 이

07 도함수의 활용(2)

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분 I 166쪽 3번

두 함수 $y=x^4+x+3$, $y=4x^3+x$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 두 함수의 그래프를 각각 증감표를 이용하여 그려 만나는 점을 파악할 수도 있지만 방정식 $x^4+x+3=4x^3+x$ 의 서로 다른 실근의 개수를 파악하는 문제로 이해할 수 있는냐를 묻는 문제이다.

나. 만들어진 방정식을 함수로 두고 이 함수의 그래프가 x축과 어떻게 만나는지 파악하면 문제를 해결할 수 있다. 주어진 두 함수에서 미지수를 우변으로 두고 좌변의 함수를 그려본 뒤 교점의 개수를 파악해 보는 연습은 반드시 필요하다.

다시 보는 개념 !!

가. 방정식 $f(x)=k$(k는 상수) 의 실근의 개수
함수$f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

나. 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근의 개수
도함수를 이용하여 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형을 그린 다음 $y=f(x)-g(x)$의 그래프 와 x축과의 교점의 개수를 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분 I 168쪽 4번

구간 $[1, \infty)$에서 함수 $f(x)=x^3-ax^2+2$의 최솟값이 -2가 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 주어진 구간에서 최솟값을 구하는 방법을 이용하여 미지수를 구하는 문제이다.
나. 극값을 파악하여 극솟값이 주어진 최솟값을 만족하도록 a값을 적절히 나누어 조건을 만족하도록 구할 수 있어야 한다.
다. 단순히 최대나 최소를 공식을 통해 구해보기 보단 그래프를 통한 최대, 최소의 위치를 파악해 보는 연습이 필요하다.

다시 보는 개념 !!

가. 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

나. 함수의 극대와 극소
① $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며 $f(a)$를 극댓값이라 한다.
② $x=b$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며 $f(b)$를 극솟값이라 한다

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 86쪽 41번

$x > a$에서 부등식 $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 도함수로부터 삼차함수의 그래프의 성질을 파악하여 극값을 구하여 x 값의 범위를 찾아낼 수 있는 문제이다.

나. 직선과의 교점의 개수를 구하는 문제가 출제빈도가 높았으나 부등식에 활용되는 문항이 나올 때 가 된 듯하다.

다시 보는 개념 !!

가. 방정식 $f(x) = k$(k는 상수)의 실근의 개수
함수$f(x)$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 개수와 같다.

나. 방정식 $f(x) = g(x)$의 실근의 개수
도함수를 이용하여 $y = f(x) - g(x)$의 그래프의 개형을 그린 다음 $y = f(x) - g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수를 구한다.

다. 부등식에의 활용
어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 주어진 구간에서 $f(x)$의 최솟값을 구하여 $f(x)$의 최솟값 ≥ 0 임을 보이면 된다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(나) 87쪽 44번

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

$$x=-t^4+4t^3+2t-5$$

이다. 점 P가 출발 후 가속도가 최대인 순간, 점 P의 속도는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 위치의 변화율은 속도, 속도의 변화율은 가속도라는 개념을 이용하는 문제이다.
나. 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도의 관계를 이용한 문제는 실생활 문제로 응용되기 싶고 도함수의 활용문제로 자주 등장하므로 연습해 두도록 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 위치를 미분하면 속도가 되고 속도를 미분하면 가속도가 된다는 사실을 알고 있어야 한다.

$$v=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

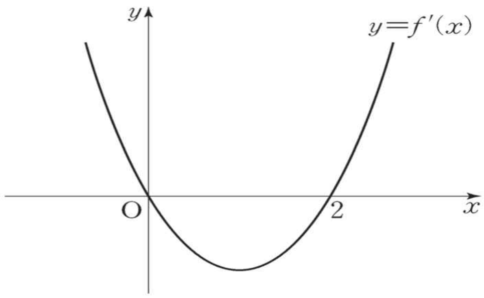
$$a=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle t}=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

나. $f'(a)=0$ 이 되는 점, 즉 속도가 0이 되는 점은 방향을 바꾸거나 정지하는 점이 될 수 있다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 21번

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

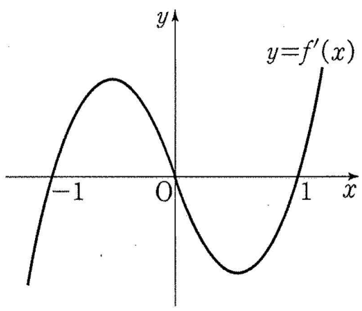
ㄴ. $f(0)f(2)\ge 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값은 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 168쪽 3번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $f(0)>f(1)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소 · 확대 변형

나. EBS교재에 있는 문항은 사차함수에 대한 도함수의 그래프를 보고 주어진 조건을 확인해 가는 과정이며 기출문항은 삼차함수에 대한 도함수의 그래프를 보고 주어진 조건을 찾아가는 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 주어진 도함수의 그래프를 이용하여 원시함수를 그려보면서 주어진 조건을 확인해 본다.

나. 삼차함수의 극값이 주어질 때 부호가 서로 같으면 x축과의 교점이 하나이지만 절댓값을 벗으면서 그래프의 모양이 꺽인다는 것을 알고 있다면 비교적 쉽게 해결가능하다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 163쪽 예제2번 변형

두 함수 $f(x)=x^3-9x$, $g(x)=-3x^2+a$에 대하여 닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 165쪽 유제6번 변형

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각

$$P(t)=\frac{1}{3}t^3+4t-\frac{2}{3},\ Q(t)=2t^2-10$$

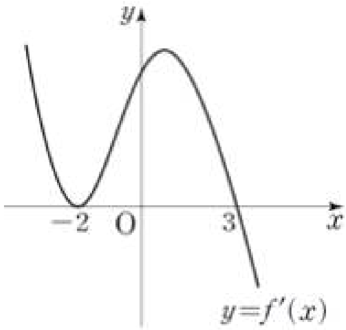
이다.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학 나형 83쪽 33번 변형

사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=-2$에서 x축에 접하고, 점 $(3,\ 0)$을 지날 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가진다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le f(-2)f(3)$이 성립한다.

ㄷ. $a \ne -2$일 때, $f(-2)=f(a)$를 만족시키는 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는 구간 $(-a,\ \infty)$에서 항상 최댓값을 가진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4

2016 수능완성 수학 나형 85쪽 40번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖고, 방정식

$$|f(x)-f(1)|=f(5)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.

풀 이

Ⅲ. 다항함수의 적분법

기출 문항 분석

부정적분이나 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 계산하는 문제나 함수의 대칭성을 이용하여 정적분을 구하는 문제, 정적분과 미분, 정적분과 급수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제, x축 사이의 넓이, 두 곡선사이의 넓이, 속도와 거리 등을 묻는 문제가 출제되고 있다. 특히, 수직선 위를 움직이는 점의 속도 또는 그 그래프가 주어졌을 때, 점의 위치나 점이 움직인 거리 등을 구하는 문제가 나올 만한 시점이 되었다.

EBS연계교재 문제들을 꼼꼼히 풀어보는 것이 중요하며 3개년 기출문항을 꼼꼼히 풀어보는 것이 중요하다. 단순히 두 곡선사이의 넓이는 구하는 것이 아닌 주어진 조건에서의 최대, 최소 넓이를 구하는 활용문제 역시 다루어 보는 것이 필요하고 정적분과 미분사이의 관계를 활용하는 문제는 미리 점검해 두어야 할 것이다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 8번	곡선과 직선사이의 넓이를 묻는 문항(정답형 3점)
2014수능. A형. 23번	정적분의 계산을 묻는 문항(단답형 3점)
2014수능. A형. 29번	무한급수를 정적분을 이용하여 계산할 수 있는지 묻는 문항(단답형 4점)
2015수능. A형. 6번	정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 3점)
2015수능. A형. 20번	정적분과 넓이의 관계를 이용하여 정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 26번	부정적분의 이해에 대한 문제(단답형 4점)
2016수능. A형. 13번	정적분을 이용한 주어진 그래프의 넓이 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 20번	조건을 만족시키는 다항함수를 이용하여 정적분 값 구하는 문제(정답형 4점)

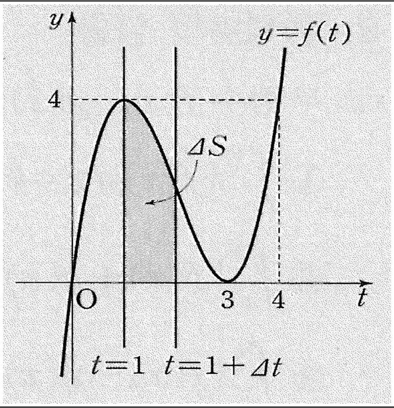
08 부정적분과 정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분 I 173쪽 예제2번

삼차함수 $y=f(t)$의 그래프가 그림과 같다. $f(1)=4$, $f(3)=0$, $f(4)=4$이고, 곡선 $y=f(t)$와 두 직선 $t=1$, $t=1+\Delta t$ 및 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 ΔS라 하자. $\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\Delta S}{\Delta t}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5



EBS 문항 분석

가. 정적분과 부정적분과의 관계를 알고 정적분의 정의를 명확히 이해해야 한다.

나. 정적분의 정의를 교과서에서 정확히 파악하고 그래프상의 의미를 통해 부정적분과 어떤 관계인지를 설명할 수 있어야 한다. 공식처럼 외우기보단 정확한 의미파악이 된다면 충분히 주어진 문제는 쉽게 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

나. 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

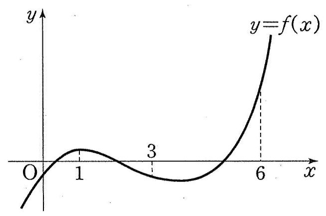
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = f(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt = f(a)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분 I 177쪽 2번

그림과 같은 삼차함수 $y=f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_3^6 f(x)dx=0$$



을 만족시킨다. 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 도함수의 그래프를 보고 원시함수의 그래프를 파악하는 문제이다.
나. 도함수의 근이 주어져 있지 않지만 정적분 값을 이용하여 원시함수의 근을 파악할 수 있다.
다. 정적분의 성질을 파악하여 새로운 유형의 문제에 잘 적응할 수 있도록 한다.

다시 보는 개념 !!

가. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

나. $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

다. 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 93쪽 9번

$\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-1)dx$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13

④ 14　　⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 대칭성을 이용한 함수의 정적분 문제이다.

나. 함수 $f(x)$를 구간$[-2,2]$에서의 정적분 하면 분배법칙이 성립하고 기함수 성질을 이용하여 적분값을 쉽게 계산할 수 있다.

다. 대칭성을 이용하여 정적분 값을 계산하는 문항으로 출제빈도가 높다.

다시 보는 개념 !!

가. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$$

나. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(나) 94쪽 14번

최고차항의 계수가 1인 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_0^x (t^2-4t+4)f(t)dt$ 라 하자. 함수 $y=|g'(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, $g'(4)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 정적분과 미분사이의 관계를 알고 절댓값 함수에서 미분 불가능한 점이 생기지 않으려면 변곡점에서 꺾어 올려야 한다.

나. 삼차함수 그래프와 사차함수 그래프의 개형을 도함수를 이용하여 그려보고 극값을 가질 때의 여러 가지 특징에 대해 공부해 두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

나. 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = f(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt = f(a)$$

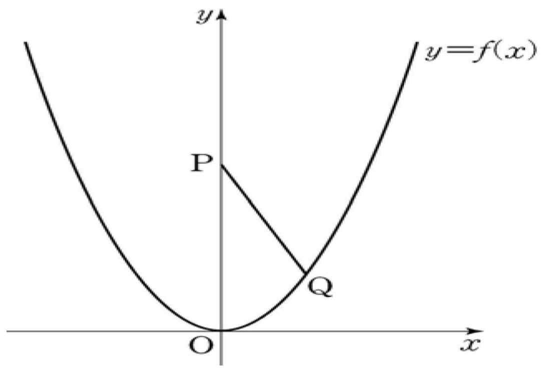
다. 삼차함수는 극값을 가지지 않거나 갖는다면 2개를 갖는다.

라. 사차함수는 극값을 1개 또는 3개 갖는다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학A형 13번

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자.



$n=1$일 때, 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 ?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{19}{12}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계기본 73쪽 유제3번

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{23}{3}$ ② 8 ③ $\frac{25}{3}$

④ $\frac{26}{3}$ ⑤ 19

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소 · 확대 변형

나. EBS교재에 있는 문항은 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 기본적인 문제이다. 기출문항은 기울기가 일정하지 않은 직선과 곡선 사이의 넓이를 구하는 문제로 확대 변형되었다.

문항풀이 Point !!

가. n의 값이 주어지므로 주어진 직선을 구하고 직선과 곡선사이의 넓이를 구하는 기본적인 문제로 그래프에 직선과 곡선을 그려 표현한다.

나. 삼각형과 x축과 평행한 직선과 곡선 사이의 넓이를 구하면 좀 더 편하게 넓이를 구할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 28번

함수 $f(x)=4x^2+6x+32$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오.

EBS 교재 20156 수능완성 수학 나형 95쪽 17번

함수 $f(x)=2x^2+4x-2$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소 · 확대 변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항은 주어진 함수의 형태나 구하는 급수의 형태면에서 거의 같은 문항이다.

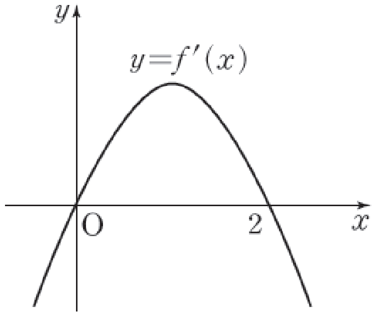
문항풀이 Point !!

복잡한 급수를 정적분으로 표현하여 구할 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 미적분 Ⅰ 171쪽 예제1번 변형

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(1)$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 176쪽 4번 변형

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\cdots+(2n)^4\}$ 의 값은?

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{21}{5}$ ③ $\frac{31}{5}$

④ $\frac{41}{5}$ ⑤ $\frac{51}{5}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학 나형 93쪽 11번 변형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> (가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$
> (나) $f'(x)=1$
> (다) $g(x)=2\int_1^x f(t)\,dt$

$\int_0^3 3g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4

2016 수능완성 수학 나형 95쪽 16번 변형

삼차함수 $f(x)=3x^3+4x^2-2x-1$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$$

의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

풀 이

09 정적분의 활용

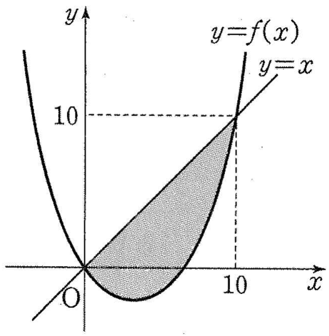
2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분 I 187쪽 1번

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f(10)=10$

(나) $\int_{0}^{10} f(x)dx=0$

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 이용하여 그래프의 넓이를 구하는 문제로 주어진 구간에서 정적분 값이 0이라는 의미에서 해결책을 유추할 수 있다.

나. 주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 성질을 파악하고 공통된 부분을 찾아내면 쉽게 해결되는 빈도가 높은 유형이다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b(a<b)$로 둘러싸인 도형의 넓이S는 $\int_{a}^{b}|f(x)|dx$이다.

나. 곡선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 구간 $[\alpha, \beta]$에서의 넓이는 $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분 I 188쪽 4번

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $f(t)$와 점 Q의 시각 t에서의 속도 $g(t)$는

$$f(t)=12t(t-1)(t-3),\ g(t)=at$$

이다. 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 한 번만 만나도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① 32 ② 34 ③ 36

④ 38 ⑤ 40

EBS 문항 분석

가. 직선운동을 하는 물체의 시각t에서의 속도가 주어졌을 때, 속도의 적분이 물체의 위치라는 것을 알고 있어야 해결 할 수 있다.

나. 다시 만난다는 의미는 위치가 같은 점이 있다는 사실로 파악하여야 하며 한 번 만나므로 근이 하나 존재해야 한다는 사실을 이용하여 문제를 해결 할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

수직선 위를 움직이는 점P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

가. 시각 t에서의 점P의 위치 $x(t)$는 $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

나. 시각 $t=a$에서 $t=b\,(a\le b)$까지 점P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

다. 시각 $t=a$에서 $t=b\,(a\le b)$까지 점P의 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(나) 96쪽 18번

함수 $f(x)=x^2-4x+4$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

EBS 문항 분석

가. 정적분의 기본정리를 이해하고 곡선의 넓이에 적용하는 문제이다.
나. 직선과 곡선사이의 넓이를 구하는 문제로 그래프가 위에 있는 식에서 밑에 있는 식을 빼주고 그 식을 적분하면 쉽게 구할 수 있다.
라. 가장 기본적인 문제로 두 곡선사이의 넓이를 구하는 문제도 연습을 해 두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b(a<b)$로 둘러싸인 도형의 넓이S는 $\int_a^b |f(x)|dx$이다.

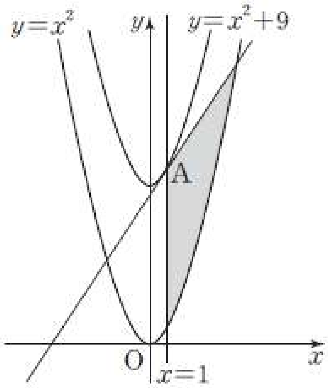
나. 곡선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 구간 $[\alpha,\beta]$에서의 넓이는

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 \text{ 이다.}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(나) 98쪽 25번

그림과 같이 곡선 $y=x^2+9$와 직선 $x=1$이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽에 색칠된 부분의 넓이를 S라 하자. 곡선 $y=x^2+a^2$과 직선 $x=1$이 만나는 점을 B라 할 때, 점 B에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽 부분의 넓이가 $\frac{S}{9}$이다. 양수 a의 값은?



① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt[3]{3}$ ③ $\sqrt[4]{3}$
④ $\sqrt[5]{3}$ ⑤ $\sqrt[6]{3}$

EBS 문항 분석

가. 도형의 넓이 사이의 관계를 정적분으로 나타내어 여러 가지 값을 구하는 문제이다.
나. 주어진 넓이 S를 이용하여 미정계수 a를 찾아내면 쉽게 해결할 수 있다.
다. 정적분의 계산을 통하여 기본적인 곡선과 곡선 사이의 넓이를 구하는 문제도 연습을 해 두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

$$\int_a^b f(x)-g(x)dx=0$$

나. 역함수와 넓이의 관계

연속함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x), g(x)$의 두 교점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=2\int_a^b |x-f(x)|dx \quad (\text{단}, f(a)=g(a), f(b)=g(b))$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학A형 20번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2015 수능완성 수학A형 유형편 115쪽 12번

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $\int_{0}^{1}f'(x)dx=2$일 때, $\int_{-1}^{1}(3x+2)f'(x)dx$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소 · 확대 변형
나. EBS교재에 있는 문항은 기함수의 성질을 이용하여 주어진 정적분 값을 이용하여 문제에 있는 정적분 값을 구하는 문제이고 기출문항은 여기에 우함수의 성질까지 이용하여 주어진 정적분값을 찾는 문제로 확대변형 되었다. 조건만 하나 늘었을 뿐 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 우함수를 미분하면 기함수, 기함수를 미분하면 우함수라는 사실을 이용한다.
나. 정적분의 아랫끝과 윗끝의 값이 같을 때는 우함수나 기함수의 성질을 이용하여 정적분 값을 구하면 쉽게 얻어지는 경우가 많다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 183쪽 예제2번 변형

두 곡선 $y=x^3+2x^2+2$, $y=-x^2+6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$

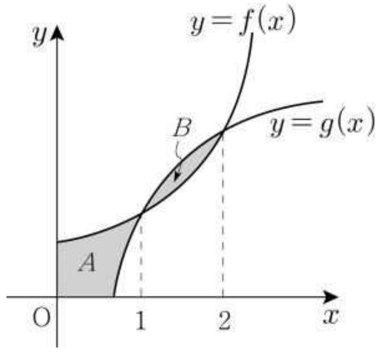
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분 Ⅰ 188쪽 2번 변형

그림과 같이 함수 $f(x)=ax^2+b\ (x \geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 1과 2이다. $0 \leq x \leq 1$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, $1 \leq x \leq 2$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



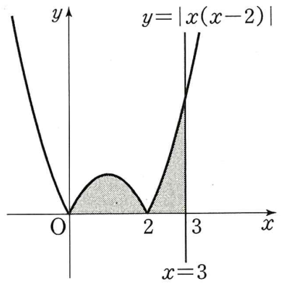
이때, $A-B$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학 나형 96쪽 20번 변형

그림과 같이 곡선 $y=|x(x-2)|$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은?



① $\frac{7}{3}$　　② $\frac{8}{3}$　　③ 3

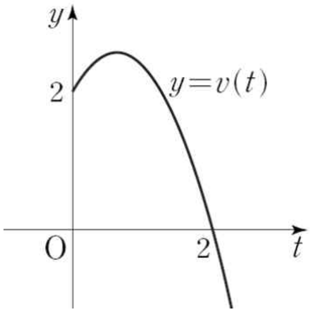
④ $\frac{10}{3}$　　⑤ $\frac{11}{3}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4

2016 수능완성 수학 나형 99쪽 26번 변형

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$에 대하여 이차함수 $y=v(t)$의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 출발한 후 움직인 거리가 6일 때, 처음으로 운동 방향을 바꿨다. 출발한 지 3초 후의 점 P의 속도는?



① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

풀 이

Ⅳ. 집합과 명제

기출 문항 분석

2005학년도 수능부터 수학영역에서 1학년 수학에 해당되는 공통과정이 출제되지 않아 집합과 명제 단원에 해당되는 최근의 기출문항은 없다. 2004학년도 수능이전에는 집합의 연산, 집합의 포함관계, 벤다이어그램, 집합의 원소의 개수, 부분집합의 개수, 명제의 참과 거짓이 되는 조건, 필요조건과 충분조건 등에 관하여 주로 출제되었다. 집합에 관련된 기본 내용은 방정식, 부등식, 확률과 통계 등 수학교과의 다른 부분에 많이 활용되고 있으므로 반드시 익혀둘 필요가 있다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2002수능. 인문계. 27번	부분집합의 개수를 구하는 문제(단답형 3점)
2003수능. 인문계. 5번	명제의 참, 거짓과 진리집합의 참, 거짓을 구하는 문제(합답형 2점)
2003수능. 인문계. 13번	부등식을 만족하는 필요충분조건을 구하는 문제(정답형 3점)
2003수능. 인문계. 25번	합집합의 원소의 개수를 구하는 문제(단답형 2점)
2004수능. 인문계. 12번	자연수의 거듭제곱을 집합으로 정의하여 관계를 구하는 문제(정답형 3점)
2004수능. 인문계. 28번	집합의 합집합, 교집합의 원소의 개수의 최솟값을 구하는 문제(단답형 3점)

10 집합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 수학Ⅱ 9쪽 유제3

실수 전체의 집합의 두 부분집합

$A=\{x \mid x^2-x-6 \le 0\}$, $B=\{x \mid |x-1| \le k\}$

에 대하여 $A \subset B$가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 조건제시법으로 표현된 두 집합에 속하는 실수 x의 값의 범위를 수직선위에 나타낸 다음, 주어진 포함 관계가 성립하도록 양수 k의 값의 범위를 구하는 문항이다.

나. 이차부등식과 절댓값이 있는 일차부등식의 해를 먼저 구할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

1. 이차부등식의 해 $(a>0,\ \alpha<\beta)$

가. $a(x-\alpha)(x-\beta) \le 0 \Leftrightarrow \alpha \le x \le \beta$

나. $a(x-\alpha)(x-\beta) \le 0 \Leftrightarrow x \le \alpha$ 또는 $x \ge \beta$

2. 절댓값이 있는 일차부등식의 해 $(k>0)$

가. $|x| \le k \Leftrightarrow -k \le x \le k$

나. $|x| \ge k \Leftrightarrow x \le -k$ 또는 $x \ge k$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 수학Ⅱ 14쪽 4번

어느 고등학교의 학생 300명을 대상으로 설악산, 지리산, 한라산 중에서 오르고 싶은 산을 선택하는 설문조사를 한 결과 다음과 같은 사실을 알게 되었다.

(가) 설악산을 선택한 학생은 120명, 지리산을 선택한 학생은 160명이다.
(나) 설악산과 지리산 중 어느 산도 선택하지 않은 학생은 80명이다.
(다) 한라산만 선택한 학생은 30명이다

이때 설악산과 지리산을 모두 선택한 학생은 a명이고, 3개의 산 중 어느 것도 선택하지 않은 학생은 b명이다. $a+b$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 세 집합으로 이루어진 각 영역을 합집합과 교집합으로 표현한 후 일부 집합의 원소의 개수를 제시하고 다른 집합의 원소의 개수를 추론하는 문항으로 출제 가능성이 매우 높다.
나. 합집합과 교집합의 원소의 개수에 관한 공식을 알고 있어야 풀 수 있다.
다. 벤다이어그램을 이용하거나 각 영역을 문자로 표현한 후 방정식으로 풀 수도 있다.

다시 보는 개념 !!

집합과 원소의 개수
전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여
가. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
특히, $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cap B)=0$이므로 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
나. $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$
다. $n(A^C)=n(U)-n(A)$
라. $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$
마. $B\subset A$일 때, $n(A-B)=n(A)-n(B)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학나형 9쪽 14번

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A-B=\varnothing$이면 $A\cup B=B$이다.
ㄴ. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
ㄷ. $A\cup(B-A)=A\cup B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 집합의 연산법칙을 활용할 수 있는가를 묻는 문항으로 출제 가능성이 매우 높다.
나. 합답형으로 출제되어 어느 한 가지의 연산법칙이 아니라 연산법칙의 전반에 관한 것을 알고 있어야 해결할 수 있다.
다. 집합의 연산법칙은 확률과 통계, 방정식과 부등식 등 집합과 명제가 아닌 다른 단원에서도 자주 활용되는 기본 개념이므로 반드시 이해하고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

집합의 연산법칙
가. 교환법칙 : $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$
나. 결합법칙 : $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
다. 분배법칙 : $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
라. 드모르간의 법칙 : $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학나형 8쪽 10번

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$의 두 부분집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여
$(B-A)\cup X=X$, $B\cup X=B$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

EBS 문항 분석

가. 집합의 연산을 정리하여 집합과 집합사이의 포함관계를 알아내고, 특정한 원소를 포함하는 부분집합의 개수를 구하는 문항이다.
나. 두 집합의 합집합 또는 교집합으로 이루어진 식에서 포함관계를 추론하는 것은 집합의 연산에서 가장 기본이 되는 내용이므로 꼭 알아두어야 한다.
다. 특정한 원소를 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우의 부분집합의 개수를 모두 알아두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

1. 두 집합 사이의 포함관계
가. $A\cap B=A \Leftrightarrow A\subset B$
나. $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subset B$

2. 부분집합의 개수
가. 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n이다.
나. 특정한 원소 k개를 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-k}이다.
(단, k는 $1\le k\le n$인 자연수)
다. 특정한 원소 k개를 모두 포함하고 특정한 원소 l개는 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}이다.(단, k와 l은 $k+l\le n$인 자연수)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2004학년도 대수능 인문 28번

세 집합 A, B, C에 대하여 $n(A)=14$, $n(B)=16$, $n(C)=19$, $n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$일 때, $n(C-(A\cup B))$의 최솟값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

문항풀이 Point !!

세 집합을 벤다이어그램으로 표시하여 문제에서 제시된 영역을 숫자와 문자로 적절히 나타내고 부등식을 만들어 해결한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2004학년도 대수능 인문계 12번

집합 $A(k)$를 자연수 k를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이라 하자.
예를 들면, $k=2$인 경우에 $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,$
$2^5=32, \cdots$ 이므로 $A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$이다.
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $1 \in A(3)$
ㄴ. $A(6) \subset A(3)$
ㄷ. $A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다. (단, $n>1$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

문항풀이 Point !!

집합의 정의에 따라 $A(3)$, $A(6)$의 집합을 구성하여 원소를 나타내어보고, 포함관계를 비교하면서 규칙을 찾아낸다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 2번

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 $n(A\cup B)$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ& 미적분Ⅰ 8쪽 예제

전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$의 두 부분집합 $A=\{1,3,5\}$, $B=\{4,5\}$에 대하여 $A\cup B$를 구하여라.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 합집합을 구하라는 것을 합집합의 원소의 개수로 변형하여 출제하였다.

문항풀이 Point !!

합집합의 원소의 개수를 구한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 7번

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여,

집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ& 미적분Ⅰ 11쪽 6번

전체집합 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

에 대하여 집합 $(B-A)^C-B^C$의 모든 원소의 합을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념을 활용하여 문항을 축소하여 출제

나. 전체집합의 원소를 변경하였고 발문하는 차집합의 모양을 더 간단하게 하였다.

문항풀이 Point !!

원소나열법으로 여집합들을 먼저 구하고 여집합들의 차집합을 구한다. 식을 간단히 정리하거나 벤다이어그램을 직접 그려서 해결할 수도 있다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 27번

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여,

$X \cup A = X,\qquad X \cap B^C = X$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오 [4점]

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 1유형편 8쪽 10번

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여

$(B-A) \cup X = X$, $B \cup X = B$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재의 문항에서와 마찬가지로 집합의 포함관계를 알고 부분집합의 개수를 구하는 문제로 주어진 집합만 변형되었다.

문항풀이 Point !!

가. $X \cap A = X \ \Rightarrow\ X \subset A$

$X \cup A = X \ \Rightarrow\ A \subset X$

나. 특정한 원소 k개를 모두 포함하고 특정한 원소 l개는 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}이다.(단, k와 l은 $k+l \le n$인 자연수)

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 12쪽 5번 변형

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B^c = A$일 때, 다음 중 집합 $(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$ 와 항상 같은 집합은?

① $\varnothing$ ② A ③ B ④ $A\cap B$ ⑤ $A\cup B$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 수학나형 8쪽 12번 변형

집합 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3개인 부분집합들의 원소의 총합은?

① 1950 ② 1960 ③ 1970 ④ 1980 ⑤ 1990

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학나형 7쪽 9번 변형

자연수 k에 대하여 전체집합 $U=\{(x,y)|x, y$는 실수$\}$의 두 부분집합 A_k, B_k가
$A_k=\{(x,y)|2x+y\le 2k,\ x,y$는 자연수$\}$, $B_k=\{(x,y)|x+2y\le 2k,\ x,y$는 자연수$\}$
이다. $n(A_{10}\cap B_{10})$의 값은?

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

풀 이

11 명제

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 19쪽 예제2

세 조건 p, q, r가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 명제 $p \to r$의 역은 참이다.
(나) 명제 $\sim r \to q$의 대우는 참이다.

다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $p \to r$ ③ $q \to p$
④ $\sim p \to q$ ⑤ $\sim r \to \sim q$

EBS 문항 분석

가. 명제의 역과 대우의 뜻을 알고 참과 거짓을 판별할 수 있는지를 묻는 문항이다.
나. 명제의 참, 거짓과 그 대우의 참, 거짓이 항상 일치함과 삼단논법을 알고 있으면 쉽게 풀 수 있다.
다. 명제 단원의 가장 기본적인 내용으로 출제가능성이 높다.

다시 보는 개념 !!

1. 명제의 역과 대우
 가. 명제 $p \to q$에서 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제 $q \to p$를 명제 $p \to q$의 **역**이라고 한다.
 나. 명제 $p \to q$에서 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾸어 놓은 명제 $\sim q \to \sim p$를 명제 $p \to q$의 **대우**라고 한다.
2. 명제와 그 대우의 참, 거짓
 가. 명제 $p \to q$가 참이면 그 대우 $\sim q \to \sim p$도 참이다.
 나. 명제 $p \to q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \to \sim p$도 거짓이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 24쪽 2번

실수 x에 대하여 두 조건 $p: x^2 < k$, $q: |x-5| \le 1$이 있다. 명제

'어떤 실수 x에 대하여 p이고 q이다.'

가 참이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. '어떤'이 들어있는 명제가 참이 되는 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문항이다.

나. '어떤 실수 x에 대하여 p이고 q이다.' 가 두 조건을 만족하는 진리집합 P, Q에 대해 $P \cap Q \ne \varnothing$임을 알고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

1. '모든' 또는 '어떤'이 들어 있는 명제의 참 거짓

전체집합을 U, 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때

가. 명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'는 $P = U$이면 참, $P \ne U$이면 거짓

나. 명제 '어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.'는 $P \ne \varnothing$이면 참, $P = \varnothing$이면 거짓

2. '모든' 또는 '어떤'이 들어 있는 명제의 부정

조건 p에 대하여

가. 명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'의 부정

⇨ '어떤 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.'

나. 명제 '어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.'의 부정

⇨ '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.'

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학나형 12쪽 24번

양수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : $2x-5 \geq 7$

q : $x \geq n$

r : $x^2-9x>10$

q는 p이기 위한 충분조건이고 r은 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 충분조건을 만족시키는 값의 범위를 구하는 문항으로, 진리집합의 포함관계를 수직선위에 나타내어 구한다.

나. 이 문항에서는 세 조건의 충분조건만 다루었지만 필요조건과 혼합하여 자주 출제되므로 필요조건, 충분조건에 대해서 모두 충분히 이해하고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

1. 필요조건, 충분조건, 필요충분조건

가. 명제 $p \to q$가 참일 때, 즉 $p \Rightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.

나. $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$ 일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 하고 기호 $p \Leftrightarrow q$로 나타낸다. 이때, q도 p이기 위한 필요충분조건이다.

2. 필요조건, 충분조건과 진리집합

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

가. p는 q이기 위한 충분조건 $\Leftrightarrow$ $P \subset Q$

나. p는 q이기 위한 필요조건 $\Leftrightarrow$ $Q \subset P$

다. p는 q이기 위한 필요충분조건 $\Leftrightarrow$ $P = Q$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학나형 13쪽 27번

양수 x에 대한 함수 $f_n(x)=nx+\frac{4n}{x}+2$ $(n=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$의 최솟값은?

① 22　② 24　③ 26　④ 28　⑤ 30

EBS 문항 분석

가. 양의 실수일 때 산술평균과 기하평균을 이용하여 최솟값을 구하는 문항이다.

나. 산술평균과 기하평균은 절대부등식의 응용으로 최댓값 또는 최솟값을 구하는데 자주 활용되고 있다. 또한 최댓값 또는 최솟값을 가지는 순간은 등호가 성립되는 순간이라는 것을 반드시 기억해두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

절대부등식

가. 실수 $a,\ b$에 대하여

① $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

② $a=b \Leftrightarrow a-b=0$

③ $a<b \Leftrightarrow a-b<0$

나. 실수 $a,\ b$에 대하여

① $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$

② $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$

다. 산술평균과 기하평균의 관계 : $a>0,\ b>0$일 때

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2003학년도 대수능 인문계 13번

양의 실수 a와 b에 대하여 집합 A와 B를 다음과 같이 정의한다.

$$A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\le 0\}$$

$$B=\{x\,|\,|x-1|\le b\}$$

이때, $A\cap B=\phi$이기 위한 필요충분조건은?

① $a-b<1$ ② $a-b>1$ ③ $a+b=1$

④ $a+b<1$ ⑤ $a+b>1$

문항풀이 Point !!

이차부등식과 절댓값이 있는 일차부등식을 동시에 만족하는 실수 x가 존재하지 않기 위한 조건을 구한다. 수직선 위에서 집합 B의 구간이 집합 A의 구간보다 오른쪽일 경우와 왼쪽일 경우를 나누어 구해야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2003학년도 대수능 인문계 5번

전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 두 명제 $p \to q$와 $q \to r$가 모두 참일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $P \subset R$

ㄴ. $(P \cup Q) \subset R^c$

ㄷ. $(P^c \cap R^c) \subset Q^c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문항풀이 Point !!

두 명제가 참이면 진리집합이 항상 $P \subset Q$, $Q \subset R$을 만족한다. 벤다이어그램을 그리면 참과 거짓을 판별하기 편리하다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 13번

자연수 a에 대한 조건

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이다'

가 참인 명제가 되도록 하는 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 17쪽 2번

명제

'모든 실수 x에 대하여 $2x^2-2kx+3k>0$이다.'

가 거짓이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 문제의 조건에서 '실수'를 '양의 실수'로 '이차부등식'을 '일차부등식'으로 '거짓이 되도록'을 '참인 명제가 되도록'으로 변형하였을 뿐 두 문항 모두 '모든'이 들어있는 명제의 참과 거짓에 관한 것을 묻고 있다.

문항풀이 Point !!

주어진 명제가 참이 되려면 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식 $x>a-4$를 만족하여야 하므로 $a-4\le 0$이다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 12번

정수 x에 대한 조건

$p : x(x-11) \geq 0$

에 대하여 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 17쪽 유제1

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: |x| \leq 4$, $q: x^2-4x-12 \leq 0$

조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합에 속하는 정수의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에서 문제의 조건을 2개 주었다면 기출문항에서는 조건을 1개 주고, 이의 진리집합을 묻는 문제로 축소·변형되었다.

문항풀이 Point !!

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 23쪽 1번 변형

전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $P \cap Q^c = \varnothing$
④ $P \cap Q = \varnothing$ ⑤ $P \cup Q = U$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 22쪽 5번 변형

$x > -2$일 때, $\dfrac{x^2+4x+7}{x+2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학나형 12쪽 23번 변형

실수 x에 대하여 두 조건 p, q는 다음과 같다.

p : $x^2-3x<0$, q : $a-3<x\le a+5$

조건 q는 p이기위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

풀 이

Ⅴ. 함수

기출 문항 분석

집합과 명제 단원과 마찬가지로 함수 단원은 항상 1학년 수학의 교육과정에 해당되어 2005학년도 수능부터는 출제되지 않아 해당되는 최근의 기출문항은 없다. 2004학년도 수능이전의 기출문제에서도 부등식의 영역, 일차함수, 이차함수, 삼차함수, 실생활 상황에서 함수를 정의하는 문제 등과 연결된 내용이 많이 출제되었으며 현재 교육과정상 수능의 출제범위에 포함되어 있는 합성함수, 역함수, 유리함수, 무리함수 부분은 출제빈도가 적었다.

2015학년도 이후 전국연합학력평가에서는 주로 합성함수, 역함수의 함숫값, 그래프를 이용한 함숫값 찾기, 유리함수와 무리함수의 평행이동, 역함수 등의 기본문제가 많이 출제되었다. 유리함수와 무리함수의 그래프와 도형의 넓이, 함수의 극한, 미분, 적분 등의 다른 단원과 연계된 문제가 출제될 것으로 예상된다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2002수능. 인문계. 5번	함수식을 만족하는 그래프를 고르는 문항(정답형 2점)
2002수능. 인문계. 21번	합성함수를 이용한 부등식의 범위를 구하는 문항(정답형 3점)
2003수능. 인문계. 3번	유리함수와 합성함수의 함숫값을 구하는 문항(정답형 2점)

12 함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 수학Ⅱ 29쪽 유제4

두 함수 $f(x)=3x+3$, $g(x)=x^2+6$이 있다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$(f\circ h)(x)=g(x)$

를 만족시킬 때, $(f\circ g)(2)+(h\circ f)(2)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 합성함수를 계산하는 문항으로 단순히 두 함수의 합성을 구하는 것이 아니라 함수 $f(x)$와 정해지지 않은 함수 $h(x)$를 합성하여 $g(x)$가 되는 함수 $h(x)$를 구해야 한다. $f(x)$가 일차식이므로 합성함수의 정의를 이용하면 간단히 구할 수 있다.

나. $f(h(x))=g(x)$에 $x=2$를 대입하면 함수 $h(x)$를 구하지 않고도 쉽게 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

1. 합성함수

가. 두 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$의 합성함수 $g\circ f$는

$g\circ f : X\to Z$

$(g\circ f)f(x)=g(f(x))$

나. 세 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $h: Z\to W$의 합성함수 $h\circ g\circ f$는

$h\circ g\circ f : X\to W$

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$

2. 합성함수의 성질

가. $g\circ f\neq f\circ g$ (교환법칙이 성립하지 않는다.)

나. $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ (결합법칙이 성립한다.)

다. $f\circ I=I\circ f=f$ (단, I는 항등함수)

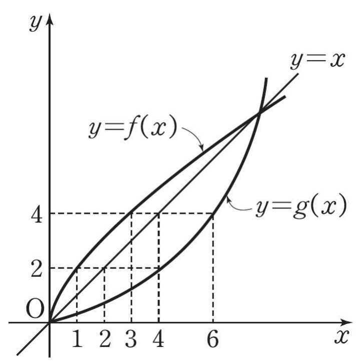
2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 33쪽 4번

그림은 역함수가 존재하는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.

$g(4)+f^{-1}(2)+\left(f^{-1}\circ g\right)^{-1}(3)$의 값은?

① 5　　② 6
③ 7　　④ 8
⑤ 9



EBS 문항 분석

가. 합성함수와 역함수의 개념을 이해하고 함수의 그래프를 따라가며 주어진 식의 값에 대응하는 함숫값을 찾을 수 있는가를 묻는 문항이다.

나. 합성함수, 역함수를 함수의 그래프를 보고 해석하는 것은 미분법, 적분법 등 교육과정내의 모든 수학분야에서 활용되므로 꼭 익혀두는 것이 좋다.

다시 보는 개념 !!

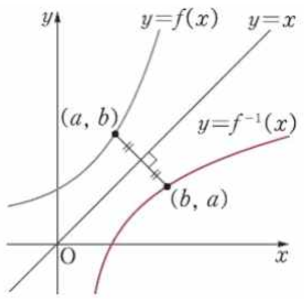
함수와 그 역함수의 그래프

가. 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

나. 점 $(a,\ b)$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$ 가 성립한다. 이때 $y=f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 가 존재할 때, 역함수의 정의에 의하여

$b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$

가 성립하므로 점 $(b,\ a)$ 는 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이다. 그런데 점 $(a,\ b)$ 와 점 $(b,\ a)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



2017수능대비 EBS 대표 예제 3　　2016년 수능완성 수학나형 16쪽 3번

함수 f는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고
$-1 \le x < 1$일 때 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1 \le x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \end{cases}$이다.
$f(2017)$의 값은?

① 1　② 5　③ 10
④ 15　⑤ 20

EBS 문항 분석

가. 그래프의 일부분이 계속 반복되어 나타나는 주기함수의 함숫값을 구하는 문항이다.
나. $f(x+p)=f(x)$의 꼴의 함수식이 $|p|$간격마다 같은 값을 가진다는 것을 알고 있어야 문제를 해결할 수 있다.
다. y축에 대한 대칭, 원점에 대한 대칭과 더불어 자주 출제되는 함수식이므로 반드시 알아두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

모든 실수 x에 대하여
가. $f(-x)=f(x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
나. $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
다. 함수 $f(x)$가 주기가 p인 함수이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시킨다. (단, $p \ne 0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학나형 166쪽 17번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 있다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 치역이 $\{1,\ 2,\ 4\}$이고, $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때, $f(1)+f(2)$의 값은? [4점]

① 6　　② 5　　③ 4

④ 3　　⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 합성함수의 치역과 주어진 함숫값을 이용하여 함수의 대응관계를 추론하는 문항이다.

나. $f(2)$의 값이 될 수 있는 것과 없는 것을 구분하여 하나하나 확인하면 조건에 맞는 함수의 대응관계를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

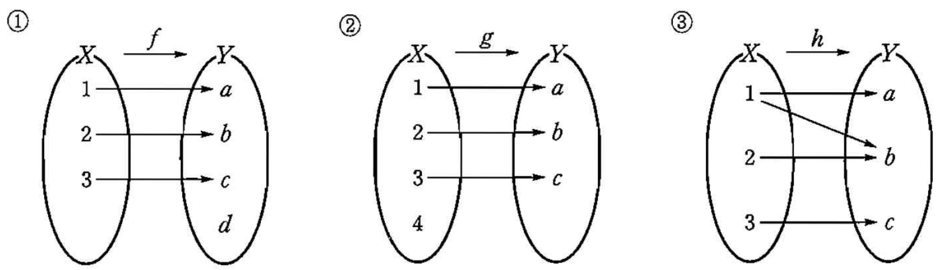
함수의 뜻

가. 두 집합 X, Y에서 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소가 꼭 하나씩만 대응할 때, 이러한 대응 f를 집합 X에서 Y로의 함수라고 하고 이것을 기호로

$$f : X \to Y$$

또는 $X \xrightarrow{f} Y$와 같이 나타낸다.

나. 함수인 예, 함수가 아닌 예



①은 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 한 개씩만 대응하므로 함수이다.

$(1 \to a,\ 2 \to b,\ 3 \to c$와 같이 한 개씩 대응)

②는 집합 X이 원소 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

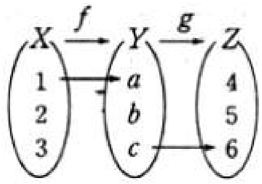
③은 $1 \to a$, $1 \to b$와 같이 집합 X의 원소 1에 Y의 원소 a, b 두 개가 대응하므로 함수가 아니다.

EBS 기출분석 1

기출 문항

2000학년도 대수능 인문계

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$, $Z=\{4,\ 5,\ 6\}$에 대하여, 일대일 대응인 함수 $f\ :\ X\rightarrow Y$와 함수 $g\ :\ Y\rightarrow Z$가 $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?



① a
② b
③ c
④ $b,\ c$ 모두 가능하다.
⑤ $a,\ b,\ c$ 모두 가능하다.

문항풀이 Point !!

일대일 대응을 이용하여 $f(3)=b$인 경우와 $f(3)=c$인 경우로 나누어서 생각한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항

2001학년도 대수능 인문계

삼차함수 $f(x)=ax^3+b$의 역함수 f^{-1}가 $f^{-1}(5)=2$를 만족시킬 때, $8a+b$의 값을 구하시오.

문항풀이 Point !!

$f^{-1}(5)=2$이므로 $f(2)=5$를 대입하여 구한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 4번

함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $f^{-1}(5)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 31쪽 5번

함수 $f(x)=2x+|x|+4$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(1)+g^{-1}(1)$ 의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념을 사용하여 문항을 축소하여 출제
나. 6월 모의평가에서는 일차식의 절댓값을 없애고 발문도 간단하게 출제하였다.

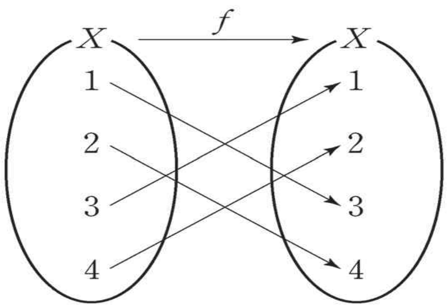
문항풀이 Point !!

$f(x)=2x-3=5$를 만족하는 x를 구하면 된다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 5번

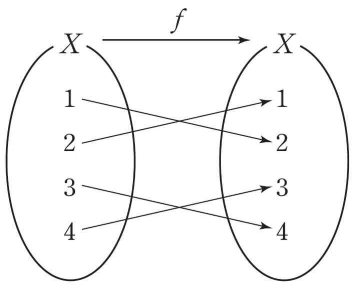
그림은 함수 $f: X \to X$ 를 나타낸 것이다. $f(2)+(f \circ f)(3)$ 의 값은? [3점]



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 32쪽 4번

그림은 함수 $f: X \to X$ 를 나타낸 것이다. $(f \circ f)(1)+f^{-1}(4)$의 값은?



① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 구하는 값만 달리하여 동일한 유형으로 출제
나. 함수의 대응관계를 일부 변경하였고, 발문에서 역함수를 물었지만 동일한 유형이다.

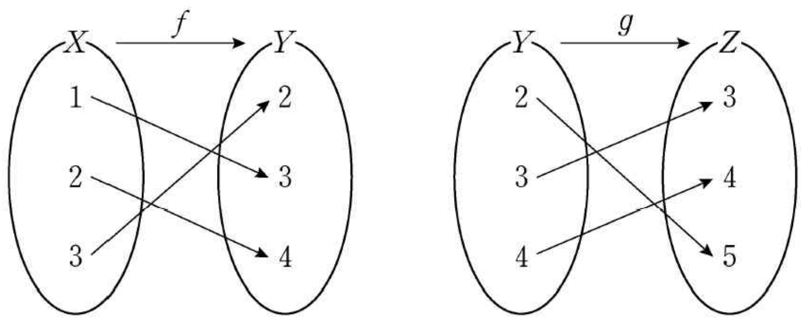
문항풀이 Point !!

$(f \circ f)(x)=f(f(x))$, $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$ 를 이용한다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 5번

그림은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$를 나타낸 것이다.



$(g \circ f)(3)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 구하는 값만 달리하여 동일한 유형으로 출제

나. EBS교재에 있는 문항과 함수의 대응관계가 일부 변경되었으나 합성함수의 개념을 이해하고 합성함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

문항풀이 Point !!

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 이용한다.

EBS 기출분석 6

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 24번

함수 $f(x)=2x-13$에 대하여 $f^{-1}(7)$의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 20쪽 19번

일차함수 f가 $f(2x+3)=4x-1$을 만족시킬 때, $f^{-1}(-2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 구하는 값만 달리하여 동일한 유형으로 출제

나. EBS교재에 있는 문항에서는 함수의 개념을 이해하고 함수의 값과 역함수의 값을 구하는 문제였으나 기출문항에서는 역함수의 개념을 이해하는 문항으로 축소 · 변형되었다.

문항풀이 Point !!

$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$를 이용한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 33쪽 2번 변형

두 집합 $X=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (x<0) \\ x^2+1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

로 정의할 때, $f(f(-1))+f(0)$의 값은?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 수학나형 18쪽 9번 변형

모든 실수 x에 대하여 일차함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$f(x)+xf(f(x))=x^2-x-1$$

모든 $f(10)$의 값의 합은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학나형 17쪽 필수유형 변형

집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수가 $f(f(f(x)))=x$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

풀 이

13 유리함수와 무리함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 | 2016년 수능특강 수학Ⅱ 39쪽 유제4

함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 평행이동하여 일치될 수 있는 그래프를 갖는 함수만을 〈보기〉에서 있는 대로 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=\dfrac{x}{x+1}$　　ㄴ. $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$　　ㄷ. $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 유리함수를 평행이동시켜 일치될 수 있는 함수를 구하는 문항으로 유리함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 형태로 고쳐서 k의 값이 같은 식을 구한다.

다시 보는 개념 !!

1. $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq0)$ 의 그래프

가. $y=\dfrac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

나. 점 $(p,\ q)$ 에 대하여 대칭인 직각쌍곡선이다.

다. 점근선은 두 직선 $x=p,\ y=q$ 이다.

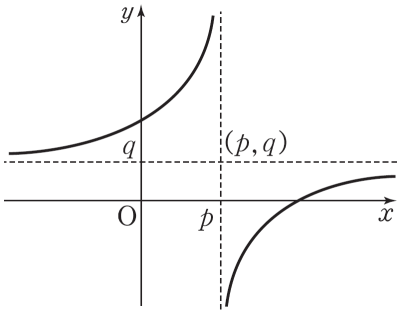
라. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$ 인 모든 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$ 인 모든 실수$\}$

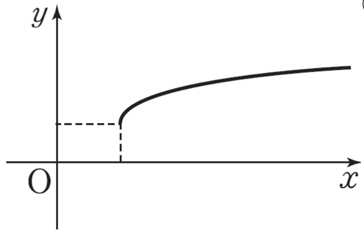
마. 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$ 를 지나고 기울기가 ±1 인 직선, 즉 $y=\pm(x-p)+q$ 에 대하여 대칭이다.

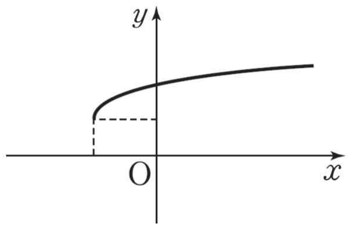
2017수능대비 EBS 대표 예제 2

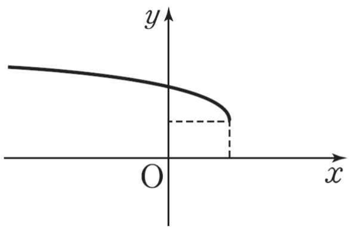
2016년 수능특강 수학Ⅱ 44쪽 3번

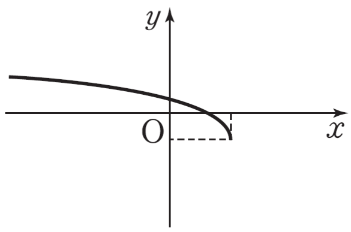
그림은 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프를 나타낸 것이다. 이 그래프의 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 $p>q>1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx+a}+c$의 그래프로 옳은 것은? (단, a,b,c는 상수이다.)

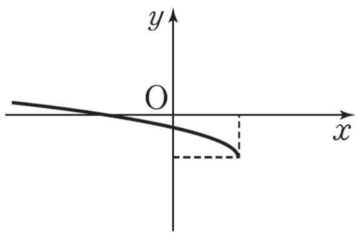


①


②


③


④


⑤


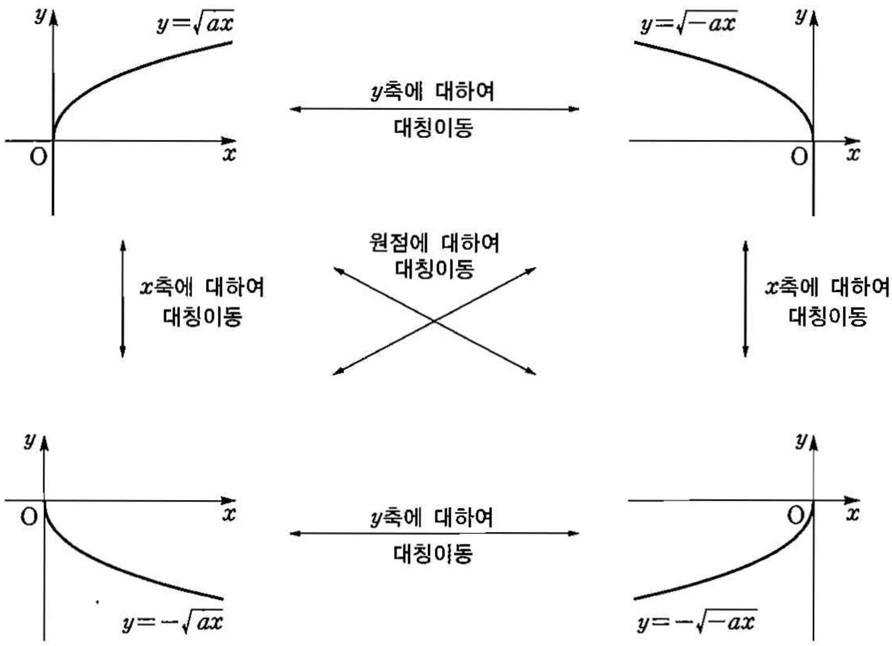
EBS 문항 분석

가. 유리함수의 그래프를 보고 미정계수의 부호를 판단하고, 그 계수를 이용하여 만든 무리함수의 그래프를 추론하는 문항이다.

나. 유리함수와 무리함수의 각 그래프의 개형을 모두 정확하게 알고 있어야 풀 수 있으며, 유리함수의 경우 점근선의 방정식을 이용하면 조금 더 쉽게 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

1. 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프



2. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$와 같이 변형되므로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학나형 147쪽 7번

두 함수 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}$, $g(x)=b+\dfrac{3}{x+c}$이 서로 역함수일 때, $g(a)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 분수함수의 역함수를 구하여 미정계수를 찾아내는 문항이다.

나. 직접 역함수를 구해서 미정계수를 찾아도 되지만 유리함수의 역함수는 직선 $y=x$에 대칭이므로 점근선을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

유리함수 $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 역함수 구하기

방법 1. (i) $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 정리하여 $x=g(y)$ 로 고친다.

(ii) $x=g(y)$ 에 x 대신 y, y 대신 x 를 대입하여 $y=g(x)$ 로 만든다.

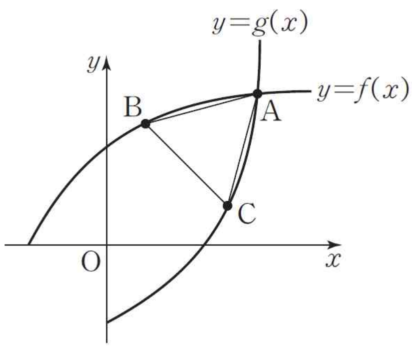
방법 2. 공식 이용

$f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 역함수 $f^{-1}(x)=\dfrac{-bx+d}{ax-c}$

(b, c 의 부호와 위치만 바뀐다.)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학나형 159쪽 21번

그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{3}-3$ ③ $2(\sqrt{2}-1)$
④ $3\sqrt{3}-4$ ⑤ $4(\sqrt{2}-1)$

EBS 문항 분석

가. 역함수가 존재하는 어떤 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프와의 교점을 구하여 문제를 해결하는 문항이다.
나. 증가하는 함수 $f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프와의 교점은 직선 $y=x$ 위에서 만난다는 성질을 이용하면 교점의 좌표를 쉽게 구할 수 있다.
다. 감소하는 함수 $f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프와의 교점은 직선 $y=x$ 위가 아닌 곳에서도 생길 수 있다.
라. 정사각형의 대각선의 길이는 한 변의 길이의 $\sqrt{2}$ 배이다.

다시 보는 개념 !!

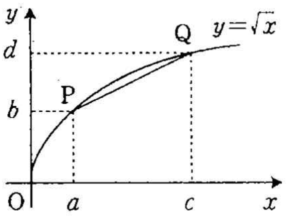
무리함수의 역함수의 성질
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2000학년도 대수능 인문계

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $\dfrac{b+d}{2}=1$일 때,

직선 PQ의 기울기는? (단, $0<a<c$)



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

문항풀이 Point !!

문제에서 $\dfrac{b+d}{2}=1$이 제시되어 있으므로 기울기의 식 $\dfrac{d-b}{c-a}$에서 분모를 b와 d의 문자로 바꾼다.

EBS 기출분석 2

기출 문항

2001학년도 대수능 인문계

분수함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 직선 $y=ax$에 대하여 대칭이 되는 상수 a의 값을 모두 구하면?

① $-1,\ 1$ ② $-2,\ 2$ ③ $-3,\ 3$

④ $-4,\ 4$ ⑤ $-5,\ 5$

문항풀이 Point !!

분수함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 특징은 직선 $y=x$, $y=-x$에 대칭이다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 26번

함수 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-5}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$ 이다. 두 상수 p, q의 곱 pq의 값을 구하시오. [4점]

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 38쪽 예2

함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구하여라.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 문제의 숫자만 다르고 나머지는 일치한다.

문항풀이 Point !!

$y=\dfrac{2x-3}{x-3}$ 를 $y=2+\dfrac{3}{x-3}$ 의 꼴로 고쳐서 점근선의 방정식을 구한다. 분모가 0이 되는 x 의 값과 분모와 분자의 일차항의 계수를 이용하면 $y=2+\dfrac{3}{x-3}$ 의 꼴로 고치지 않고 바로 점근선의 방정식을 구할 수도 있다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 6월 모의평가 수학나형 15번

함수 $y=a\sqrt{x}+4$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 m만큼,
y축의 양의 방향으로 n만큼 평행이동 하였더니
함수 $y=\sqrt{9x-18}$의 그래프와 일치하였다.
$a+m+n$의 값은?(단 a, m, n은 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 41쪽 6번

함수 $y=\sqrt{px+9}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 $y=3\sqrt{x}$의 그래프와 일치하였다. 이때 $m+n+p$의 값은? (단, m, n, p는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 주어진 조건만 약간 변형하여 동일한 유형으로 출제
나. 무리함수의 숫자만 바뀌었을 뿐 문제와 발문이 모두 같은 유형이다.

문항풀이 Point !!

함수 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼 y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y-n=f(x-m)$과 일치한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 43쪽 2번 변형

함수 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$의 그래프가 직선 $y=x+p$와 직선 $y=-x+q$에 대하여 대칭일 때, 상수 p, q의 곱 pq의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능완성 수학나형 25쪽 36번 변형

함수 $f(x)=\sqrt{x}+2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 점 $\mathrm{P}(2, 0)$이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 Q라 하자. 삼각형의 OPQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 43쪽 4번 변형

함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프의 제1사분면 위의 한 점 P에서 직선 $y=x$ 에 대칭인 점을 Q라고 한다. 선분PQ의 중점에서 x축, y축과 평행하게 그은 직선이 $y=\dfrac{5}{x}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 선분 PQ의 길이가 $4\sqrt{2}$일 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $\dfrac{n}{m}$이다. $m+n$의 값은? (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

풀 이

Ⅲ. 수 열

기출 문항 분석

이 단원에서는 등차수열과 등비수열, 여러 가지 수열의 일반항과 합, 일반항과 합 사이의 관계 등을 묻는 문제가 자주 출제되고 있다. 수열의 일반항 규칙을 정확하게 이해하여 식으로 표현할 수 있어야 하며 여러 가지 문제 상황을 수열로 나타내어 해결하도록 한다.

여러 가지 수열에 대한 복잡한 문제는 지수와 로그 또는 도형에 대한 내용과 연계되어 출제되는 경우가 많다. 함수의 성질, 도형의 넓이나 길이에 대하여 값을 정확하게 구하고 이들 안에서 규칙을 찾아내는 것을 함께 연습해 둘 필요가 있다. 문제 상황에 맞게 값들을 나열해 보고, 이를 수식으로 표현할 수 있어야 하며, 수열의 유형에 맞는 공식을 적용해보는 연습을 해 두는 것이 좋을 것이다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 6번	등차수열에 대한 관계식을 이용하여 공차를 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. A형. 13번	로그를 이용하여 정의된 함수의 값을 일반항으로 하는 수열의 합을 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. A형. 24번	등비수열의 일반항을 이용한 관계식에서 a_9를 구하는 문제(단답형 3점)
2015수능. A형. 5번	등비수열의 일반항을 이용하여 a_3을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 9번	수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_4를 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 5번	등차수열의 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_8을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 7번	등비수열의 일반항을 이용하여 a_1을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 22번	등차수열의 일반항을 이해하고 공차를 구하는 문제(단답형 3점)

14 등차수열과 등비수열

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 49쪽 유제4번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n+2^n$일 때, a_1+a_5의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

EBS 문항 분석

가. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 제1항, 제5항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

수열의 합 S_n과 일반항 a_n 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 56쪽 3번

첫째항이 1이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\frac{S_{30}}{S_{10}}=7r^{10}-8$이 성립한다. $\frac{S_{40}}{S_{10}}$의 값은? (단, $r\neq 1$)

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

EBS 문항 분석

가. 등비수열의 합 공식을 이용하여 주어진 조건으로부터 공비를 구하고 이를 이용하여 제1항부터 제40항까지의 합과 제1항부터 제10항까지의 합의 비를 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

가. $r\neq 1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

나. $r=1$일 때, $S_n=na$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학 나형 29쪽 8번

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이
$a_n+b_n=6n-2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$
을 만족시킨다. $a_5-b_5=-10$일 때, b_{10}의 값은?
① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

EBS 문항 분석

가. 두 개의 등차수열의 관계식을 이해하고 일반항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하고 a_1과 b_1의 관계를 이용하여 해결해야 한다.

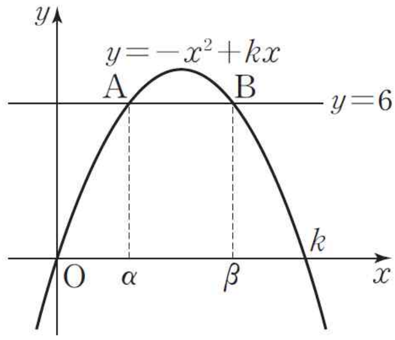
다시 보는 개념 !!

등차수열의 뜻과 일반항
가. 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 얻어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.
나. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d\,(n=1, 2, 3, \cdots)$이다.
다. 세 수 a, x, b가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x를 a, b의 등차중항이라고 한다.
$2x=a+b$ 또는 $x=\dfrac{a+b}{2}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학 나형 32쪽 21번

그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+kx$의 그래프와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 세 수 $\frac{5}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{5}{\beta^2}$가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\beta<k$)



EBS 문항 분석

가. 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 의미를 알고 등비중항의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 교점의 x좌표인 α, β와 k의 관계를 구한 다음 등비중항의 성질을 이용하면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

등비수열의 뜻과 일반항

가. 어떤 수에 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어진 수열을 등비수열이라 하고, 곱한 일정한 수를 공비라고 한다.

나. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$이다.

다. 세 수 a, x, b가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x를 a, b의 등비중항이라고 한다.

$x^2=ab$ 또는 $x=\pm\sqrt{ab}$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 7번

첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 4a_1,\ a_7 = (a_6)^2$$

일 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

EBS 교재 2015 수능완성 A형 유형편 52쪽 8번

첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 + 3a_2 = 0,\ a_3 = {a_4}^2$$

일 때, $\frac{1}{a_9}$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 유사한 상황을 제시하고 구하는 값만 달리하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 첫 번째 조건을 이용하여 공비를 구하고, 이를 두 번째 조건에 대입하여 첫째항을 구함으로써 제 9항을 구할 수 있다. 기출문항도 이와 같은 방법으로 첫 번째 조건을 이용하여 공비를 구하고, 이를 두 번째 조건에 대입하여 첫째항을 구할 수 있으므로 두 문항은 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 첫째항과 두 번째 항의 관계에서 공비를 구할 수 있어야 한다.

나. 등비수열의 일반항을 이용하여 제3항과 제4항을 첫째항과 공비를 이용하여 표현할 수 있다면 비교적 쉽게 해결가능하다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 A형 문제 22번

등차수열 $\{a_n\}$ 대하여 $a_8 - a_4 = 28$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015 수능완성 수학A형 유형편 50쪽 1번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 5,\ a_5 - a_3 = 8$$

일 때, a_7 의 값은?

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항은 모두 등차수열의 일반항을 이해하고 적용할 수 있는가를 묻고자 하는 비교적 쉬운 문항이다. EBS교재 문항은 첫째항이 주어지고, 조건을 이용하여 공차를 구한다음 제7항을 구하는 문항이지만, 기출문항은 조건 하나만을 이용해 공차를 구하는 문항으로 개념과 원리를 활용한 간단한 문항이다.

문항풀이 Point !!

등차수열의 일반항을 이용하여 a_3, a_5 를 나타내고 주어진 관계식을 이용해 공차를 구하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월모의평가 수학 나형 문제 12번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_8 = a_2 + 12,\ a_1 + a_2 + a_3 = 15$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 47쪽 예제1번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10} = a_1 + 18,\ a_1 + a_4 + a_7 = 0$$

일 때, a_{20}의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 주어진 조건만 약간 변형하여 동일한 유형으로 출제

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 첫 번째 조건을 이용하여 첫째항을 구하고, 두 번째 조건을 이용하여 공차를 구하여 해결하는 문항으로 풀이방법까지 매우 유사한 같은 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

첫 번째 조건을 이용하여 첫째항을 구하고, 두 번째 조건을 이용하여 공차를 구하면 등차수열의 일반항 공식으로 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 6월모의평가 수학 나형 문제 25번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $\dfrac{a_4a_5}{a_2a_3}=16$ 일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2014 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 54쪽 4번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=\sqrt{2}$, $\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_5}{a_3}=6$일 때, a_4의 값은?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8 ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념을 활용하여 유사한 유형으로 출제

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 첫째항이 주어지고, 주어진 조건을 이용하여 공비를 구하여 해결하는 문항으로 등비수열의 일반항을 이용하는 유사한 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

주어진 조건을 이용하여 공비를 구하고, 등비수열의 일반항 공식을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월모의평가 수학 나형 문제 6번

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{a_7}{a_5}=4$ 일 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 31쪽 17번

2. 모든 항이 자연수이고 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_4=144$$

일 때, a_5의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 등비수열의 일반항과 주어진 조건을 이용하여 공비를 구하여 해결하는 문항으로 유사한 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

주어진 조건을 이용하여 공비를 구하고, 등비수열의 일반항 공식을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2016수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 55쪽 3번 변형

$a_2 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + kn$ 일 때, $a_1 + a_{20}$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능완성 수학 나형 30쪽 13번 변형

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1+a_4+a_7=15$, $a_2+a_5+a_8=9$ 이다. 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 S_n 은 $n=k$ 일 때 최댓값 M 을 갖는다. $M+k$ 의 값을 구하시오.

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 수학나형 33쪽 24번 변형

첫째항이 0 이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $3S_{30} = 7S_{20}$ 일 때, $\dfrac{S_{40}}{S_{10}}$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

풀 이

15 수열의 합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 66쪽 1번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=34,\ \sum_{k=1}^{9}(2a_k-b_k)=26$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k-2b_k)=p-a_9+2b_9+a_{10}+b_{10}$이다. 상수 p의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

EBS 문항 분석

가. 주어진 두 개의 조건으로부터 Σ의 뜻과 성질을 이용해서 구하고자 하는 합을 표현할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 Σ를 합으로 나타낸 다음 구하고자 하는 합을 표현하기 위해 두 개의 조건을 연립하면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 합의 기호 Σ의 뜻

수열$\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합S_n은 다음과 같다.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

나. 합의 기호 Σ의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c는 상수) (4) $\sum_{k=1}^{n}c=nc$ (c는 상수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 61쪽 예제2번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{3n-2}=n+1,\ a_{3n-1}=n,\ a_{3n}=n^2\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{15} a_{2k}$ 의 값은?

① 490 ② 495 ③ 500

④ 505 ⑤ 510

EBS 문항 분석

가. 항별로 3개의 규칙이 성립하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 제1항부터 제30항까지의 합을 구하는 문제이다.

나. 제1항부터 제30항까지의 합을 수열 $\{a_n\}$의 규칙에 따라 10개의 항을 1개의 세트로 하여 3개의 세트의 합으로 나타내면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

자연수의 거듭제곱의 합

가. $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

나. $\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

다. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학 나형 36쪽 36번

$-2, 1, 2$중에서 어느 하나의 수를 항의 값으로 갖는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 0, \ \sum_{k=1}^{15} (a_k + 2)^2 = 114$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} ({a_k}^3 + 4)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

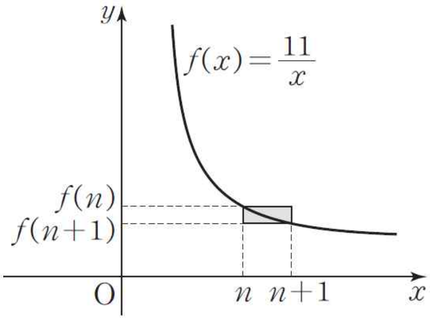
가. 주어진 두 개의 조건으로부터 수열 $\{a_n\}$의 항들의 특징을 파악하여 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 수열 $\{a_n\}$의 제1항부터 제15항까지 항들의 규칙을 찾기보다는 $-2, 1, 2$의 개수가 몇 개인지를 구하면 쉽게 해결되는 문항이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학 나형 38쪽 42번

자연수 n과 함수 $f(x)=\dfrac{11}{x}$ $(x>0)$에 대하여 네 직선 $x=n$, $x=n+1$, $y=f(n)$, $y=f(n+1)$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

EBS 문항 분석

가. 유리함수의 그래프에서 네 직선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 S_n을 구하여 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. S_n을 구한 다음 수열의 합이 소거되는 것을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

분수꼴의 수열의 합

가. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

나. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 9월모의평가 수학 나형 문제 9번

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6} (a_k+1)$을 만족시킬 때, a_7의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 35쪽 32번

이차함수 $f(x) = -x^2 + 2ax$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} f(k+2) = \sum_{k=3}^{10} f(k-1)$$

이 성립할 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념・원리 활용

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 시그마의 뜻을 활용한 유사한 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

시그마를 사용하여 표현된 수열의 합의 의미를 잘 이해하면 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월모의평가 수학 나형 문제 14번

첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 38쪽 41번

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합이 465일 때,

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2}{\sqrt{1+a_k}+\sqrt{1+a_{k+1}}}$$

의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 등차수열의 일반항을 구하고 이를 대입하여 수열의 합을 구하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

등차수열의 일반항을 구하고 이를 대입하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 3

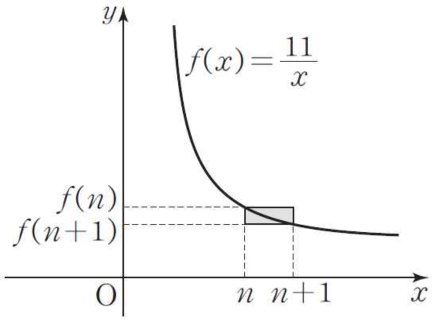
기출 문항 2017학년도 대수능 9월모의평가 수학 나형 문제 17번

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{3}{x}(x>0)$ 위의 점 $\left(n, \dfrac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1, 0), (n+1, 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]

① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 38쪽 42번

자연수 n과 함수 $f(x)=\dfrac{11}{x}$ $(x>0)$에 대하여 네 직선 $x=n$, $x=n+1$, $y=f(n)$, $y=f(n+1)$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재의 도형은 사각혀이고 기출문제의 도형은 삼각형이라는 차이뿐 주어진 도형의 넓이를 n에 관한 식으로 표현한 후 대입하여 주어진 수열의 합을 구하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

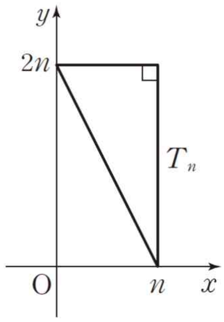
도형의 넓이를 수열의 일반항으로 표현한 후 대입하여 수열을 합을 구할 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2016수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 수학Ⅱ 65쪽 4번 변형

그림과 같이 자연수 n에 대하여 세 점 $(n,\ 0)$, $(n,\ 2n)$, $(0,\ 2n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 T_n이라 하자. 자연수 k에 대하여 삼각형 T_{2k}와 삼각형 T_{3k}가 만나서 생기는 삼각형의 둘레 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값을 구하시오.



풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항2

2016년 수능완성 수학나형 35쪽 33번 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=50$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=10$ 이 성립할 때,

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+4b_k)$ 의 값은?

① 110　② 130　③ 150

④ 170　⑤ 190

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3

2016년 수능완성 수학나형 37쪽 38번 변형

모든 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2-(2n+1)x-n^2=0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(\alpha_k-1)(\beta_k-1)}=-\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

풀 이

16 수학적 귀납법

2017수능대비 EBS 대표 예제 1　　2016년 수능특강 수학Ⅱ 69쪽 2번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_3=9$이고

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_9 의 값은?

① 31　② 32　③ 33

④ 34　⑤ 35

EBS 문항 분석

가. 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의를 나타내는 관계식을 이용하여 제9항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 귀납적 정의를 나타내는 관계식이 등차수열임을 알면 공차를 구하여 쉽게 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

수열의 귀납적 정의

가. 일반적으로 첫째항의 값과 이웃하는 두 항 사이의 관계식이 정해지면 모든 항의 값이 정해진다. 이와 같이 수열을 정의하는 방법을 수열의 귀납적 정의라 하고, 두 항 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

나. 첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열 $\Rightarrow a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

다. 첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\Rightarrow a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 73쪽 예제3번

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$==2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$ 이다.

위 등식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$=2-\frac{1}{2^k}\left\{(k+2)-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\right\}=2-\frac{\left(\boxed{\text{(나)}}\right)+2}{2^{k+1}}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때,
$f(7)+g(9)$의 값은?

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 수학적 귀납법을 이해하고 빈 칸을 추론하는 문제이다.

나. $n=k$일 때 성립한다고 가정한 식을 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이기 위하여 변형하면 된다.

다시 보는 개념 !!

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명할 때에는 다음 두 가지를 밝히면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

이와 같은 증명 방법을 수학적 귀납법이라 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학 나형 39쪽 46번

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}+\frac{1}{2a_n-1}=0$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

EBS 문항 분석

가. 수열 $\{a_n\}$의 관계식을 이용하여 규칙성을 찾고, 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 관계식에서 n에 $1, 2, 3, \cdots$ 을 대입하여 제2항, 제3항, 제4항을 구해보면 수열의 규칙성을 찾을 수 있다.

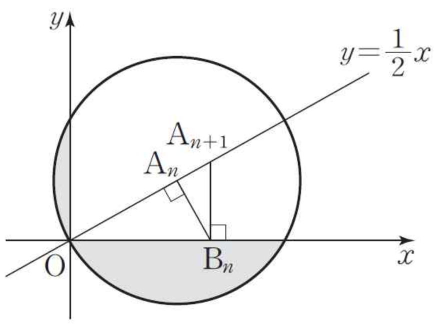
2017수능대비 EBS 대표 예제 4 | 2016년 수능완성 수학 나형 40쪽 49번

자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

(나) 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직이고 점 A_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점이 B_n이고, 점 B_n을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점이 A_{n+1}이다.

원점 O에 대하여 점 A_n을 중심으로 하고 선분 OA_n을 반지름으로 하는 원과 원의 내부에서 x축의 아래쪽 영역과 y축의 왼쪽 영역의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $S_5=(a\pi-1)b^8$이다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, 영역은 경계선을 포함하고, a, b는 양의 유리수이다.)



EBS 문항 분석

가. 점 A_n의 좌표의 규칙성을 추론하여 수열 $\{S_n\}$의 제5항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, n번째 항과 $n+1$번째 항 사이의 관계식을 찾아 문제를 해결하면 된다.

EBS연계 예상문항

2016수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 수학II 74쪽 1번 변형

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = -\log_2 3$$

일 때, $2^{a_1+a_2} + 2^{a_3+a_4} + 2^{a_5+a_6} + \cdots + 2^{a_{19}+a_{20}}$의 값은?

① $\frac{9}{20}\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$ ② $\frac{9}{20}\left(1-\frac{1}{2^{40}}\right)$ ③ $\frac{9}{10}\left(1-\frac{1}{3^{20}}\right)$

④ $\frac{21}{20}\left(1-\frac{1}{3^{20}}\right)$ ⑤ $\frac{27}{20}\left(1-\frac{1}{3^{40}}\right)$

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 수학Ⅱ 75쪽 3번 변형

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=3,\ a_2=2$ 이고

$$a_n a_{n+2}=a_{n+1}+1\ (n\ge 1)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 값은?

① 160 ② 170 ③ 180 ④ 190 ⑤ 200

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 수학나형 41쪽 50번 변형

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{2^2}\cdot 2!+\frac{2}{2^3}\cdot 3!+\frac{3}{2^4}\cdot 4!+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}\cdot(n+1)!=\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}-1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

위의 증명에서 (가),(나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $\frac{g(3)}{f(3)}$ 의 값을 구하시오.

(ⅰ) $n=1$ 일 때, (좌변)=$\frac{1}{2}$, (우변)=$\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2^2}\cdot 2!+\frac{2}{2^3}\cdot 3!+\frac{3}{2^4}\cdot 4!+\cdots+\frac{k}{2^{k+1}}\cdot(k+1)!$$
$$=\frac{(k+2)!}{2^{k+1}}-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을(를) 더하면

$$\frac{1}{2^2}\cdot 2!+\frac{2}{2^3}\cdot 3!+\frac{3}{2^4}\cdot 4!+\cdots+\frac{k}{2^{k+1}}\cdot(k+1)!+\boxed{(가)}$$
$$=\frac{\boxed{(나)}}{2^{k+2}}-1$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

풀 이

Ⅳ. 지수와 로그

기출 문항 분석

이 단원에서는 지수법칙을 이용하여 계산하는 문제, 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제가 꾸준하게 출제되는 경향을 보인다.

지수의 정의와 지수법칙, 로그의 정의와 성질을 이해하고 활용하는 문제는 필수적이다. 거듭제곱근의 성질과 지수의 확장을 이해하고 대소 관계를 판별할 수 있어야 하며, 로그가 정의되기 위한 밑과 진수의 조건을 알고 있어야 한다. 또한 상용로그의 뜻을 알고 이를 활용한 실생활 문제를 많이 다루어보아야 한다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 1번	지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)
2014수능. A형. 10번	로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 1번	지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)
2015수능. A형. 10번	로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 25번	로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(단답형 3점)
2016수능. A형. 2번	지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)

17 지 수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 86쪽 3번

1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, c는 a^{12}의 n제곱근이다. n의 값을 구하시오.

> (가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 네제곱근이다.
> (나) $\sqrt{b}$는 c의 세제곱근이다.

EBS 문항 분석

거듭제곱근의 뜻을 알고 세 미지수 사이의 관계를 추론할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

거듭제곱근

가. a의 n제곱근

실수 a에 대하여 n(n은 2 이상의 정수)제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$의 근을 a의 n제곱근이라 한다. 이때, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

나. a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 하면

① n이 짝수이면, $a \geq 0$일 때에만 실수 x가 존재하고 $x=\pm\sqrt[n]{a}$이다.

② n이 홀수이면, a의 값에 관계없이 실수 x는 항상 존재하고 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

n제곱근	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 72쪽 1번

부등식 $\sqrt{32}\times\sqrt[4]{64}<n<4^{-1}\times 8^{\frac{7}{3}}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 13　② 14　③ 15
④ 16　⑤ 17

EBS 문항 분석

거듭제곱근의 성질과 유리수인 지수를 이해하여 계산한 다음, 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 2이상의 자연수일 때,

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$　(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　(6) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ (p는 자연수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학 나형 44쪽 3번

2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^{n}\ (x>0)$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표를 α_n, 곡선 $y=x^{n+1}\ (x>0)$과 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 β_n이라 하자. $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$이 1보다 큰 어떤 수의 $n(n+1)$제곱근과 같아지도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 거듭제곱근의 뜻을 알고 거듭제곱근의 성질을 이용하는 문제해결능력을 묻는 문제이다.

나. α_n과 β_n을 n을 이용하여 거듭제곱근으로 나타내고 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$을 어떤 수의 $n(n+1)$제곱근으로 표현해야 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학 나형 46쪽 10번

$2^x = (\sqrt{5})^y = 3^{-z}$을 만족시키는 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $2yz = y + 2z$가 성립할 때, 4^{x+1}의 값은?

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$

④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 변형하고 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. $2^x = (\sqrt{5})^y = 3^{-z} = k$라 두고 4^{x+1}을 k에 대한 식으로 나타낸 다음 주어진 조건을 이용하면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

지수법칙

$a > 0$, $b > 0$이면 x, y가 실수일 때에도 다음 지수법칙이 성립한다.

① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 1번

$2^0 \times 9^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 83쪽 유제5번

$12 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념을 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 지수법칙을 이용하여 계산하는 문항이다.

문항풀이 Point !!

지수법칙을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 문제 1번

$6\times8^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 83쪽 유제5번

$12\times8^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 지수법칙을 이용하여 계산하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

지수법칙을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2016수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 수학Ⅱ 85쪽 4번 변형

$x=\sqrt[3]{24}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 일 때, $x^3+6x-\dfrac{11}{3}$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항2

2015년 수능완성 수학나형 45쪽 8번 변형

100이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 수 $\sqrt[3]{\dfrac{3^{b+1}}{2^a}}$과 $\sqrt[5]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$이 모두 유리수가 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 43　② 45　③ 47　④ 49　⑤ 51

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 수학 나형 46쪽 11번 변형

실수 m, n에 대하여 $3^{m+2}-3^{m+1}=12\sqrt{2}$, $3^{n}-3^{n-1}=\frac{4}{3}$일 때, $27^{\frac{m}{3}}+9^{\frac{n}{4}}$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 4

④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

풀 이

18 로그

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 수학Ⅱ 93쪽 1번

$10^5 < x < 10^6$, $10 < y < 10^2$인 두 실수 x, y에 대하여 $\log x - \log y$의 값이 정수일 때, $\log \dfrac{x}{y}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

상용로그의 뜻을 알고 로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

상용로그
가. 상용로그의 뜻
10을 밑으로 하는 로그, 즉 $\log_{10} N$ $(N>0)$을 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.
나. 상용로그표
상용로그의 값은 계산기를 사용하거나 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다. 이때, 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다. 일반적으로 임의의 양수 x에 대한 상용로그값을 구할 때에는 x를 $a \times 10^n$ $(1 \le a < 10$, n은 정수$)$으로 나타낸 후 상용로그를 취하여 $n + \log a$로 값을 구할 수 있다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 수학Ⅱ 96쪽 3번

세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = 6$

(나) $a^3 = b^4 = c^6$

$\log_2 a \times \log_2 b \times \log_2 c$의 값은?

① $\frac{40}{9}$ ② $\frac{46}{9}$ ③ $\frac{52}{9}$

④ $\frac{58}{9}$ ⑤ $\frac{64}{9}$

EBS 문항 분석

가. 로그의 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 조건 (나)에서 $a^3 = b^4 = c^6 = k$라 두고 로그의 정의와 성질을 이용하여 a, b, c의 값을 구해야 한다.

다시 보는 개념 !!

로그의 성질

$a>0$, $a \neq 1$, $c>0$, $c \neq 1$, $m>0$, $n>0$일 때,

가. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

나. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

다. $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

라. $\log_a m^r = r\log_a m$ (r는 임의의 실수)

마. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $b>0$)

바. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (단, $b>0$, $b \neq 1$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학 나형 47쪽 14번

$\log_{x-1}x(n-x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합이 207일 때, 자연수 n의 값은?

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

EBS 문항 분석

가. 로그가 정의되기 위한 조건을 알고 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 밑과 진수 조건을 이용하여 x의 범위를 구해야 한다.

다시 보는 개념 !!

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, $a^x=b$를 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재하는데, 이 x를 $\log_a b$로 나타내고, a를 밑으로 하는 b의 로그라고 한다. 이때, a를 밑, b를 진수라고 한다.

$a^x=b \iff x=\log_a b$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학 나형 49쪽 25번

국제민간항공기구(ICAO)에서는 항공기 소음의 평가 단위로 웨클(WECPNL)(dB)을 사용한다.
1일 동안 항공기의 등가 통과횟수가 N이고, 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 L(dB)일 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클 W(dB)의 값은 다음과 같이 계산한다고 한다.

$W = L + 10\log N - k$ (단, k는 상수)

어제 하루 동안 항공기의 등가 통과횟수가 500이고, 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 101(dB)일 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클의 값은 100(dB)이었다. 오늘 하루 동안 항공기의 등가 통과횟수가 631이고 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 102(dB)이었을 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클의 값은? (단, $\log 5.00 = 0.7$, $\log 6.31 = 0.8$로 계산한다.)

① 100 dB ② 101 dB ③ 102 dB
④ 103 dB ⑤ 104 dB

EBS 문항 분석

가. 상용로그를 포함하는 실생활 문제로서 주어진 문제 상황을 이해하고 식의 값을 구하는 외적문제해결능력을 묻는 문제이다.

나. 모의고사나 수능에서 자주 출제되는 유형의 문제이다. 조건에서 주어진 값을 관련된 식에 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 식을 계산하거나 간단히 하면 쉽게 해결되므로 반드시 연습해 두어야 한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 문제 4번

$\log_3 6 - \log_3 2$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 89쪽 유제2번

$\frac{1}{2}\log_3 12 - 2\log_3 2 + \log_3 18$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 로그의 성질을 이용하여 계산하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

로그의 기본 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2016수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 수학II 96쪽 3번 변형

세 양수 a, b, c와 세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 ab + \log_2 bc + \log_2 ca = 20$

(나) $a^x = (\sqrt{b})^y = (\sqrt[3]{c})^z = 32$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능완성 수학 나형 48쪽 21번 변형

이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때,

$\log_{\alpha\beta+1}\left(3+\dfrac{2}{\alpha}+2\beta\right)+\log_{\alpha\beta+1}\left(3+\dfrac{2}{\beta}+2\alpha\right)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3 2015년 수능완성 수학나형 49쪽 24번 변형

어떤 유명 화가의 작품 A의 가격은 매년 1월 1일에 한 번 결정되고, 해마다 전년보다 8% 가격이 상승하며, 일 년간 변동되지 않는다고 한다. 이 화가의 작품 A의 가격이 2012년 가격의 두 배 이상이 되는 것은 언제부터인가?(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 2022년 ② 2023년 ③ 2024년 ④ 2025년 ⑤ 2026년

풀 이

Ⅷ. 순열과 조합

기출 문항 분석

이 단원에서는 중복조합과 이항정리에 관한 문제가 주로 출제되어 왔다. 그러나 교육과정이 바뀜에 따라 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열, 조합, 집합의 분할, 자연수의 분할이 올해부터 출제 범위에 새롭게 포함되었다. 순열과 조합을 이용한 경우의 수를 구하는 문제는 확률을 계산하는데 있어서도 필수적으로 요구되는 내용이다.

합의 법칙과 곱의 법칙을 바탕으로 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열, 조합, 중복조합의 개념을 활용하여 다양한 경우의 수의 문제를 풀어보는 연습이 필요하다. 한 문제에 대하여 그 풀이 방법을 여러 가지로 생각해보고 그 타당성을 짚어보거나 문제의 조건을 바꾸어 풀어보는 것도 문제 해결력을 향상시킬 수 있는 방법이 될 수 있겠다. 이항정리에 관한 문제는 평이한 형태로 자주 출제가 되어 왔으며 집합의 분할과 자연수의 분할도 올해 새롭게 도입된 내용이므로 개념만 잘 이해하면 쉽게 풀 수 있는 문제가 출제될 가능성이 높다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 18번	실생활에 활용된 중복조합의 수를 구할 수 있는지 묻는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 7번	이항정리를 이용하여 전개식의 특정 계수를 구하는 문항(정답형 3점)
2015수능. A형. 18번	중복조합을 이용하여 연립방정식의 해의 개수를 구하는 문항(정답형 4점)
2016수능. A형. 17번	중복조합을 이용하여 방정식의 해의 개수를 구하는 문항(정답형 4점)

19 순열

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 | 2016년 수능특강 확률과 통계 7쪽 예제2번

A, B를 포함한 5명을 일렬로 세울 때, A는 맨 앞에서부터 두 번째 이내에 서고 A와 B는 서로 이웃하게 서는 경우의 수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

EBS 문항 분석

가. 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. A의 위치에 따라 경우를 나누고 각 경우마다 B의 위치를 정하는 경우의 수를 생각한 다음 남은 사람의 위치를 정하는 경우의 수를 순열을 이용하여 구하여 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용한다.
다. 가능한 경우를 체계적으로 분류하여 빠뜨리는 경우가 없도록 유의한다.

다시 보는 개념 !!

가. 합의 법칙
두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.
나. 곱의 법칙
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.
다. 순열
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \le n) $$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능완성 수학(나) 105쪽 7번

원형의 탁자에 남자 어른 3명, 여자 어른 2명, 어린이 3명이 모두 둘러앉을 때, 어린이 3명은 서로 이웃하여 앉고 여자 어른 2명은 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

EBS 문항 분석

가. 원순열과 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.

나. 어린이 3명은 서로 이웃해야 하므로 한 묶음으로 보고 어린이 한 묶음과 남자 어른 3명을 원형으로 배열하는 경우의 수를 원순열을 이용하여 구하고 어린이 3명을 묶음 안에서 배열하는 경우의 수와 여자 어른 2명을 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수를 순열을 이용하여 구한 후 곱의 법칙을 적용한다.

다. 원형의 탁자가 아닌 일렬로 줄 세우는 경우의 수도 생각해 볼 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(n-1)!$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능특강 확률과 통계 14쪽 2번

서로 다른 과일 5개를 네 접시 A, B, C, D에 남김없이 담으려고 할 때, 두 접시 A와 B에는 과일이 한 개씩만 담기는 경우의 수는? (단, 빈 접시가 있어도 된다.)

① 150 ② 160 ③ 170
④ 180 ⑤ 190

EBS 문항 분석

가. 순열과 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.

나. 두 접시 A와 B에 과일을 한 개씩만 담는 경우의 수를 순열을 이용하여 구하고 남은 접시에 남은 과일을 담는 경우의 수를 중복순열을 이용하여 구한 후 곱의 법칙을 적용한다.

다. 빈 접시가 있지 않도록 과일을 담는 경우의 수는 여사건의 경우의 수를 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 중복순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(나) 106쪽 10번

8개의 문자 a, a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하여 만든 문자열 중에서 맨 앞과 맨 뒤에 같은 문자가 나열되는 문자열의 개수는?

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

EBS 문항 분석

가. 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 맨 앞과 맨 뒤에 오는 문자의 종류에 따라 분류한 후 각각의 경우마다 그 사이에 문자를 배열하는 경우의 수를 같은 것이 있는 순열을 이용하여 구한 후 합의 법칙을 적용한다.
다. 원형의 탁자가 아닌 일렬로 줄 세우는 경우의 수도 생각해 볼 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p, q, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 확률과 통계 15쪽 1번 변형

1부터 5까지 자연수가 하나씩 쓰여진 카드 5장에서 서로 다른 3장의 카드를 택하여 일렬로 나열할 때, 3장의 카드에 쓰여진 수의 곱이 짝수인 경우의 수는?

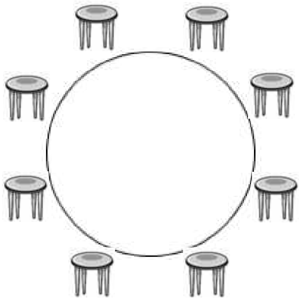
① 36　② 48　③ 50
④ 52　⑤ 54

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 확률과 통계 15쪽 4번 변형

1번부터 8번까지의 학생 8명이 모두 그림과 같은 원형의 탁자에 일정한 간격으로 앉으려고 할 때, 서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합이 모두 9가 되도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학(나) 106쪽 12번 변형

6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열할 때, 모든 이웃한 숫자의 합이 4이하가 되도록 하는 경우의 수는?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

풀 이

02 조합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 | 2016년 수능특강 확률과 통계 26쪽 2번

집합 $S=\{x\,|\,x$는 10이하의 자연수$\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3이고, 이 세 원소의 합이 홀수인 집합의 개수는?

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

EBS 문항 분석

가. 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 세 원소의 합이 홀수가 나오는 경우에 따라 분류한 후 각각의 경우마다 세 원소를 택하는 경우의 수를 조합과 곱의 법칙을 이용하여 구한 다음 합의 법칙을 적용한다.
다. 원소의 합이 짝수인 집합의 개수도 같은 방법으로 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 조합

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$$_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\quad(\text{단, } 0<r\leq n)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능완성 수학(나) 108쪽 16번

서로 다른 7개의 공을 세 상자 A, B, C에 빈 상자가 없도록 남김 없이 나누어 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 620　　② 625　　③ 630
④ 635　　⑤ 640

EBS 문항 분석

가. 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 세 상자에 서로 다른 개수의 공을 넣는 방법을 생각한 후 그 개수만큼 넣을 상자를 정하는 경우의 수를 순열을 이용하여 구하고, 어떤 공을 넣을지를 조합을 이용하여 구한 후 곱의 법칙을 적용한다.
다. 서로 다른 개수의 공을 넣는다는 조건이 없을 경우에는 집합의 분할을 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개의 공을 p개, q개, r개씩 모양과 크기가 같은 세 상자에 담는 방법의 수는 (단, $p+q+r=n$)
① p, q, r가 모두 다를 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r$
② p, q, r중 어느 두 수가 서로 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \frac{1}{2!}$
③ p, q, r가 모두 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \frac{1}{3!}$

나. 서로 다른 n개의 공을 p개, q개, r개씩 서로 다른 세 상자에 담는 방법의 수는 (단, $p+q+r=n$)
① p, q, r가 모두 다를 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times 3!$
② p, q, r중 어느 두 수가 서로 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \frac{1}{2!} \times 3!$
③ p, q, r가 모두 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \frac{1}{3!} \times 3!$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능특강 확률과 통계 27쪽 2번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) < f(2) < f(3)$
(나) $f(4) \le f(5)$

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

EBS 문항 분석

가. 조합과 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. $f(1) < f(2) < f(3)$이 성립하도록 $f(1),\ f(2),\ f(3)$을 정하는 방법의 수를 조합을 이용하여 구하고, $f(4) \le f(5)$이 성립하도록 $f(4),\ f(5)$를 정하는 방법의 수를 중복조합을 이용하여 구한 후 곱의 법칙을 적용한다.

다시 보는 개념 !!

가. 중복조합
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는
$${}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(나) 110쪽 21번

방정식 $x+y+z=12$를 만족시키는 2 이상의 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

EBS 문항 분석

가. 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. $x-2=x'$, $y-2=y'$, $z-2=z'$라 치환하여 중복조합을 이용하여 해의 개수를 구하거나 x, y, z는 2 이상의 자연수이므로 서로 다른 미지수 x, y, z에서 각각 2개씩 우선 뽑았다고 생각하고 6개를 추가로 중복을 허용해서 뽑는 경우의 수를 생각한다.

다시 보는 개념 !!

가. 방정식 $x+y+z=n$ (단, n은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수
$${}_{3}\mathrm{H}_{n}$$
나. 방정식 $x+y+z=n$ (단, n은 3이상의 자연수)를 만족시키는 자연수해의 개수
$${}_{3}\mathrm{H}_{n-3}$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학A형 17번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) a, b, c, d, e 중에서 0의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d+e=10$

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계 기본 88쪽 3번

방정식 $x+y+z+w=15$를 만족시키는 2이상의 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소·확대·변형
나. EBS 문항에서는 미지수 조건이 2이상의 자연수인데 기출 문항에서는 미지수 조건이 음이 아닌 정수로 간단하게 주어졌지만 미지수 중에서 0의 개수가 2라는 조건이 추가되어 문항이 다소 어렵게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 먼저 0이 되는 미지수를 정하는 경우의 수를 조합을 이용하여 구하고 각각의 경우에 대하여 중복조합을 이용하여 나머지 미지수를 정하는 경우의 수를 구하여 곱의 법칙을 적용한다.
나. 방정식 $x+y+z=n$(n은 자연수)를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_n$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 14번

방정식 $x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는?

① 27　② 29　③ 31

④ 33　⑤ 35

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 25쪽 예제4번

방정식 $x+y+z+5w=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z,\ w$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는?

① 40　② 42　③ 44

④ 46　⑤ 48

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS 문항에서는 미지수 조건이 음이 아닌 정수인데 기출 문항에서는 미지수 조건이 양의 정수로 조금 어렵게 주어졌지만 전반적으로 문제의 형태가 유사하고 숫자만 조금 변형하여 출제했다.

문항풀이 Point !!

가. 우선 미지수 w가 될 수 있는 경우를 생각하고 각각의 경우에 대하여 중복조합을 이용하여 나머지 미지수를 정하는 경우의 수를 구하여 합의 법칙을 적용한다.

나. 방정식 $x+y+z=n$(n은 자연수)를 만족시키는 양의 정수의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$ (단, $n \geq 3$)

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 22번

${}_{7}\mathrm{C}_{2}$의 값을 구하시오. [3점]

문항풀이 Point !!

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\mathrm{r}!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\quad (\text{단, } 0<r\leq n)$$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능완성 수학(나)108쪽 17번 변형

1부터 10까지의 10개의 자연수 중에서 서로 다른 네 수를 선택할 때, 네 수의 합과 곱이 모두 짝수인 경우의 수는?

① 90 ② 95 ③ 100
④ 105 ⑤ 110

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 확률과 통계 25쪽 유제8번 변형

방정식 $|a|+|b|+|c|=5$를 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 102 ② 106 ③ 110

④ 114 ⑤ 118

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학(나) 109쪽 19번 변형

A, B, C, D, E 다섯 명에게 각각 한 개 이상 최대 4개까지 같은 빵을 나누어 주려고 한다. A, B, C, D, E가 받게 되는 빵의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 할 때, $a \le b < c \le d \le e$를 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

풀 이

21 이항정리와 분할

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과 통계 31쪽 예제2번

$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은?

① 54 ② 56 ③ 58
④ 60 ⑤ 62

EBS 문항 분석

가. 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구하는 문제이다.

나. $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항 ${}_6\mathrm{C}_r\,(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$이 상수항이 되기 위한 r의 값을 구한 후 일반항에 대입하여 계수를 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능완성 수학(나) 112쪽 27번

$\log_8({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 이항계수의 성질을 이용하여 로그의 값을 구하는 문제이다.
나. ${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6$의 값을 구한 후 로그의 성질을 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항계수의 성질

① ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

② ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

나. 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $m>0$, $n>0$일 때,

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$ ② $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$

③ $\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$ ④ $\log_a m^r=r\log_a m$ (r는 실수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능특강 확률과 통계 35쪽 예제3번
수학(가) 00쪽 00번

서로 다른 연필 5개를 같은 종류의 필통 3개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

EBS 문항 분석

가. 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 서로 다른 연필 5개를 같은 종류의 필통 3개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수가 $S(5,\ 3)$과 같음을 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 원소의 개수가 n인 집합을 $k\,(1 \le k \le n)$개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수를 기호로

$$S(n,\ k)$$

와 같이 나타낸다.

나. 원소의 개수가 n인 집합을 원소의 개수가 $p,\ q,\ r$인 3개의 집합으로 분할하는 경우의 수는 (단, $p+q+r=n$)

① $p,\ q,\ r$가 모두 다를 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r$

② $p,\ q,\ r$중 어느 두 수가 서로 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \dfrac{1}{2!}$

③ $p,\ q,\ r$가 모두 같을 때, ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_r\mathrm{C}_r \times \dfrac{1}{3!}$

다. $S(n,\ k)$의 성질

① $S(n,\ 1)=1,\ S(n,\ n)=1$

② $S(n,\ 2)=2^{n-1}-1$

③ $S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+kS(n-1,\ k)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(나) 113쪽 30번

자연수 12의 분할 중에서 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 자연수의 분할을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 자연수 12의 분할 중에서 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 분할의 수는 자연수 6의 분할 중에서 2개 이상의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할의 수와 같음을 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 자연수 n을 $k(1 \le k \le n)$개의 자연수로 분할하는 경우의 수를 기호로

$$P(n,\ k)$$

와 같이 나타낸다.

나. $P(n,\ k)$의 성질

① $P(n,\ 1)=1,\ P(n,\ n)=1$

② $P(n,\ 2)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$

③ $P(n,\ k)=P(n-1,\ k-1)+P(n-k,\ k)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 6번

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{13}{9}$ ③ $\dfrac{14}{9}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{16}{9}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 38쪽 1번

$\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^4의 계수는?

① -18 ② -16 ③ -14

④ -12 ⑤ -10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS 문항에서 수식만 조금 변형하여 출제했다.

문항풀이 Point !!

가. $\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항 ${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\dfrac{1}{3x}\right)^r$ 의 차수가 2이기 위한 r의 값을 구한 후 일반항에 대입하여 계수를 구한다.

나. 이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + \cdots {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 11번

자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 37쪽 유제8번

자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS 문항에서는 자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수가 자연수 6의 분할의 수와 같음을 파악해야 하지만 기출 문항에서는 자연수 6을 분할하는 방법의 수를 직접적으로 묻고 있어서 문항이 다소 쉽게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 자연수의 분할의 뜻에 따라 중복되거나 빠뜨리는 경우가 없도록 나올 수 있는 경우를 잘 나열해본다.

나. 문제에서 요구하는 분할의 수를 기호로 나타내면 $P(6,\ 2)+P(6,\ 4)+P(6,\ 6)$이고 이를 $P(n,\ k)$의 성질을 이용하여 구할 수도 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2016학년도 대수능 9월 모의평가 수학나형 19번

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 11쪽 예제4번

같은 종류의 공 8개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS 문항에서는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수를 구하는 문제였고 기출 문항에서는 자연수 7을 네 개의 자연수로 분할한 후 각각의 경우에 대하여 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수를 생각하는 문제로 변형되어 다소 어렵게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 자연수의 분할의 뜻에 따라 중복되거나 빠뜨리는 경우가 없도록 나올 수 있는 경우를 잘 나열해본다.

나. 분할 후, n개 중에서 같은 것이 각각 $p, q, \cdots, r$개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)를 이용할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 확률과 통계 31쪽 유제2번 변형

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수가 160일 때, 실수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 확률과 통계 40쪽 4번 변형

서로 다른 종류의 볼펜 7자루를 같은 종류의 필통 5개에 넣을 때, 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 140 ② 145 ③ 150

④ 155 ⑤ 160

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학(나) 113쪽 필수 유형 변형

자연수 6의 분할 중에서 숫자 5가 포함되지 않는 서로 다른 분할의 수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

풀 이

Ⅱ. 확률

기출 문항 분석

이 단원에서는 확률의 덧셈정리, 배반사건, 여사건의 확률, 조건부확률, 곱셈정리, 독립사건 등을 이용하여 주어진 확률로부터 제시된 확률을 구하는 문제와 여러 가지 상황에서 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제가 주로 출제되어 왔다.

확률 단원에서 다루는 확률에 관한 여러 가지 개념과 원리를 잘 이해하고 다양한 문제를 많이 풀어보는 연습이 필요하다. 특히 주어진 확률과 확률의 여러 정리 및 성질을 이용하여 제시된 확률을 구하는 문제와 여러 가지 상황에서 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제는 출제 빈도가 아주 높은 편이므로 관련 기출문제를 충분히 풀어서 대비할 필요가 있다. 이외에도 순열과 조합을 이용한 확률 계산 문제와 독립시행의 확률 문제도 출제될 가능성이 높다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. A형. 7번	두 사건이 서로 독립임을 이용하여 확률을 구하는 문항(단답형 3점)
2014수능. A형. 15번	확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 16번	주어진 확률을 이용하여 조건부확률을 구하는 문항(정답형 4점)
2016수능. A형. 6번	확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문항(정답형 3점)
2016수능. A형. 26번	주어진 상황에서 조건부확률을 구하는 문항(단답형 4점)

04 확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과 통계 47쪽 유제3번

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자. $a+b$와 ab가 모두 짝수일 확률은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{3}{16}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{5}{16}$　⑤ $\frac{3}{8}$

EBS 문항 분석

가. 중복순열을 이용하여 확률을 구하는 문제이다.

나. $a+b$와 ab가 모두 짝수인 필요충분조건이 a, b가 모두 짝수임을 파악하여 a, b가 모두 짝수일 확률을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 수학적 확률

표본공간 S에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능완성 수학(나) 117쪽 5번

서로 다른 6개의 사탕과 서로 다른 3개의 초콜릿을 임의로 3개씩 묶어 3개의 묶음을 만들 때, 각 묶음에는 적어도 한 개의 사탕이 포함되고 각 묶음에 있는 사탕의 개수가 서로 다를 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

EBS 문항 분석

가. 조합을 이용하여 확률을 구하는 문제이다.

나. 각 묶음에는 적어도 한 개의 사탕이 포함되고 각 묶음에 있는 사탕의 개수가 서로 다르기 위해서 사탕을 몇 개씩 나누어야 하는지를 파악하고 각 묶음마다 세 개보다 모자라는 만큼 초콜릿의 개수를 정하고, 그 경우의 수를 구하여 확률을 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 원소의 개수가 n인 집합을 원소의 개수가 p, q, r인 3개의 집합으로 분할하는 경우의 수는 (단, $p+q+r=n$)

① p, q, r가 모두 다를 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}$

② p, q, r중 어느 두 수가 서로 같을 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}\times\frac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같을 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}\times\frac{1}{3!}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능특강 확률과 통계 52쪽 2번

서로 배반사건인 두 사건 A와 B가

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4},\ 2\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$의 값은?

① $\frac{1}{72}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{24}$

④ $\frac{1}{18}$ ⑤ $\frac{5}{72}$

EBS 문항 분석

가. 배반사건의 정의와 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제이다.

나. 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때 성립하는 특수한 덧셈정리를 활용하여 $\mathrm{P}(A\cup B)$를 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 이용하여 나타낸 후 주어진 또 하나의 등식과 연립하여 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$의 값을 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 배반사건

두 사건 A, B가 서로 배반사건 $\Leftrightarrow A\cap B=\phi \Leftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=0$

나. 확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(나) 119쪽 11번

빨간색 볼펜 4개, 파란색 볼펜 3개, 검은색 볼펜 1개가 들어 있는 필통이 있다. 이 필통에서 임의로 3개의 볼펜을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 볼펜이 2개 이상 나올 확률은?

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{14}$

④ $\frac{13}{28}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

EBS 문항 분석

가. 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구하는 문제이다.

나. 3개 중 같은 색의 볼펜이 2개 이상 나오는 사건의 여사건은 3개가 모두 다른 색의 볼펜이 나오는 사건이므로 여사건의 확률을 이용하여 주어진 확률을 쉽게 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 여사건의 확률

사건 A의 여사건 A^C의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항

2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 7번

두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)+P(B)=\frac{7}{9},\quad P(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

일 때, $P(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{7}{18}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{9}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문제의 조건과 상황을 거의 유사하게 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 문제의 조건과 상황을 제시하였다. EBS교재에 있는 문항은 서로 배반인 두 사건에 대한 확률의 덧셈정리와 성질을 활용하여 해결하는 문항이며, 기출문항은 덧셈정리만 이용하는 문항으로 축소 · 변형되었다.

문항풀이 Point !!

확률의 덧셈정리- 두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용하여 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 26번

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때,
꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 51쪽 유제7번

주머니 안에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문제의 조건과 상황을 거의 유사하게 출제
나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 문제의 조건과 상황을 제시하였다. EBS교재에 있는 문항은 짝수 중 두 개의 수를 선택하는 문항이며, 기출문항은 흰 공 중 두 개를 선택하는 문항으로 변형되었다.

문항풀이 Point !!

가. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$ (단, $0<r\le n$) 이다.

나. 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$를 이용한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능완성 수학(나) 116쪽 1번 변형

원형의 탁자에 남자 3명과 여자 3명이 임의로 앉을 때, 남자와 여자가 이웃하지 않도록 앉을 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{15}$

④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 확률과 통계 54쪽 2번 변형

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할 때, 함수 $f(x)$가 일대일함수이거나 $f(1)f(2)f(3)=4$가 성립할 확률은?

① $\dfrac{64}{125}$ ② $\dfrac{66}{125}$ ③ $\dfrac{68}{125}$

④ $\dfrac{14}{25}$ ⑤ $\dfrac{72}{125}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능특강 확률과 통계 53쪽 4번 변형

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-6x+8$에 대하여 $f(a)f(b)\geq 0$일 확률은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{13}{18}$ ③ $\frac{7}{9}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

풀 이

23 조건부확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능완성 수학 나형 120쪽 15번

어느 학교의 전체 학생을 대상으로 등교할 때 이용한 모든 교통수단을 조사하였다. 조사에 참여한 학생 중 지하철을 이용한 학생의 수는 버스를 이용한 학생의 수의 $\frac{7}{8}$이었다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 지하철을 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 버스도 이용하여 등교한 학생일 확률이 $\frac{5}{7}$이다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 버스를 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 지하철도 이용하여 등교한 학생일 확률은? (단, 조사에 참여한 학생 중에는 버스와 지하철을 모두 이용하거나 모두 이용하지 않는 학생이 있을 수 있다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

EBS 문항 분석

가. 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 문제 상황의 관계식과 조건부확률을 구하고, 이를 연립하여 조건부확률을 구한다.

다. 조사에 참여한 전체 학생의 수를 N, 버스를 이용하여 등교한 학생의 수를 n이라 두면 쉽게 해결가능하다.

다시 보는 개념 !!

가. 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B \mid A)$와 같이 나타낸다.

나. 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ (단, $\mathrm{P}(A) > 0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과 통계 66쪽 3번

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A^c \cup B^c)=\frac{13}{16}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^c은 사건 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 문항 분석

가. 두 사건이 서로 독립일 조건을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 식을 변형하고, 여사건의 확률을 구한 다음, 두 사건이 서로 독립일 조건과 주어진 조건식을 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 독립사건

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나거나 일어나지 않는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라 하고, 서로 독립인 두 사건을 독립사건이라고 한다.

나. 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

다. 두 사건 A, B가 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$이고 서로 독립이면

$$A\text{와 } B^c,\ A^c\text{와 } B,\ A^c\text{와 } B^c$$

도 각각 서로 독립이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능특강 확률과 통계 59쪽 3번

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 1개의 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오면 흰 공 1개를 주머니에 넣고, 3 이상의 눈이 나오면 검은 공 1개를 주머니에 넣은 후 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공이 나올 확률은?

① $\frac{22}{45}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{26}{45}$ ④ $\frac{28}{45}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

EBS 문항 분석

가. 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 문제 상황을 두 가지 경우로 나누고, 각각의 경우를 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구한 뒤, 이를 더하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

나. 확률의 곱셈정리의 활용

두 사건 A, B에 대하여 $0<\mathrm{P}(B)<1$일 때,

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+P(B^c)\mathrm{P}(A|B^c)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학 나형 123쪽 22번

1개의 주사위를 3번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수가 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수보다 클 확률은?

① $\frac{19}{27}$ ② $\frac{20}{27}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{23}{27}$

EBS 문항 분석

가. 독립시행의 확률 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 문제 상황을 만족시키는 경우를 나누고, 각각의 확률을 독립시행의 확률을 이용하여 구하고, 이를 더하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 독립시행의 뜻

동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않는 경우, 즉 매번 일어나는 사건이 서로 독립인 경우, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

나. 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p, 사건 A가 일어나지 않을 확률이 q인 독립시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 r번 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r} \quad (\text{단, } p+q=1,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 27번

표와 같이 두 상자 A, B 에는 흰 구슬과 검은 구슬이 섞여서 각각 100개씩 들어 있다.

	상자 A	상자 B
흰 구슬	a	$100-2a$
검은 구슬	$100-a$	$2a$
합계	100	100

(단위 :개)

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰색일 확률이 $\frac{2}{9}$이다. 자연수 a의 값을 구하시오 [4점]

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 67쪽 3번

아래 표와 같이 두 상자 A, B에는 흰 구슬과 검은 구슬을 합하여 각각 100개의 구슬이 들어 있다.

	상자 A	상자 B
흰 구슬	a	$100-2a$
검은 구슬	$100-a$	$2a$
합계	100	100

(단위 : 개)

두 상자 A, B에서 각각 1개의 구슬을 임의로 택할 때, 같은 색의 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이다. 자연수 a의 값을 구하시오. (단, 상자 B에는 흰 구슬이 적어도 1개 들어 있다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문제의 조건과 상황을 거의 유사하게 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 문제의 조건과 상황을 제시하였다. EBS교재에 있는 문항은 서로 독립인 두 사건에 대한 확률의 곱셈정리와 성질을 활용하여 해결하는 문항이며, 기출문항은 조건부확률까지 이용하는 문항으로 확대 · 변형되었다.

문항풀이 Point !!

서로 독립인 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용하고 조건부확률을 구하면 된다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 나형 6번

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{2}{15}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 실전편 27쪽 7번

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^c\,|\,B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B^c\,|\,A)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 조건부확률의 계산과 두 사건이 서로 독립일 조건을 활용하여 해결하는 문항이며, 기출문항은 조건부확률의 계산만 이용하면 해결되는 문항으로 축소 · 변형되었다.

문항풀이 Point !!

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용하면 된다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 나형 26번

어느 회사의 직원은 모두 60명이고, 각 직원은 두 개의 부서 A, B 중 한 부서에 속해 있다. 이 회사의 A 부서는 20명, B 부서는 40명의 직원으로 구성되어 있다. 이 회사의 A 부서에 속해 있는 직원의 50%가 여성이다. 이 회사 여성 직원의 60%가 B 부서에 속해 있다. 이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서에 속해 있을 때, 이 직원이 여성일 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오. [4점]

EBS 교재 2015 수능완성 수학 A형 유형편 131쪽 22번

어느 고등학교의 3학년 학생은 남학생이 100명, 여학생이 100명이다. 이 고등학교 3학년 학생 중에서 대학수학능력시험에 수학 A형을 응시한 학생은 전체의 60%이고, 나머지 학생은 수학 B형을 응시하였다. 이 고등학교의 3학년 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 수학 A형을 응시한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률이 $\frac{1}{3}$이다. 이 고등학교 3학년 학생 중 수학 B형을 응시한 여학생의 수는? (단, 수학 A형 또는 수학 B형에 응시하지 않은 학생은 없다.)

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

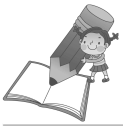
EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 자료와 상황을 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재에 있는 문항 모두 특정 집단의 비율과 관련한 자료를 제시하고 조건부확률을 활용하여 물음에 답하도록 하고 있다. 이와 같은 문제는 특정 집단에 속한 사람 수를 직접 구하여 쉽게 해결할 수도 있다.

문항풀이 Point !!

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용하면 된다. 그리고 특정 집단에 속한 사람 수를 직접 구하면 쉽게 해결가능하다.



EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 13번

어느 학급 학생 20명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 각 학생이 선택한 과목별 인원수는 다음과 같다. (단위: 명)

구분	과목 A	과목 B	합계
남학생	33	7	10
여학생	5	5	10
합계	8	12	20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 유형편 120쪽 13번

어느 학교의 학생 70 명은 과학전시관과 민속마을로 체험학습을 다녀왔다. 체험학습에 참가한 70 명의 학생은 각각 과학전시관과 민속마을 중에서 한 곳을 선택하여 다녀왔고 선택한 장소와 인원수는 다음 표와 같다. (단위 : 명)

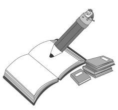
	과학전시관	민속마을	계
남학생	14	20	34
여학생	21	15	36
계	35	35	70

체험학습에 참가한 70 명 중에서 임의로 선택한 한 학생이 민속마을을 다녀왔을 때, 이 학생이 남학생일 확률은 p 이다. $7p$ 의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재에 있는 문항 모두 특정 집단의 확률과 관련한 자료를 제시하고 조건부확률을 활용하여 물음에 답하도록 하고 있다.



문항풀이 Point !!

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(A)}$ 임을 이용하면 된다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능완성 수학 나형 120쪽 13번 변형

어느 학교의 학생 70명은 과학전시관과 민속마을로 체험학습을 다녀왔다. 체험학습에 참가한 70명의 학생은 각각 과학전시관과 민속마을 중에서 한 곳을 선택하여 다녀왔고 선택한 장소와 인원 수는 다음 표와 같다.

	과학전시관	민속마을	계
남학생	14	20	34
여학생	21	15	36
계	35	35	70

체험학습에 참가한 70명 중에서 임의로 선택한 한 학생이 남학생이었을 때, 이 학생이 민속마을을 다녀왔을 확률은 p이다. $17p$의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2　　2016 수능완성 수학 나형 121쪽 16번 변형

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^c \mid A) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\mathrm{P}(A^c)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.)

① $\frac{7}{16}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{9}{16}$　④ $\frac{5}{8}$　⑤ $\frac{11}{16}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능특강 확률과 통계 67쪽 4번 변형

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수이면 한 개의 동전을 3번 던지고, 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수이면 한 개의 동전을 4번 던지기로 하였다. 이러한 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 때, 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수일 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

풀 이

X. 통계

기출 문항 분석

이 단원에서는 매년 3문항이 출제되었으며, 2016학년도 수능에서도 정답형 2문항과 단답형 1문항(총 3문항)이 출제되었다. 같은 수학적 내용을 반복적으로 출제하므로 유형이 정형화 되어 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 출제 내용을 살펴보면, 이산확률분포에서는 이산확률변수와 확률질량함수를 이해하고, 확률분포표를 이용한 평균, 분산, 표준편차 등을 구하거나, $aX+b$ 꼴의 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 등을 구하는 문제, 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다. 또한 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 구하는 문제도 출제되었다. 연속확률분포에서는 연속확률변수와 확률밀도함수를 이해하고, 적분을 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하거나, 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하는 문제가 출제되었다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능, A형, 9번	이항분포의 평균과 분산을 구하는 문항 (정답형 3점)
2014수능, A형, 12번	표준정규분포를 이용하여 표본평균을 구하는 문항 (정답형 3점)
2014수능, A형, 27번	이산확률변수의 평균을 구하는 문항 (단답형 4점)
2015수능, A형, 12번	표준정규분포를 이용하여 표본평균을 구하는 문항 (정답형 3점)
2015수능, A형, 25번	이항분포의 평균과 분산을 구하는 문항 (단답형 3점)
2015수능, A형, 27번	확률밀도함수에서의 확률을 구하는 문항 (단답형 4점)
2016수능, A형, 9번	표본평균의 표준편차를 구하는 문항 (정답형 3점)
2016수능, A형, 12번	표준정규분포를 이용하여 표본평균을 구하는 문항 (단답형 3점)
2016수능, A형, 25번	이산확률변수의 평균을 구하는 문항 (단답형 3점)

24 이산확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1　　2016년 수능특강 확률과 통계 77쪽 6번

확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, $\mathrm{E}(4X+2)$의 값은? (단, a는 양수이다.)

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수의 평균을 구하는 문제이다.

나. 확률질량함수의 성질을 이용하여 a의 값을 구하고, 확률변수 X의 평균을 구한 다음, $aX+b$꼴의 확률변수의 평균을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

1) $0\le \mathrm{P}(X=x_i)=p_i\le 1$　　2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j}p_i$ (단, $i,j=1,2,3,\cdots,n$이고 $i\le j$)

나. 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$일 때,

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$$

을 이산확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고 $\mathrm{E}(X)$와 같이 나타낸다.

다. 확률변수 X와 두 상수 a,b $(a\ne 0)$에 대하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$　　2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과 통계 81쪽 3번

확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x\, p^x\,(1-p)^{25-x}\quad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

확률변수 X의 평균이 5일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? (단, $0<p<1$이다.)

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

EBS 문항 분석

가. 이항분포의 평균과 분산을 이용하여 해결하는 문제이다.
나. 주어진 확률질량함수를 통해 확률변수 X가 이항분포임을 이해하고, 이항분포의 평균과 분산을 구하는 식을 이용하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}\quad (\text{단, } x=0,1,2,\cdots,n,\ q=1-p)$$

이다. 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,p)$와 같이 나타낸다.

나. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때

1) 평균 : $\mathrm{E}(X)=np$
2) 분산 : $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)
3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학 나형 128쪽 5번

검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 n개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 흰 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \le 1) = \frac{6}{7}$일 때, n의 값은? (단, n은 2이상의 자연수이다.)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수와 확률질량함수를 이해하여 확률을 구하는 문제이다.

나. 주머니에서 임의로 2개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 나올 수 있는 흰 돌의 개수는 $0, 1, 2$이므로 $\mathrm{P}(X \le 1)$일 확률은 $1 - \mathrm{P}(X=2)$와 같음을 이해하면 쉽게 해결가능하다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i) = p_i \,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

1) $0 \le \mathrm{P}(X=x_i) = p_i \le 1$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

3) $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j) = \displaystyle\sum_{k=i}^{j} \mathrm{P}(X=x_k) = \sum_{k=i}^{j} p_i$ (단, $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$이고 $i \le j$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학 나형 130쪽 11번

주머니 안에 숫자 1이 적혀 있는 흰 공 3개, 숫자 -1이 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 1　　② $\frac{6}{5}$　　③ $\frac{7}{5}$　　④ $\frac{8}{5}$　　⑤ $\frac{9}{5}$

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수의 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 주어진 확률변수 X와 X의 확률질량함수를 구하고, 이를 통해 분산을 구한다.
다. 확률변수 X의 확률분포표를 작성하면 보다 정확하게 해결가능하다.

다시 보는 개념 !!

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때,

가. 평균 : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

나. 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

다. 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 나형 25번

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-5	0	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

$\mathrm{E}(4X+3)$의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계 기본 109쪽 예제 3번

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(30X+5)$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 유사한 표를 제시하고 동일한 개념을 묻고 있다. 숫자만 바뀌었을 뿐 풀이과정이 동일하다고 볼 수 있는 변형 문제이다.

문항풀이 Point !!

주어진 확률분포표를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 구하고, $aX+b$ 꼴의 확률변수의 평균을 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 18번

1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $E(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 4$)

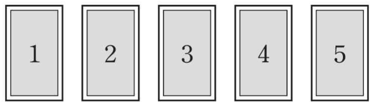
> 자연수 $k\,(4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{(가)}}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}$$
>
> 이다. 자연수 $r\,(1 \leq r \leq k)$에 대하여
>
> $${}_{k}\mathrm{C}_{r}=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
>
> 이므로
>
> $$k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)\\&=\frac{4}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}\end{aligned}$$
>
> 이다.
>
> $$\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_{5}$$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 81쪽 1번

그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 3장을 뽑아 크기순으로 배열할 때, 가운데 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?



① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념과 유사한 원리를 활용하였고, EBS교재에서는 분산을 구하는 문제를 기출문항에서는 평균을 구하는 문제로 축소·변형되었다.

문항풀이 Point !!

가. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ (단, $0 < r \le n$) 이다.

나. 수학적 확률 $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$를 이용한다.

다. 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i \, (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$일 때,

평균 $\mathrm{E}(X) = m = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$을 이용

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능완성 수학 나형 130쪽 9번 변형

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $-2, -1, 1, 2$이고 $\mathrm{P}(X=-x)=\mathrm{P}(X=x)$ $(x=1, 2)$가 성립한다. $\mathrm{V}(X)=2$일 때, $\mathrm{P}(|X|>1)$의 값은?

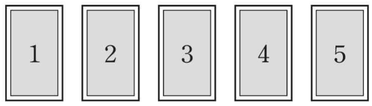
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 확률과 통계 81쪽 1번 변형

그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 3장을 뽑아 크기순으로 배열할 때, 가운데 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(5X)$의 값을 구하시오.



풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학 나형 133쪽 23번 변형

어느 지역에 있는 단풍나무의 단풍 색을 조사한 것을 표로 나타내면 다음과 같다.

단풍 색	갈색	적색	황색	기타
비율	0.2	0.3	0.4	0.1

이 지역에 있는 단풍나무 중에서 100그루를 임의추출하여 단풍나무의 단풍 색을 조사하였을 때, 단풍 색이 적색인 단풍나무의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? (단, 한 그루의 단풍나무는 한 가지 색의 단풍 색을 갖는다.)

① 901 ② 911 ③ 921 ④ 931 ⑤ 941

풀 이

25 정규분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과 통계 93쪽 1번

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 6$이고, 확률변수 X와 그 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3+x) = f(3-x)$

(나) $0 \le x \le 3$인 실수 x에 대하여 $\mathrm{P}(x \le X \le 3) = a - \dfrac{x^2}{18}$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 5)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{13}{18}$ ③ $\dfrac{7}{9}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ $\dfrac{8}{9}$

EBS 문항 분석

가. 확률밀도함수를 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 확률밀도함수가 $x=3$에 대칭이라는 것을 이해하고, 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $a \le X \le b$이고, 이 범위에서 함수 $f(x)$가 다음과 같은 세 가지 성질을 가질 때, 함수 $f(x)$를 확률밀도함수라고 한다. 이때 확률변수 X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

가. $f(x) \ge 0$

나. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

다. $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha, x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \le \alpha \le \beta \le b$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과 통계 89쪽 5번

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 2^2)$을 따를 때,

$\mathrm{P}(X \geq a) = 0.8413$,

$\mathrm{P}(X \leq b) = 0.9332$

를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

EBS 문항 분석

가. 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는 지 묻는 문제이다.
나. 확률변수의 표준화를 하고, 주어진 표준정규분포표를 이용하여 미지의 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률변수의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때

1) 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다. 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 변환하는 것을 확률변수 X를 표준화한다고 한다.

2) $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 136쪽 30번

어느 무인항공기를 만드는 회사에서 생산되는 드론이 한 번 충전으로 비행할 수 있는 시간은 평균이 20분, 표준편차가 2분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 드론 한 대를 임의로 선택할 때, 이 드론이 한 번 충전으로 비행할 수 있는 시간이 t분 이상일 확률이 0.9332이다. t의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

EBS 문항 분석

가. 정규분포를 따르는 확률변수의 특정구간에서의 확률을 구하는 문제이다.

나. 정규분포를 새로운 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$의 변수 범위로 바꾼다.

다. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 새로운 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$을 따른다.

나. $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \le X \le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(나) 137쪽 34번

어느 지역 학생 중에서 지난 한 달 동안 수영장에 가본 학생의 비율이 0.2라 한다. 이 지역 학생 중에서 225명을 임의 추출할 때, 지난 한 달 동안 수영장에 가본 학생이 36명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하고 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.2183 ⑤ 0.3085

EBS 문항 분석

가. 독립시행의 횟수가 충분히 큰 경우 정규분포를 따르므로 이항분포에서의 평균과 표준편차를 구하여 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 확인한다.

나. 정규분포를 새로운 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$의 변수 범위로 바꾼다.

다. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다

다시 보는 개념 !!

가. 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 n회 반복 시행할 때, 사건A가 일어날 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같은 독립시행확률을 따른다. 이와 같은 확률분포를 이항분포라 하고, $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸다.

$\mathrm{P}(X=r)={}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q=1-p,\ r=0,\ 1, 2,\ \cdots,\ n$)

나. 평균, 분산, 표준편차의 성질

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ ($a,\ b$ 는 상수), (2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$,

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

다. 확률변수X 의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty)$로 주어질 때 X 의 확률분포를 정규분포라 하고 $N(m,\ \sigma^2)$으로 나타낸다. 표준정규분포는 $N(0,\ 1^2)$을 따른다.

EBS 기출분석 1

기출 문항

2016학년도 대수능 수학 나형 12번

어느 쌀 모으기 행사에 참여한 각 학생이 기부한 쌀의 무게는 평균이 1.5kg, 표준편차가 0.2kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 행사에 참여한 학생 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 학생이 기부한 쌀의 무게가 1.3kg 이상이고 1.8kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599

① 0.8543 ② 0.8012 ③ 0.7745
④ 0.7357 ⑤ 0.6826

EBS 교재

2015 수능특강 미적분과 통계 기본 122쪽 4번

어느 회사 전체 직원들의 직무능력평가 시험 점수는 평균이 800점, 표준편차가 25점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사 직원 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 직원의 직무능력 평가 시험 점수가 850점 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.1587 ② 0.0668 ③ 0.0228
④ 0.0124 ⑤ 0.0062

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으며 상황만 바뀌었을 뿐 풀이과정이 동일한 변형 문제이다.

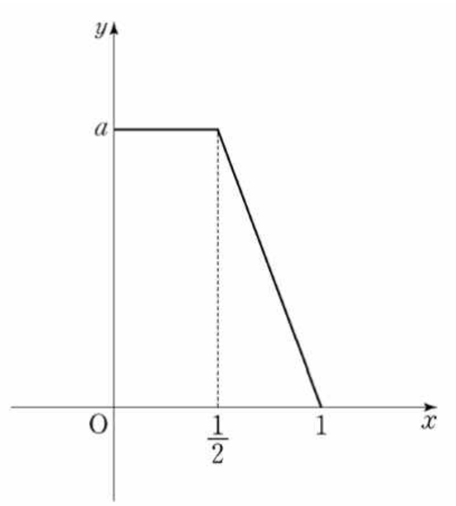
문항풀이 Point !!

확률변수의 표준화를 하고, 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항   2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학 나형 11번

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 1$이고,
X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

EBS 교재   2016 수능특강 확률과 통계 92쪽 2번

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$이고, 두 양수 a, b에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax+b$이다. $\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재에 있는 문항 모두 확률밀도함수를 구하여 물음에 답하도록 하고 있다. 확률밀도함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

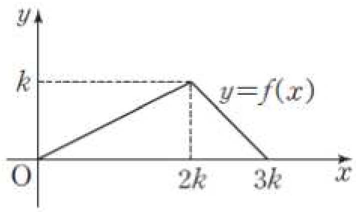
문항풀이 Point !!

주어진 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1임을 이용.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능완성 수학 나형 134쪽 24번 변형

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 3k$이고, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \ge k^2)$의 값은? (단, $k>0$)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능완성 수학 나형 135쪽 28번 변형

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le 99) = 0.9332$
(나) $\mathrm{P}(X \le 77) = \mathrm{P}(X \ge 103)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $m+\sigma$의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능특강 확률과 통계 93쪽 3번 변형

어느 자격시험의 점수는 정규분포 $N(76,\ 10^2)$을 따르고, 시험 점수가 90점 이상이면 1급 자격을 얻는다고 한다. 이 자격시험에 응시한 갑이 1급 자격을 얻었을 때, 갑의 시험 점수가 92점 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.2	0.3849
1.3	0.4032
1.4	0.4192
1.5	0.4332
1.6	0.4452

① $\frac{137}{202}$　② $\frac{69}{101}$　③ $\frac{139}{202}$　④ $\frac{70}{101}$　⑤ $\frac{141}{202}$

풀 이

26 통계적추정

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 확률과 통계 108쪽 1번

어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$ 의 값은?

① $\frac{51}{2}$ ② 26 ③ $\frac{53}{2}$ ④ 27 ⑤ $\frac{55}{2}$

EBS 문항 분석

가. 이산분포표를 보고 평균과 분산을 구할 수 있어야 한다.

나. 이산분포를 따르는 모집단에서 크기가 정해진 표본을 추출하였을 때, 모평균과 표본평균의 관계, 모분산과 표본분산을 알 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 모평균 m, 모분산 σ^2 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m$ (2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ (3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능완성 수학 (나) 139쪽 42번

어느 공항을 이용하는 각 손님들의 여행용 가방의 무게는 평균이 18kg, 표준편차가 2kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항을 이용하는 손님들 중에서 임의추출한 16명의 여행용 가방의 무게의 표본평균이 17.5kg 이상 19kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 각 손님들은 오직 1개의 여행용 가방을 가지고 있다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.6687 ② 0.6826 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.8664

EBS 문항 분석

가. 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 정해진 표본을 추출하였을 때, 모평균과 표본평균의 관계를 알 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 모평균 m, 모분산 σ^2 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여

(1) $E(\overline{X}) = m$ (2) $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ (3) $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(4) 표본의 크기n이 충분히 큰 수이면$\overline{X}$의 분포는 정규분포$\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워지다.

(5) 모집단이 정규분포일 때에는 n 의 크기에 관계없이 $\overline{X}$ 의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(나) 141쪽 48번

어느 광역버스를 이용하는 각 손님들의 광역버스 하루 이용 시간은 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 광역버스를 이용하는 손님 중에서 100명을 임의추출하여 조사하였더니 광역 버스 하루 이용 시간의 평균이 60분이었다. 이 광역버스를 이용하는 손님들 전체의 광역버스 하루 이용 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① $56.08 \leq m \leq 63.92$　　② $57.06 \leq m \leq 62.94$

③ $58.04 \leq m \leq 61.96$　　④ $58.54 \leq m \leq 61.46$

⑤ $59.02 \leq m \leq 60.98$

EBS 문항 분석

가. 모평균의 추정을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

나. 모집단의 분포가 정규분포를 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 실제로 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간을 구할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 추정

모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 근거로 하여 모집단의 어떤 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

나. 모평균의 신뢰구간

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 실제로 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

(1) 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\overline{x} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\overline{x} - 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능특강 확률과 통계 108쪽 3번

어느 지역의 고등학교 학생 중 10%는 아침식사를 거르고 등교한다고 한다. 이 지역의 고등학생 중 100명을 임의추출하여 조사할 때, 아침식사를 거르고 등교하는 학생의 비율이 0.07이상 0.16이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.6826　② 0.7745　③ 0.8185
④ 0.9104　⑤ 0.9542

EBS 문항 분석

가. 표본비율의 확률분포를 구할 수 있는 묻는 문제이다.

나. 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$를 따르고, $Z = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 것을 이해한다.

다시 보는 개념 !!

가. 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 다음이 성립한다. (단, $q=1-p$)

(1) $\mathrm{E}(\hat{p}) = p$

(2) $\mathrm{V}(\hat{p}) = \dfrac{pq}{n}$

(3) $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

나. 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고, $Z = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다. (단, $0<p<1, q=1-p$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 나형 9번

모표준편차가 14인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\sigma(\overline{X})=2$일 때, n의 값은? [3점]

① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

EBS 교재 2015 수능특강 미적분과 통계 기본 132쪽 3번

정규분포 $\mathrm{N}(48, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$\mathrm{P}(\overline{X} \le 43) = \mathrm{P}(Z \ge 2)$일 때, 모표준편차 σ의 값은? (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.)

① 11.5 ② 12 ③ 12.5 ④ 13 ⑤ 13.5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문제를 축소 변형하여 출제

나. EBS교재의 문항은 표본평균의 평균과 표준편차를 구하고, 표본평균의 분포까지 이해해야 하는 문제였으나, 기출문항은 표본평균의 표준편차만 이해하면 해결되도록 축소 변형하여 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 모평균 m, 모분산 σ^2 인 모집단에서 크키가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m$　　(2) $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(4) 표본의 크기n이 충분히 큰 수이면$\overline{X}$의 분포는 정규분포$\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워지다.

(5) 모집단이 정규분포일 때에는 n 의 크기에 관계없이 $\overline{X}$ 의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 확률과 통계 109쪽 1번 변형

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단이 있다. 이 모집단에서 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 같은 모집단에서 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})$

ㄴ. 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $n_1 < n_2$이면 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크다.

ㄷ. $m < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le a) > \mathrm{P}(m \le \overline{Y} \le b)$이면 $n_1 > n_2$이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 확률과 통계 106쪽 3번 변형

1, 3, 5, 7이 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 공 1개를 꺼내 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는 시행을 25회 반복한다. 꺼낸 공에 적힌 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\sigma(5\overline{X}+1)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학 나형 143쪽 필수유형 변형

어느 도시의 시민 중에서 300 명을 임의추출하여 수학축전 개최의견을 조사하였더니 찬성자가 225 명이었다고 할 때, 이 도시 전체 시민의 찬성률 p에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.)

① $0.7037 \le p \le 0.7963$ ② $0.7010 \le p \le 0.7990$ ③ $0.6983 \le p \le 0.8017$
④ $0.6956 \le p \le 0.8044$ ⑤ $0.6929 \le p \le 0.8071$

풀 이

Ⅰ. 집합과 명제

01. 집합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

이차부등식 $x^2-x-6\le 0$,

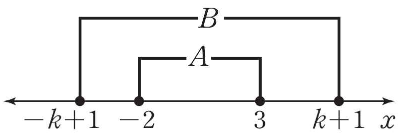
즉 $(x+2)(x-3)\le 0$의 해는 $-2\le x\le 3$

따라서 $A=\{x\mid -2\le x\le 3\}$

부등식 $|x-1|\le k$의 해는 $-k\le x-1\le k$에서

$-k+1\le x\le k+1$

따라서 $B=\{x\mid -k+1\le x\le k+1\}$



$A\subset B$가 성립하려면

$-k+1\le -2$이고 $k+1\ge 3$

이어야 한다.

즉, $k\ge 3$이고 $k\ge 2$이어야 하므로

$k\ge 3$

따라서 양수 k의 최솟값은 3이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 110

어느 고등학교의 학생 300명의 집합을 전체집합 U라 하고 오르고 싶은 산으로 설악산, 지리산, 한라산을 선택한 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하자.

(가)에서 $n(A)=120$, $n(B)=160$

설악산과 지리산 중 어느 산도 선택하지 않은 학생들의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로 (나)에서

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=80$

이때 $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$80=300-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)=300-80=220$

설악산과 지리산을 모두 선택한 학생들의 집합은 $A\cap B$이므로 설악산과 지리산을 모두 선택한 학생의 수는

$a=n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=120+160-220=60$

한라산만 선택한 학생들의 집합은 $C-(A\cup B)$이므로 (다)에서 한라산만 선택한 학생의 수는

$n(C-(A\cup B))$

$=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$ ……㉠

$=30$

$n(A\cup B\cup C)=30+220=250$

이때 3개의 산 중 어느 것도 선택하지 않은 학생들의 집합은 $(A\cup B\cup C)^C$이므로

$b=n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)=300-250=50$

따라서 $a+b=60+50=110$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

ㄱ. $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

따라서 $A\cup B=B$ (참)

ㄴ. [반례] $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2\}$에 대하여

$(A\cup B)\cap C=\{1,2,3\}\cap\{2\}=\{2\}$

$A\cup(B\cap C)=\{1,2\}\cup\{2\}=\{1,2\}$이므로

$(A\cup B)\cap C\ne A\cup(B\cap C)$ (거짓)

ㄷ. $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$A=\{1,2,3,6,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$에서

$B-A=\{4,5\}$

$(B-A)\cup X=X$에서 $(B-A)\subset X$

$B\cup X=B$에서 $X\subset B$이므로

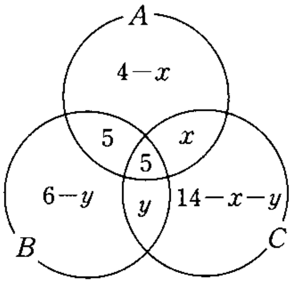
$\{4,5\}\subset X\subset B$

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 4, 5를 반드시 포함하는 집합이므로 집합 X의 개수는 $2^4=16$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] 4

주어진 조건을 이용하여 벤 다이어그램을 나타내면 그림과 같다.



$4-x \geq 0,\ 6-y \geq 0$이므로 $x \leq 4,\ y \leq 6$

$n(C-(A\cup B)) = 14-x-y$

$= 14-\{x+y\} \geq 14-10=4$

따라서 $n(C-(A\cup B))$의 최솟값은 4이다.

EBS연계 기출문항 2

[정답] ⑤

ㄱ. $A(3)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$이므로 $1\in A(3)$

ㄴ. $A(6)=\{6\}$이므로 $A(6)\not\subset A(3)$

ㄷ. 집합 $A(3^n)$ 중에서 $n=3$인 경우

$A(3^3)=A(27)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$이므로

$A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

따라서 $n(A\cup B)=7$

EBS교재

[정답] $A\cup B=\{1,3,4,5\}$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ①

$B^C=\{2,4,6,8,10\}$

$A^C=\{4,5,7,8,9,10\}$

$B^C-A^C=\{2,6\}$

따라서 B^C-A^C의 모든 원소의 합은 8이다.

[다른 풀이]

$B^C-A^C=B^C\cap A=A-B=\{2,6\}$

따라서 B^C-A^C의 모든 원소의 합은 8이다.

.

EBS교재

[정답]12

$(B-A)^c-B^c=(B\cap A^c)^c\cap(B^c)^c$

$=(B^c\cup A)\cap B$

$=B\cap(A\cup B^c)$

$=(B\cap A)\cup(B\cap B^c)$

$=(B\cap A)\cup\varnothing$

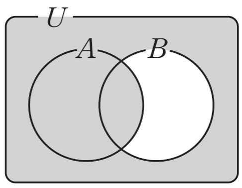
$=B\cap A$

$=\{5,\ 7\}$

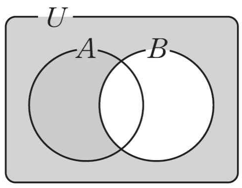
따라서 집합 $(B-A)^C-B^C=\{5,\ 7\}$의 모든 원소의 합은 $5+7=12$

[다른 풀이]

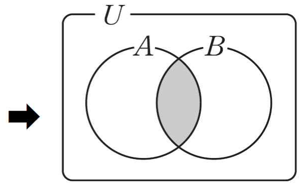
집합 $(B-A)^c-B^c$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$(B-A)^c$



B^c



$(B-A)^c-B^c$

따라서 $(B-A)^C-B^C=A\cap B=\{5,\ 7\}$이므로 집합 $(B-A)^C-B^C$의 모든 원소의 합은 $5+7=12$

EBS연계 기출문항 5

[정답] 8개

$X\cup A=X$ 이므로 $A\subset X$ 이고,

$X\cap B^C=X$ 이므로 $X\subset B^C$ 이다.

따라서 $A\subset X\subset B^C$ 이므로 집합 X는 원소

1, 2를 반드시 포함하는 집합 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^3 = 8$이다.

EBS교재

[정답] ③

$A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 서 $B - A = \{4, 5\}$

$(B - A) \cup X = X$에서 $(B - A) \subset X$

$B \cup X = B$에서 $X \subset B$이므로 $\{4, 5\} \subset X \subset B$

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 4, 5를 반드시 포함하는 집합이므로 집합 X의 개수는 $2^4 = 16$이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$A \cap B^c = A$ 이므로 $A \cap B = \varnothing$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

원소 1을 포함하는 부분집합의 개수는 ${}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$개다. 원소 $2, 3, \cdots, 10$을 포함하는 부분집합의 개수도 똑같이 36개씩 있다.

그러므로 원소의 개수가 3개인 부분집합들의 원소의 총합은

$36(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = 36 \times 55 = 1{,}980$

이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$k = 10$이므로 $y \le -2x + 20$,

$y \le -\dfrac{1}{2}x + 10$ 를 동시에 만족하는 자연수 (x, y)의 개수를 구하면 된다.

두 직선 $y = -2x + 20$, $y = -\dfrac{1}{2}x + 10$의 교점이 $\left(\dfrac{20}{3}, \dfrac{20}{3}\right)$이다. 따라서 $x = 1$에서 $x = 6$까지는 $y = -\dfrac{1}{2}x + 10$와 x축 사이의 자연수 점의 개수를 구하고, $x = 7$부터 $x = 9$까지는 $y = -2x + 20$와 x축 사이의 자연수 점의 개수를 구한다. 따라서

$x = 1$일 때, $(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 9)$ $\therefore$ 9개

$x = 2$일 때, $(2, 1), (2, 2), \cdots, (2, 9)$ $\therefore$ 9개

$x = 3$일 때, $(3, 1), (3, 2), \cdots, (3, 8)$ $\therefore$ 8개

$x = 4$일 때, $(4, 1), (4, 2), \cdots, (4, 8)$ $\therefore$ 8개

$x = 5$일 때, $(5, 1), (5, 2), \cdots, (5, 7)$ $\therefore$ 7개

$x = 6$일 때, $(6, 1), (6, 2), \cdots, (6, 7)$ $\therefore$ 7개

$x = 7$일 때, $(7, 1), (7, 2), \cdots, (7, 6)$ $\therefore$ 6개

$x = 8$일 때, $(8, 1), (8, 2), \cdots, (8, 4)$ $\therefore$ 4개

$x = 9$일 때, $(9, 1), (9, 2)$ $\therefore$ 2개

이다. 그러므로

$n(A_{10} \cap B_{10}) = 2 + 4 + 6 + 2(7 + 8 + 9) = 60$

02. 명제

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

명제 $p \to r$의 역은 $r \to p$이므로 조건(가)에서 명제 $r \to p$는 참이다.

명제 $\sim r \to q$의 대우는 $\sim q \to r$이므로 조건(나)에서 $\sim q \to r$는 참이다.

따라서 $\sim q \to r$, $r \to p$가 참이므로 명제 $\sim q \to p$도 참이다.

한편 참인 세 명제 $r \to p$, $\sim q \to r$, $\sim q \to p$의 각각의 대우

$\sim p \to \sim r$, $\sim r \to q$, $\sim p \to q$도 모두 참이므로 주어진 명제 중 참인 것은 ④이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 17

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자

k가 자연수이므로 $x^2 < k$에서

$P = \{x \mid -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}\}$

$|x-5| \le 1$ 에서 $-1 \le x-5 \le 1$ 이므로

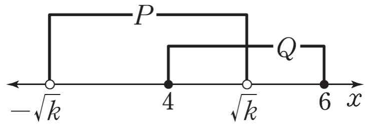
$Q=\{x|4 \le x \le 6\}$

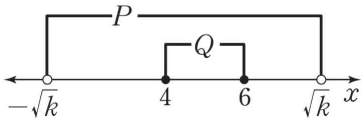
조건 'p 이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$ 이고

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 p 이고 q 이다.'가 참이므로 $P\cap Q \ne \varnothing$ 이어야 한다.

이때 $-\sqrt{k}<0$ 이므로 $P\cap Q \ne \varnothing$ 이려면

$\sqrt{k}>4$ 이어야 한다.





따라서 $k>16$ 이어야 하므로 자연수 k 의 최솟값은 17 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 40

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$p : 2x-5 \ge 7$에서$x \ge 6$이므로

$P=\{x \mid x \ge 6\}$

$r : x^2-9x>10,\ x^2-9x-10>0$

$(x-10)(x+1)>0$ 에서

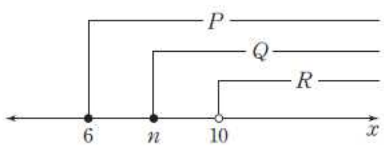
$x<-1$ 또는 $x>10$

이때 $x>0$이므로 $R=\{x \mid x>10\}$

q는 p이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P$

r는 q이기 위한 충분조건이므로 $R \subset Q$

이므로 $R \subset Q \subset P$



$6 \le n \le 10$이므로 자연수 n의 값은

6, 7, 8, 9, 10이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$6+7+8+9+10=40$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$f_n(x)=nx+\dfrac{4n}{x}+2\ (x>0)$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에서

$nx+\dfrac{4n}{x} \ge 2\sqrt{nx \times \dfrac{4n}{x}}=2\times 2n=4n$

(단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

$f_n(x) \ge 4n+2$이므로

$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$

$\ge (4\times1+2)+(4\times2+2)+(4\times3+2)$

$=6+10+14=30$

따라서 구하는 최솟값은 30이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

두 집합 $A=\{x|(x-a)(x+a)\le 0\}$,

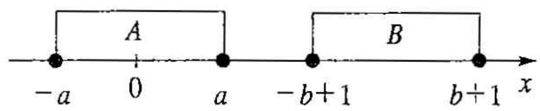
$B=\{x||x-1|\le b\}$에서 $A\cap B=\phi$ 이므로

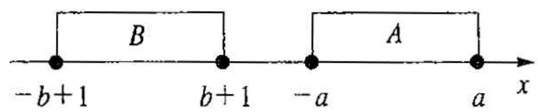
2가지 경우로 나누어 보면

① $a<1-b$ 이므로 $a+b<1$

② a, b는 양의 실수이므로 항상 $1+b>-a$ 이다.

그러므로 그림과 같이 나올 수도 있다.





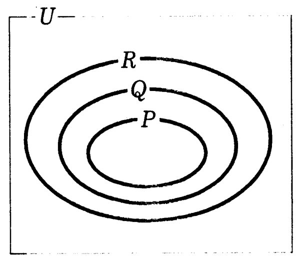
따라서 ①, ②에 의해서 $a+b<1$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③

$p \to q$에서 $P\subset R$이고, $q \to r$에서 $P\subset R$이다.

이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



따라서, 참인 것은 ㉠, ㉢이다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

주어진 조건이 참인 명제가 되려면 모든 양의 실수 x에 대하여 $x > a-4$가 되어야 하므로

$a-4 \le 0$, 즉, $a \le 4$이다.

$\therefore$ 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 $1, 2, 3, 4$이고 자연수 a의 개수는 4이다.

EBS교재

[정답] ④

주어진 명제가 참이 되려면 조건 '$2x^2-2kx+3k>0$'의

진리집합이 실수 전체의 집합이어야 하므로 이차방정식 $2x^2-2kx+3k=0$의 판별식D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2\times 3k=k(k-6)<0$

즉, $0<k<6$일 때, 주어진 명제는 참이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이 되려면

$k \le 0$ 또는 $k \ge 6$

이어야 하므로 구하는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

[다른 풀이]

주어진 명제가 거짓이면 주어진 명제의 부정은 참이다.

주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $2x^2-2kx+3k \le 0$이다.' 이다.

이 부정인 명제가 참이 되려면 이차방정식

$2x^2-2kx+3k=0$의 판별식 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2\times 3k=k(k-6) \ge 0$

즉, $k \le 0$ 또는 $k \ge 6$ 이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

EBS연계 기출문항 4

[정답] ⑤

주어진 조건의 부정 $\sim p$는

$\sim p : x(x-11)<0$

$\Leftrightarrow 0<x<11$

이고 x는 정수이므로 $\sim p$의 진리집합은 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이다. 따라서 원소의 개수는 10개다.

EBS교재

[정답] ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이다.

$|x| \le 4$에서 $-4 \le x \le 4$이므로

$P=\{x|-4 \le x \le 4\}$

$x^2-4x-12 \le 0$에서 $(x-6)(x+2) \le 0$이므로

$Q=\{x|-2 \le x \le 6\}$,

$Q^c=\{x|x<-2$ 또는 $x>6\}$

따라서 $P\cap Q^C=\{x|-4 \le x<-2\}$이므로 집합 $P\cap Q^C$에 속하는 정수는 $-4, -3$의 2개다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

조건 q의 진리집합이 Q이면 $\sim q$의 진리집합은 Q^c이다.

이때 명제 $p \to \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^c$이다.

그러므로 $P\cap Q=\varnothing$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

정답 ②

$x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2+4x+7}{x+2}=x+2+\frac{3}{x+2}$$

$$\ge 2\sqrt{(x+2)\frac{3}{x+2}}=2\sqrt{3}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 두면

조건 $p : 0 < x < 3$ 이고, 조건 q는 p이기위한 필요조건이 되기 위해서는 $P \subset Q$를 만족해야한다. 즉, $a-3 \le 0$, $a+5 \ge 3$ 이다. 그러므로 $-2 \le a \le 3$이다.

따라서 정수는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 6개다.

Ⅱ. 함수

03. 함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 61

(i) $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

$= f(2^2+6) = f(10)$

$= 3 \times 10 + 3 = 33$

(ii) $f(2) = 3 \times 2 + 3 = 9$이므로

$(h \circ f)(2) = h(f(2)) = h(9)$이다.

$(f \circ h)(x) = g(x)$의 양변에 $x = 9$를 대입하면

$(f \circ h)(9) = g(9)$

$f(h(9)) = 87$

$f(x) = 3x+3$이므로

$3h(9)+3 = 87$, $h(9) = 28$

따라서 $(h \circ f)(2) = h(9) = 28$

(i), (ii)에서

$(f \circ g)(2) + (h \circ f)(2) = 33 + 28 = 61$

[다른 풀이]

$f(x) = 3x+3$, $g(x) = x^2+6$ 이므로

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에서

$3h(x)+3 = x^2+6$, $h(x) = \dfrac{1}{3}x^2+1$

따라서

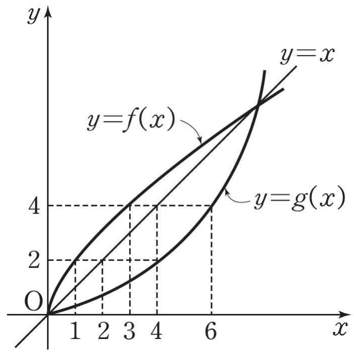
$(h \circ f)(2) = h(9) = \dfrac{1}{3} \times 9^2 + 1 = 27 + 1 = 28$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

세 함수 $y = f(x)$, $y = x$, $y = g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

오른쪽 그림에서 $g(4) = 2$이다.



$f^{-1}(2) = k$라 하면

$f(k) = 2$이므로 $k = 1$

따라서 $f^{-1}(2) = 1$ $f(3) = 4$이므로

$(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4)$

이때, $g^{-1}(4) = m$이라 하면 $g(m) = 4$이므로 $m = 6$

$(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = 6$

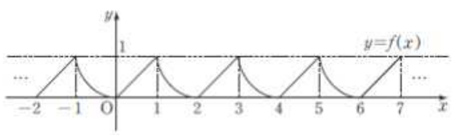
따라서

$g(4) + f^{-1}(2) + (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = 2 + 1 + 6 = 9$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$를 만족시키므로 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x+2) = f(x)$이므로 정수 k에 대하여

$f(2) = f(4) = f(6) = \cdots = f(2k) = 0$

$f(-1) = f(1) = f(3) = f(5) = \cdots = f(2k+1) = 1$

따라서

$f(2017) = f(2 \times 1008 + 1) = f(-1) = 1$

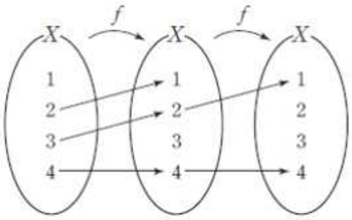
2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

함수 $(f \circ f)(x)$의 치역을 Z라 하자.

$f(3) = 2$이므로 $Z = \{1, 2, 4\}$이기 위해서는 $f(2) \ne 3$이다.

(i) $f(2) = 1$일 때

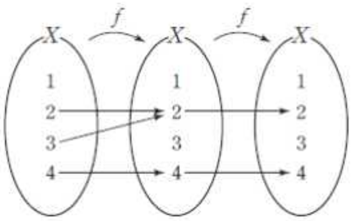


$f(1)=1$ 또는 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$이면 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$가 될 수 없다.

$f(1)=2$이면 $Z=\{1,\ 2,\ 4\}$이다.

따라서 $f(1)+f(2)=2+1=3$

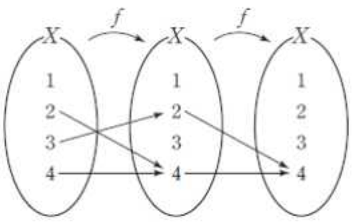
(ii) $f(2)=2$일 때



$f(1)=2$ 또는 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$이면 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$가 될 수 없다.

$f(1)=1$이면 $Z=\{1,\ 2,\ 4\}$이다.

따라서 $f(1)+f(2)=1+2=3$



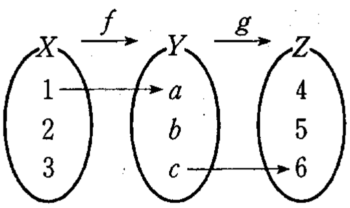
(iii) $f(2)=4$일 때

$f(1)$의 값이 1, 2, 3, 4 중에서 어떤 값을 갖든지 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$가 될 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)+f(2)=3$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ③



$f(1)=a$ 이므로 $f(3)=b$ 이거나 c

$f(3)=b$ 이면 $f(2)=c$ ($\because$ f가 일대일 대응)

이 때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6$ (모순)

따라서 $f(3)=c$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 5

역함수의 성질에서 $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

즉 $f^{-1}(5)=2$이면, $f(2)=5$이다.

따라서, $f(x)=ax^3+b$에서

$f(2)=8a+b=5$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

$f^{-1}(5)=a$이라 하면 $f(a)=2a-3=5$

$a=4$

따라서 $f^{-1}(5)=4$

EBS교재

[정답] ④

$g=f^{-1}$이므로 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이다.

$f(a)=2a+|a|+4=1$에서

$a\ge 0$이면 $2a+a+4=1$이므로 $a=-1$(모순)

$a<0$이면 $2a-a+4=1$이므로 $a=-3$

따라서 $g(1)=-3$

한편 $g^{-1}=(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로

$g^{-1}(1)=f(1)=2+|1|+4=7$

따라서 $g(1)+g^{-1}(1)=-3+7=4$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ⑤

$f(2)=4$, $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=3$

따라서 $f(2)+(f\circ f)(3)=7$

EBS교재

[정답]②

$f(1)=2$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=1$

$f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

따라서 $(f\circ f)(1)+f^{-1}(4)=1+3=4$

EBS연계 기출문항 5

[정답] ⑤

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 5$

EBS연계 기출문항 6

[정답] 10

$f^{-1}(7) = a$라 하면

$f(a) = 7$ 이므로 $2a - 13 = 7$이다. 즉 $a = 10$

따라서 $f^{-1}(7) = 10$

EBS교재

[정답] ④

$f^{-1}(-2) = \alpha$로 놓으면 $f(\alpha) = -2$

$4x - 1 = -2$에서 $x = -\frac{1}{4}$이므로

$f\left(2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 3\right) = -2,\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -2$

따라서 $\alpha = \frac{5}{2}$이므로 $f^{-1}(-2) = \frac{5}{2}$

[다른 풀이]

$f(2x + 3) = 4x - 1$ ……㉠

㉠에서 $2x + 3 = t$로 놓으면

$x = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(t) = 4 \times \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right) - 1 = 2t - 7$이므로

$f(x) = 2x - 7$

$f^{-1}(-2) = \alpha$라 하면 $f(\alpha) = -2$이므로

$2\alpha - 7 = -2,\ \alpha = \frac{5}{2}$

따라서 $f^{-1}(-2) = \frac{5}{2}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$f(-1) = (-2)(-1) + 1 = 3$ 이므로

$f(f(-1)) = f(3) = 3^2 + 1 = 10$

$f(0) = 1$이다.

$f(f(-1)) + f(0) = 10 + 1 = 11$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

일차함수 $f(x) = ax + b$라 두자.

$ax + b + x(a(ax + b) + b) = x^2 - x - 1$

$a^2x^2 + (ab + a + b)x + b = x^2 - x - 1$

$a^2 = 1$ 이므로 $a = \pm 1,\ b = -1$이다.

즉, $f(x) = x - 1$ 또는 $f(x) = -x - 1$

따라서 $f(10) = 9$ 또는 -11이다.

그러므로 $9 + (-11) = -2$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$f(f(f(x))) = x$가 되는 경우는 $f(x) = x$ 와 세 원소가 서로 엇갈리는 경우가 있다.

(ⅰ) $f(x) = x$ 인 경우는 1개다.

(ⅱ) 세 원소가 서로 엇갈리는 경우는

$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ 또는

$f(a) = c, f(c) = b, f(b) = a$ 의 두 가지 경우이다.

따라서 ${}_5C_3 \times 2 = 20$ (개)

그러므로 21개다.

04. 유리함수와 무리함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

ㄱ. $y = \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 1$이므로 함수 $y = -\frac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이고, 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프와 평행이동에 의하여 일치될 수 없다.

ㄴ. $y = \frac{2x+7}{x+3} = \frac{2(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 2$이므로 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$

이므로 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래

프와 일치될 수 있는 그래프를 갖는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

$$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}$$
$$=\frac{b-ac}{x+c}+a \quad \cdots\cdots \text{ ㉠}$$

이고 주어진 그래프에서 두 점근선의 방정식은

$x=p=-c>1$, $y=q=a>1$ 이므로

$a>1$, $c<-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $b-ac<0$, 즉 $b<ac$

그런데 ㉡에서 $b<ac<-1$ 이므로 $b<-1$

또한, 주어진 그래프의 두 점근선의 방정식에서

$p=-c$, $q=a$ 이므로

$p>q>1$ 에서 $-c>a>1$

한편

$$y=\sqrt{bx+a}+c=\sqrt{b\left(x+\frac{a}{b}\right)}+c \cdots\cdots \text{ ㉢}$$

㉢의 그래프는 함수 $y=\sqrt{bx}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{b}(>0)$ 만큼, y축의 방향으로 $c\,(<0)$ 만큼 평행이동한 것이다.

또한 $x=0$ 일 때 $y=\sqrt{a}+c$

$1<a<-c$ 이므로 $a<c^2$, 즉 $\sqrt{a}<|c|$

그런데 $c<0$ 이므로 $\sqrt{a}+c<0$

따라서 함수 $y=\sqrt{bx+a}+c$ 의 그래프의 y 절편은 음수이므로 구하는 그래프는 ⑤이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

함수 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}=2+\dfrac{a+2}{x-1}$ 이므로 점근선은 $x=1, y=2$이다. 이때 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로 $g(x)$의 점근선은 $x=2, y=1$이어야 한다.

$b=1, c=-2$이므로 $g(x)=1+\dfrac{3}{x-2}$ 이다.

이때, $g(1)=-2$이므로 $f(-2)=-\dfrac{a-4}{3}=1$ 에서 $a=1$이다.

따라서 $g(a)=g(1)=-2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

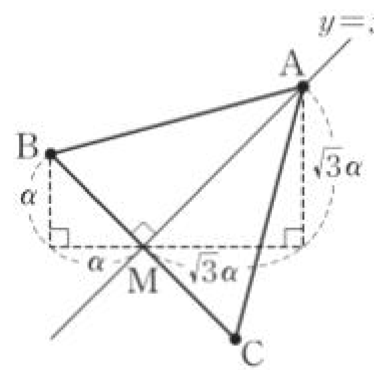
[정답] ②

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^3$, $x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

이때 $x>0$이므로 $x=2$이다. 즉, $\mathrm{A}(2,2)$이다.



선분 BC의 중점을 M이라 하고, 두 점 B, M의 x좌표의 차를 $\alpha(\alpha>0)$이라 하면 두 점 B, M의 y좌표의 차는 α이고, $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2}\alpha$, $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{6}\alpha$이므로 두 점 A, M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}\alpha$, 두 점 A, M의 y좌표의 차는 $\sqrt{3}\alpha$이다.

따라서 $\mathrm{M}(2-\sqrt{3}\alpha,\ 2-\sqrt{3}\alpha)$,

$\mathrm{B}(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha,\ 2-\sqrt{3}\alpha+\alpha)$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$2-\sqrt{3}\alpha+\alpha=\sqrt{(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha)+2}$

$(2-\sqrt{3}\alpha+\alpha)^2=(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha)+2$

$4+3\alpha^2+\alpha^2-4\sqrt{3}\alpha-2\sqrt{3}\alpha^2+4\alpha$
$=4-\sqrt{3}\alpha-\alpha$

$2(2-\sqrt{3})\alpha^2=(3\sqrt{3}-5)\alpha$

$\alpha>0$이므로

$$\alpha=\frac{3\sqrt{3}-5}{2(2-\sqrt{3})}=\frac{(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{3})}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\alpha\times\sqrt{6}\alpha=2\sqrt{3}\times\alpha^2$$

$= 2\sqrt{3} \times \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}-3$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$b = \sqrt{a}$, $d = \sqrt{c}$ 에서 $a = b^2$, $c = d^2$

또 주어진 조건에서 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 이므로

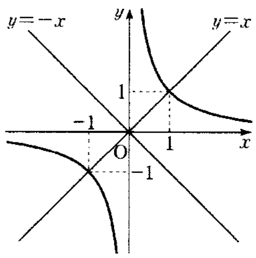
직선 PQ 의 기울기

$= \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{1}{d+b} = \dfrac{1}{2}$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

아래 그림을 보면 $y = \dfrac{1}{x}$ 의 그래프는 직선 $y = \pm x$ 에 대해 대칭이다. 즉, $a = \pm 1$



[다른 풀이]

$y = \dfrac{1}{x}$ …… ㉠

㉠의 양변에 x를 곱하면

$xy = 1$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{y}$ …… ㉡

이는 ㉠에 x 대신 y, y 대신 x를 대입한 것과 같다.

즉, ㉡은 ㉠과 $y = x$에 대하여 대칭이다.

또한 $-x = \dfrac{1}{y}$ …… ㉢

이는 ㉠에 x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입한 것과 같다.

즉 ㉢은 ㉠과 $y = -x$에 대해서도 대칭이므로

분수함수 $y = \dfrac{1}{x}$ 은 직선 $y = x$ 와 $y = -x$ 에 대해 대칭이다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] 10

함수

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5} = \dfrac{2(x-5)+7}{x-5} = \dfrac{7}{x-5} + 2$

의 그래프의 점근선은 두 직선 $x = 5$, $y = 2$ 이므로 $p = 5$, $q = 2$ 이다.

$\therefore\ pq = 10$

EBS교재

[정답] $x = 3$, $y = 2$

$y = \dfrac{2x-3}{x-3} = 2 + \dfrac{3}{x-3}$ 이므로

점근선의 방정식은 $x = 3$, $y = 2$ 이다.

EBS연계 기출문항 4

[정답] ①

함수 $y = a\sqrt{x} + 4$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y = a\sqrt{x-m} + 4 + n$ 의 그래프가 된다.

이는 함수 $y = \sqrt{9x-18} = 3\sqrt{x-2}$ 의 그래프와 일치하므로 $a = 3, m = 2, n = -4$ 이다.

따라서 $a + m + n = 1$

EBS교재

[정답] ②

함수 $y = 3\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-m$ 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프를 갖는 함수는

$y = 3\sqrt{x+m} - n = \sqrt{9x+9m} - n$

이것이 함수 $y = \sqrt{px+9} + 3$ 과 같으므로

$p = 9$, $9m = 9$, $-n = 3$ 에서

$p = 9$, $m = 1$, $n = -3$

따라서 $m + n + p = 1 + (-3) + 9 = 7$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

$y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=2+\dfrac{1}{x-3}$ 이므로

함수 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다. 그러므로 함수 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 는 직선 $y=(x-3)+2$ 또는 $y=-(x-3)+2$ 에 대칭이다.

따라서 $y=x-1$ 또는 $y=-x+5$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $p=-1$, $q=5$이고 $pq=-5$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

두 곡선$f(x)$와 $g(x)$의 교점은 $y=x$위에 있다.
$\sqrt{x}+2=x$ 에서 $\sqrt{x}=x-2$, $x^2-5x+4=0$

$x=1$ 또는 $x=4$ 에서 $x\geq 2$이므로 $x=4$이다. 그러므로 점Q$(4,4)$이다.

따라서 삼각형의 OPQ 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

선분PQ 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 점P$(5,1)$, Q$(1,5)$이고 중점은 $(3,3)$이다.

따라서 R$\left(\dfrac{5}{3},3\right)$, S$\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$이고, 사각형 PQRS는 사다리꼴이다.

선분 RS의 길이는 $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ 이고 중점이 $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{3}\right)$이므로 사다리꼴의 높이는 $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{2}+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}\sqrt{2}=\dfrac{32}{9}$

이다. 따라서 $m+n=41$ 이다.

Ⅲ. 수열

05. 등차수열과 등비수열

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$a_1=S_1=1+2^1=3$

$a_5=S_5-S_4=(5+2^5)-(4+2^4)=37-20=17$

따라서 $a_1+a_5=3+17=20$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공비가 r이므로

$S_{10}=\dfrac{r^{10}-1}{r-1}$, $S_{30}=\dfrac{r^{30}-1}{r-1}$, $S_{40}=\dfrac{r^{40}-1}{r-1}$

$\dfrac{S_{30}}{S_{10}}=\dfrac{r^{30}-1}{r^{10}-1}$

$=\dfrac{(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r^{10}-1}$

$=r^{20}+r^{10}+1$

$=7r^{10}-8$

에서 $r^{20}-6r^{10}+9=0$, 즉 $(r^{10}-3)^2=0$이므로 $r^{10}=3$

따라서 $\dfrac{S_{40}}{S_{10}}=\dfrac{r^{40}-1}{r^{10}-1}=\dfrac{3^4-1}{3-1}=40$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$a_n=a_1+(n-1)\times 2=2n+a_1-2$이므로

$b_n=6n-2-a_n=6n-2-(2n+a_1-2)=4n-a_1$

이때 $a_5-b_5=(2\times 5+a_1-2)-(4\times 5-a_1)$

$=2a_1-12=-10$이므로 $a_1=1$이다.

따라서 $b_n=4n-1$이므로 $b_{10}=4\times 10-1=39$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 5

이차함수 $y=-x^2+kx$의 그래프와 직선 $y=6$이

만나는 서로 다른 두 점 A, B의 각각의 x좌표 α, β는 방정식 $-x^2+kx=6$, 즉

$x^2-kx+6=0 \quad \cdots$ ㉠

의 두 근이다.

즉, 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k \quad \cdots$ ㉡

세 수 $\dfrac{5}{\alpha^2}$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{5}{\beta^2}$가 이 순서대로 등비수열을 이루면

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$이 $\dfrac{5}{\alpha^2}$와 $\dfrac{5}{\beta^2}$의 등비중항이므로

$\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2=\dfrac{5}{\alpha^2}\times\dfrac{5}{\beta^2}$에서

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)^2=\left(\dfrac{5}{\alpha\beta}\right)^2$, $\alpha+\beta=5$

따라서 ㉡으로부터 $k=5$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=4a_1$에서 $a_1r^2=4a_1$이므로

$r^2=4 \ \cdots$ ㉠

$a_7=(a_6)^2$에서 $a_1r^6=(a_1r^5)^2=a_1^2r^{10}$이므로

$a_1r^4=1 \ \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a_1=\dfrac{1}{16}$이다.

EBS교재

[정답] 81

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+3a_2=0$에서

$a_1+3a_1r=0$, $a_1(1+3r)=0$

이때 $a_1\neq 0$이므로

$1+3r=0 \quad \therefore \ r=-\dfrac{1}{3}$

또, $a_3=a_4^2$에서

$a_1r^2=\left(a_1r^3\right)^2$

$a_1r^2\left(a_1r^4-1\right)=0$

이때 $a_1\neq 0$, $r=-\dfrac{1}{3}$이므로

$a_1\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4-1=0$

$\therefore \ a_1=81$

따라서 $a_n=81\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_9=81\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^8=\dfrac{1}{81}$

$\therefore \ \dfrac{1}{a_9}=81$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 7

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_8-a_4=4d=28$이므로 $d=7$이다.

EBS교재

[정답] ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_3=2d=8$

$\therefore \ d=4$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times4=4n+1$이므로

$a_7=4\times7+1=29$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_8=a+7d=(a+d)+12 \ \cdots$ ㉠

$a_1+a_2+a_3=a+(a+d)+(a+2d)=15\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3, d=2$

따라서 $a_{10}=3+9\times2=21$

EBS교재

[정답] ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=a_1+18$에서

$a_{10}-a_1=(a_1+9d)-a_1=9d=18$

이므로 $d=2$

$a_1+a_4+a_7=0$에서

$a_1+a_4+a_7=a_1+(a_1+3d)+(a_1+6d)$

$=3a_1+9d$

$=3a_1+18=0$

에서 $a_1=-6$

따라서

$a_{20}=a_1+19d=-6+19\times2=32$

EBS연계 기출문항 4

[정답] 96

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$$\frac{a_4a_5}{a_2a_3}=\frac{ar^3\times ar^4}{ar\times ar^2}=r^4=16$$

따라서 $r=2$

$\therefore\ a_6=3\times2^5=96$

EBS교재

[정답] ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

모든 항이 양수이므로 $r>0$

$$\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1r^2}{a_1r}+\frac{a_1r^4}{a_1r^2}=r+r^2=6\text{에서}$$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

r는 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_4=a_1r^3=\sqrt{2}\times2^3=8\sqrt{2}$

EBS연계 기출문항 5

[정답] ②

첫째항이 1인 등비수열의 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$ 이라 하면

$$\frac{a_7}{a_5}=\frac{r^6}{r^4}=r^2=4$$

이므로 $r=2$

이다. 따라서 $a_4=2^3=8$

EBS교재

[정답] 48

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2a_4=144$에서

$ar\times ar^3=3^2\times2^4$

$a^2\times r^4=3^2\times2^4$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a=3$, $r=2$

따라서 $a_5=3\times2^4=48$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

(i) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=k+1$

(ii) $n\geq2$ 일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+kn)-\{(n-1)^2+k(n-1)\}$

$=2n+k-1$ ……㉠

㉠에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1=k+1$ 이므로

$a_n=2n+k-1\ \ (n\geq1)$

$a_2=1$ 이므로

$a_2=4+k-1=3+k=1$ $\quad\therefore\ k=-2$

$\therefore\ a_n=2n-3$

$\therefore\ a_1+a_{20}=-1+37=36$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 42

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_1+a_7=2a_4$, $a_2+a_8=2a_5$ 이므로

$a_1+a_4+a_7=3a_4=15$

$\therefore\ a_4=a+3d=5$ ……㉠

$a_2+a_5+a_8=3a_5=9$

$\therefore\ a_5=a+4d=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11$, $d=-2$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 11, 공차가 -2 이므로

$a_n=11+(n-1)\cdot(-2)=-2n+13$

등차수열의 합 S_n 은 $a_n>0$ 인 모든 항을 더할 때 최대가 되므로

$-2n+13>0$ 에서 $n<\frac{13}{2}=6.5$, 즉 제 6 항까지의 합이 최대가 된다.

$\therefore M=S_6=\frac{6\times(11+1)}{2}=36$

$\therefore M+k=36+6=42$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합은

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 이므로

$3S_{30}=7S_{20}$ 에서

$3\times\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=7\times\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}$

$3(r^{30}-1)=7(r^{20}-1)$, $3(r^{20}+r^{10}+1)=7(r^{10}+1)$

$r^{10}=X\ (X>0)$ 라 하면

$3X^2+3X+3=7X+7$

$3X^2-4X-4=0$, $(3X+2)(X-2)=0$

$\therefore X=r^{10}=2$

$\therefore \frac{S_{40}}{S_{10}}=\frac{r^{40}-1}{r^{10}-1}=2^4-1=15$

06. 수열의 합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=34$에서

$\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}b_k+(a_9+b_9)+(a_{10}+b_{10})=34$이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}b_k=34-(a_9+b_9)-(a_{10}+b_{10})$

...... ㉠

$\sum_{k=1}^{9}(2a_k-b_k)=26$에서

$2\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{8}b_k+(2a_9-b_9)=26$이므로

$2\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{8}b_k=26-(2a_9-b_9)$

...... ㉡

㉡$-$㉠에서

$\sum_{k=1}^{8}(a_k-2b_k)=-8-a_9+2b_9+a_{10}+b_{10}$

따라서 $p=-8$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$\sum_{k=1}^{15}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{15}a_{2k}=\sum_{k=1}^{30}a_k$

$=\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k}$

$=\sum_{k=1}^{10}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)+k+k^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times12}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+1\times10=505$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 54

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 항 중에서 $-2, 1, 2$의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=15$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{15}a_k=0$에서

$\sum_{k=1}^{15}a_k=-2\times x+1\times y+2\times z$

$=-2x+y+2z=0$ ⋯ ㉡

$\sum_{k=1}^{15}(a_k+2)^2=114$에서

$\sum_{k=1}^{15}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{15}(a_k{}^2+4a_k+4)$

$$=\sum_{k=1}^{15} {a_k}^2+4\sum_{k=1}^{15} a_k+\sum_{k=1}^{15} 4$$

$=\{(-2)^2\times x+1^2\times y+2^2\times z\}+4\times 0+15\times 4$

$=114$

이므로 $4x+y+4z=54$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x=7,\ y=2,\ z=6$이므로

$$\sum_{k=1}^{15}({a_k}^3+4)=\sum_{k=1}^{15}{a_k}^3+\sum_{k=1}^{15}4$$

$=\{(-2)^3\times 7+1^3\times 2+2^3\times 6\}+15\times 4=54$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

네 직선

$x=n,\ x=n+1,\ y=f(n),\ y=f(n+1)$

로 둘러싸인 직사각형의 넓이 S_n은

$S_n=\{(n+1)-n\}\times\{f(n)-f(n+1)\}$

$=1\times\left(\dfrac{11}{n}-\dfrac{11}{n+1}\right)$

$=11\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}S_n=11\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$=11\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=11\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=10$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 6

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_7$

$=(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots(a_6+1)$

$=a_1+a_2+\cdots+a_6+6$

따라서 $a_7=6$이다.

EBS교재

[정답] 11

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}f(k+2)=\sum_{k=3}^{10}f(k-1)$에서

$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(9)$

$\{f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)\}$

$-\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(9)\}=0$

$f(10)-f(2)=0$이므로

$f(2)=f(10)$ ⋯ ㉠

이때 주어진 이차함수는 $f(x)=-(x-a)^2+a^2$이고 이 이차함수의 그래프는 ㉠으로부터 직선 $x=\dfrac{2+10}{2}=6$에 대하여 대칭이어야 한다.

즉, $a=6$이므로 $f(x)=-x^2+12x$이다.

따라서 $f(1)=-1+12=11$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=4+(n-1)=n+3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$

$=(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots$

$+(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}})$

$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}$

$=\sqrt{16}-\sqrt{4}$

$=4-2$

$=2$

EBS교재

[정답] 3

$\dfrac{m\{6+(m-1)\times 4\}}{2}=465$에서

$(2m+31)(m-15)=0$

이때 m은 자연수이므로 $m=15$이고, 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{\sqrt{1+a_k}+\sqrt{1+a_{k+1}}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{1+a_{k+1}}-\sqrt{1+a_k}}{(1+a_{k+1})-(1+a_k)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{4(k+1)}-\sqrt{4k}}{4}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}$$

$$=4-1=3$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

삼각형의 넓이 a_n은

$$a_n=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{n}=\frac{3}{n}$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}n(n+1)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}n^2+\sum_{n=1}^{10}n=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$

$$=385+55=440$$

EBS교재

[정답]①

네 직선

$x=n,\ x=n+1,\ y=f(n),\ y=f(n+1)$

로 둘러싸인 직사각형의 넓이 S_n은

$$S_n=\{(n+1)-n\}\times\{f(n)-f(n+1)\}$$

$$=1\times\left(\frac{11}{n}-\frac{11}{n+1}\right)$$

$$=11\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서

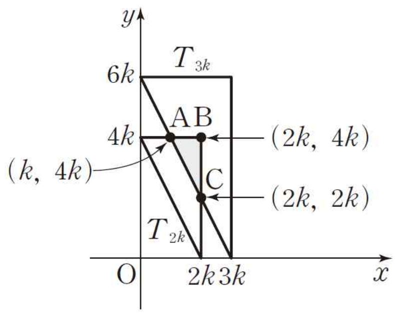
$$\sum_{n=1}^{10}S_n=11\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=11\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=11\left(1-\frac{1}{11}\right)=10$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 220



그림과 같이 삼각형T_{2k}와 삼각형 T_{3k}가 만나서 생기는 삼각형을 삼각형ABC라 하고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 하자. 그림에서 AB 위에 있는 격자점의 개수는

$$2k-k+1=k+1$$

선분 BC 위에 있는 격자점의 개수는

$$4k-2k+1=2k+1$$

선분 AC 위에 잇는 격자점의 개수는 선분AB 위에 있는 격자점의 개수와 같으므로 $k+1$이다.

이때 삼각형ABC의 세 꼭짓점은 중복되어 세어지므로 삼각형ABC의 둘레 위에 있는 격자점의 개수는

$(k+1)+(2k+1)+(k+1)-3=4k,$ 즉 $f(k)=4k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}f(k)=\sum_{k=1}^{10}4k=4\times\frac{10\times11}{2}=220$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+(a_k-b_k)\}=$$

$$= \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=50+10=60$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}2a_k=60 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=30$$

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)-(a_k-b_k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=50-10=40$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}2b_k=40 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=20$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k+4b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+4\sum_{k=1}^{10}b_k$$

$$=3\cdot 30+4\cdot 20=170$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 439

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n+1,\ \alpha_n\beta_n=-n^2$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(\alpha_k-1)(\beta_k-1)}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\alpha_k\beta_k-(\alpha_k+\beta_k)+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{-k^2-(2k+1)+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{-k(k+2)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=-\frac{175}{264}$$

$\therefore\ p+q=264+175=439$

07. 수학적 귀납법

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n\ (n\geq 1)$에서

$2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$

즉, $a_{n+1}=\dfrac{a_{n+2}+a_n}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=1,\ a_3=9$이므로 $a_3-a_1=9-1=8$

$2d=8,\ d=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$ 이므로

$a_9=4\times 9-3=33$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=2-\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로

(*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}=2-\dfrac{k+2}{2^k}$이다.

위 등식의 양변에 $\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$=2-\frac{1}{2^k}\left\{(k+2)-\frac{k+1}{2}\right\}$$

$$=2-\frac{1}{2^k}\times\frac{k+3}{2}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{k+1}{2},\ g(k)=k+1$이므로

$f(7)+g(9)=\dfrac{7+1}{2}+(9+1)=14$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 17

$a_1=1$이고 $2a_{n+1}+\dfrac{1}{2a_n-1}=0$에서

$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2(2a_n-1)}$이므로

$n=1$일 때

$a_2=-\dfrac{1}{2(2a_1-1)}=-\dfrac{1}{2(2\times1-1)}=-\dfrac{1}{2}$

$n=2$일 때

$a_3=-\dfrac{1}{2(2a_2-1)}=-\dfrac{1}{2\left\{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1\right\}}=\dfrac{1}{4}$

$n=3$일 때

$a_4=-\dfrac{1}{2(2a_3-1)}=-\dfrac{1}{2\left(2\times\dfrac{1}{4}-1\right)}=1$

$n=4$일 때

$a_5=-\dfrac{1}{2(2a_4-1)}=-\dfrac{1}{2(2\times1-1)}=-\dfrac{1}{2}$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$이 이 순서대로 반복되므로

$a_n=a_{n+3}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)+1=\dfrac{13}{4}$

이므로 $p+q=4+13=17$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 2

점 A_n의 좌표를 $\left(x_n, \dfrac{1}{2}x_n\right)$이라 하면

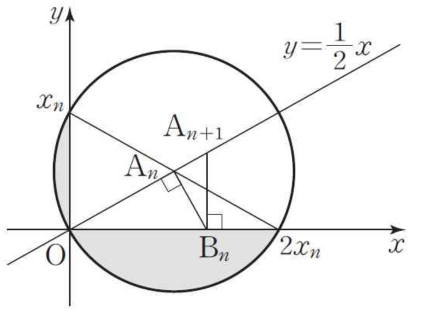
직선 A_nB_n의 방정식은 $y=-2(x-x_n)+\dfrac{1}{2}x_n$

이때 점 B_n의 좌표가 $(x_{n+1}, 0)$이므로

$0=-2(x_{n+1}-x_n)+\dfrac{1}{2}x_n$에서 $x_{n+1}=\dfrac{5}{4}x_n$

$x_5=1\times\left(\dfrac{5}{4}\right)^4=\left(\dfrac{5}{4}\right)^4 \quad \cdots$ ㉠

또한 $\overline{\mathrm{OA}_n}^2=x_n^2+\left(\dfrac{1}{2}x_n\right)^2=\dfrac{5}{4}x_n^2$이고 구하는 S_n은 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$S_n=\dfrac{1}{2}\times\pi\times\dfrac{5}{4}x_n^2-\dfrac{1}{2}\times2x_n\times x_n$

$=\left(\dfrac{5}{8}\pi-1\right)x_n^2 \quad \cdots$ ㉡

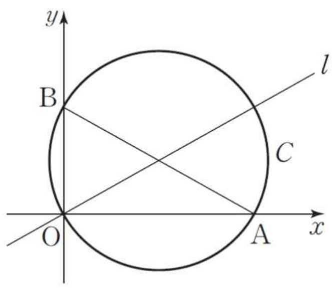
㉠, ㉡에서

$S_5=\left(\dfrac{5}{8}\pi-1\right)x_5^2=\left(\dfrac{5}{8}\pi-1\right)\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^4\right\}^2$

$=\left(\dfrac{5}{8}\pi-1\right)\left(\dfrac{5}{4}\right)^8$

따라서 $a=\dfrac{5}{8}$, $b=\dfrac{5}{4}$이므로 $\dfrac{b}{a}=2$

[참고]



원점을 지나는 직선 l 위에 중심을 갖는 원 C가 좌표축과 원점이 아닌 두 점 A, B에서 만날 때, 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 선분 AB는 원 C의 지름이 된다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$a_n=1+(n-1)\cdot(-\log_2 3)$

$=1+\log_2 3-n\log_2 3=\log_2\dfrac{6}{3^n}$

따라서

$$a_{2n-1}+a_{2n}=\log_2\frac{6}{3^{2n-1}}+\log_2\frac{6}{3^{2n}}$$

$$=\log_2\frac{36}{3^{4n-1}}$$

이므로

$$2^{a_{2n-1}+a_{2n}}=\frac{36}{3^{4n-1}}$$

$$\therefore\ 2^{a_1+a_2}+2^{a_3+a_4}+2^{a_5+a_6}+\ \cdots\ +2^{a_{19}+a_{20}}$$

$$=\frac{36}{3^3}+\frac{36}{3^7}+\frac{36}{3^{11}}+\ \cdots\ +\frac{36}{3^{39}}$$

$$=\frac{\frac{36}{3^3}\left\{1-\left(\frac{1}{3^4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3^4}}=\frac{27}{20}\left(1-\frac{1}{3^{40}}\right)$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$n=1$ 을 대입하면 $a_1a_3=a_2+1$ 에서 $a_3=1$

$n=2$ 을 대입하면 $a_2a_4=a_3+1$ 에서 $a_4=1$

$n=3$ 을 대입하면 $a_3a_5=a_4+1$ 에서 $a_5=2$

$n=4$ 을 대입하면 $a_4a_6=a_5+1$ 에서 $a_6=3$

$n=5$ 을 대입하면 $a_5a_7=a_6+1$ 에서 $a_7=2$

$\therefore\ a_n=a_{n+5}\ (n\ge 1)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{100}a_k=\frac{100}{5}\times(3+2+1+1+2)=20\times 9=180$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 48

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2^2}\cdot 2!+\frac{2}{2^3}\cdot 3!+\frac{3}{2^4}\cdot 4!+\cdots+\frac{k}{2^{k+1}}\cdot(k+1)!$$

$$=\frac{(k+2)!}{2^{k+1}}-1$$

이 식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+2}}\cdot(k+2)!$ 을 더하면

$$\frac{1}{2^2}\cdot 2!+\frac{2}{2^3}\cdot 3!+\frac{3}{2^4}\cdot 4!+\cdots+\frac{k}{2^{k+1}}\cdot(k+1)!$$

$$+\frac{k+1}{2^{k+2}}\cdot(k+2)!$$

$$=\frac{(k+2)!}{2^{k+1}}-1+\frac{k+1}{2^{k+2}}\cdot(k+2)!$$

$$=\frac{2(k+2)!+(k+1)(k+2)!}{2^{k+2}}-1$$

$$=\frac{(k+3)(k+2)!}{2^{k+2}}-1=\frac{(k+3)!}{2^{k+2}}-1$$

즉, $n=k+1$ 일 때도 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다. 따라서

$f(k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}\cdot(k+2)!$, $g(k)=(k+3)!$ 이므로

$$\frac{g(3)}{f(3)}=\frac{6!}{\frac{4}{2^5}\cdot 5!}=48$$

Ⅳ. 지수와 로그

08. 지수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 6

조건 (가)에서

$\sqrt[3]{a}$ 는 b의 네제곱근이므로

$(\sqrt[3]{a})^4=b$, 즉 $b=a^{\frac{4}{3}}$ ……㉠

조건 (나)에서

$\sqrt{b}$ 는 c의 세제곱근이므로

$(\sqrt{b})^3=c$, 즉 $c=b^{\frac{3}{2}}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$c=b^{\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}=a^2$$

이때 $c^6=(a^2)^6=a^{12}$ 이므로 c는 a^{12}의 6제곱근이다.

따라서 $n=6$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$\sqrt{32}\times\sqrt[4]{64}=\sqrt{2^5}\times\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^5}\times\sqrt{2^3}$

$=\sqrt{2^5\times2^3}=\sqrt[2]{2^8}$

$=2^4=16$

$4^{-1}\times8^{\frac{7}{3}}=(2^2)^{-1}\times(2^2)^{\frac{7}{3}}$

$=2^{2\times(-1)}\times2^{3\times\frac{7}{3}}$

$=2^{-2}\times2^7=2^{-2+7}=2^5=32$

이때 부등식 $\sqrt{32}\times\sqrt[4]{64}<n<4^{-1}\times8^{\frac{7}{3}}$에서

$16<n<32$

따라서 자연수 n은 17, 18, 19, $\cdots$, 31이고, 그 개수는 15이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 4

$x>0$일 때, 곡선 $y=x^n$과 $y=3$이 만나는 점의 x좌표 α_n은 3의 n제곱근이고, 곡선 $y=x^{n+1}$과 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표 β_n은 4의 $n+1$제곱근이다.

즉, $\alpha_n=\sqrt[n]{3}$, $\beta_n=\sqrt[n+1]{4}$

따라서

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\frac{\sqrt[n+1]{4}}{\sqrt[n]{3}}=\frac{\sqrt[n(n+1)]{4^n}}{\sqrt[n(n+1)]{3^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{4^n}{3^{n+1}}}$$

$n=3$일 때, $\frac{4^3}{3^4}<1$이고 $n=4$일 때, $\frac{4^4}{3^5}>1$

이므로 $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$이 1보다 큰 수의 $n(n+1)$제곱근이 되도록 하는 n의 최솟값은 4이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$2^x=(\sqrt{5})^y=3^{-z}=k$라 하면

$5=k^{\frac{2}{y}}$, $3=k^{-\frac{1}{z}}$이고 $2yz=y+2z$에서 $yz\neq0$이므로

$\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=2$

$\frac{k^{\frac{2}{y}}}{k^{-\frac{1}{z}}}=k^{\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}=k^2=\frac{5}{3}$

따라서

$4^{x+1}=4\times(2^x)^2=4\times k^2=4\times\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$

EBS연계 기출문항 1

$2^0\times9^{\frac{1}{2}}=1\times3=3$

EBS교재

$12\times8^{-\frac{2}{3}}=12\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}=12\times2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=12\times2^{-2}=12\times\frac{1}{4}$

$=3$

EBS연계 기출문항 2

$6\times8^{\frac{1}{3}}=6\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=6\times2=12$

EBS교재

$12\times8^{-\frac{2}{3}}=12\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}=12\times2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=12\times2^{-2}=12\times\frac{1}{4}$

$=3$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$a=\sqrt[3]{24}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$이라 하면

$a^3=(\sqrt[3]{24})^3=24$, $b^3=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3=\frac{1}{3}$

$ab=\sqrt[3]{24}\times\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{24}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

$x^3=(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=24-\frac{1}{3}-3\cdot2x$

$=\frac{71}{3}-6x$

$\therefore\ x^3+6x=\dfrac{71}{3}$

$\therefore\ x^3+6x-\dfrac{11}{3}=\dfrac{71}{3}-\dfrac{11}{3}=\dfrac{60}{3}=20$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$\sqrt[3]{\dfrac{3^{b+1}}{2^a}}$ 이 유리수이려면 $b+1$, a가 모두 3의 배수이어야 하고,

$\sqrt[5]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수이려면 b, $a+1$이 모두 5의 배수이어야 한다.

이때, a는 3의 배수, $a+1$은 5의 배수이므로 100 이하의 자연수 a는 9, 24, 39, 54, 69, 84, 99의 7개이다.

또, b는 5의 배수, $b+1$은 3의 배수이어야 하므로 100 이하의 자연수 b는 5, 20, 35, 50, 65, 80, 95의 7개이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$7\times7=49$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$3^{m+2}-3^{m+1}=3^{m+1}(3-1)=2\cdot3^{m+1}$ 이므로

$6\cdot3^m=12\sqrt{2}\qquad\therefore\ 3^m=2\sqrt{2}$

$3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)=2\cdot3^{n-1}$ 이므로

$2\cdot3^{n-1}=\dfrac{4}{3}\qquad\therefore\ 3^n=2$

$$\therefore\ 27^{\frac{m}{3}}+9^{\frac{n}{4}}=(3^3)^{\frac{m}{3}}+(3^2)^{\frac{n}{4}}$$
$$=3^m+3^{\frac{n}{2}}$$
$$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

09. 로그

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$\log x-\log y=n$ (n은 정수)에서

$\log\dfrac{x}{y}=n$, 즉 $\dfrac{x}{y}=10^n$ …… ㉠

그런데 $10^5<x<10^6$, $10<y<10^2$이므로

$\dfrac{10^5}{10^2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{10^6}{10}$에서 $10^3<\dfrac{x}{y}<10^5$… ㉡

㉠, ㉡에서

$10^3<10^n<10^5$

이므로 $n=4$이다.

따라서 $\dfrac{x}{y}=10^4$ 이므로 $\log\dfrac{x}{y}=\log10^4=4$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $\log_2a+\log_2b+\log_2c=6$이므로

$\log_2abc=6$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 세 양수 a, b, c 중 어느 하나의 값이

1이면 다른 두 수도 1이다.

이때 ㉠에서 $\log_2(1\times1\times1)=0\neq6$이므로 세 양수 a, b, c는

모두 1이 아니다.

$a^3=b^4=c^6=k$ (k는 1이 아닌 양수)로 놓자.

$a^3=k$에서

$\log_ak=3$, 즉 $\log_ka=\dfrac{1}{3}$

$b^4=k$에서

$\log_bk=3$, 즉 $\log_kb=\dfrac{1}{4}$

$c^6=k$에서

$\log_ck=5$, 즉 $\log_kc=\dfrac{1}{6}$

이때

$\log_ka+\log_kb+\log_kc=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}$

$\log_kabc=\dfrac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\log_kabc=\dfrac{\log_2abc}{\log_2k}=\dfrac{6}{\log_2k}=\dfrac{3}{4}$

$\log_2k=8$

$k=2^8$

이때 $a^3=b^4=c^6=2^8$ 이므로

$a=2^{\frac{8}{3}}$, $b=2^2$, $c=2^{\frac{4}{3}}$

따라서

$\log_2 a\times\log_2 b\times\log_2 c$

$=\log_2 2^{\frac{8}{3}}\times\log_2 2^2\times\log_2 2^{\frac{4}{3}}$

$=\dfrac{8}{3}\times2\times\dfrac{4}{3}$

$=\dfrac{64}{9}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

밑의 조건에 의하여 $x-1>0$, $x-1\neq1$이므로

$x>1$, $x\neq2$ ……㉠

진수의 조건에 의하여 $x(n-x)>0$이므로

$x(x-n)<0$

$0<x<n$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<n$, $x\neq2$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, …, $n-1$이므로

$\sum_{k=3}^{n-1}k=207$, $\sum_{k=1}^{n-1}k-(1+2)=207$, $\dfrac{(n-1)n}{2}=210$

$(n-1)n=420$, $(n-1)n=20\times21$

따라서 자연수 n의 값은 21이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$N=500$, $L=101$일 때, $W=100$이므로

$100=101+10\log500-k$

$k=101+10\log500-100$

$=101+10(\log100+\log5)-100$

$=101+10(2+0.7)-100$

$=101+10\times2.7-100=28$

따라서 구하는 항공기 소음의 평가 단위인 웨클의 값은

$102+10\log631-28$

$=102+10(\log100+\log6.31)-28$

$=102+10(2+0.8)-28$

$=102+28-28=102\,(\text{dB})$

EBS연계 기출문항 1

$\log_3 6-\log_3 2=\log_3\dfrac{6}{2}=\log_3 3=1$

EBS교재

$\dfrac{1}{2}\log_3 12-2\log_3 2+\log_3 18$

$=\log_3\sqrt{12}-\log_3 4+\log_3 18$

$=\log_3 2\sqrt{3}-\log_3 4+\log_3 18$

$=\log_3\left(2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{4}\times18\right)$

$=\log_3 9\sqrt{3}$

$=\log_3 3^{\frac{5}{2}}$

$=\dfrac{5}{2}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

조건 (가)에서

$\log_2(abc)^2=20$

$2\log_2 abc=20$

$\log_2 abc=10$

$\therefore abc=2^{10}$

조건 (나)에서

$a^x=2^5$, $(\sqrt{b})^y=2^5$, $(\sqrt[3]{c})^z=2^5$이 성립하므로

$x\neq0$, $y\neq0$, $z\neq0$이고 $a^x=2^5$에서

$x=\log_a 2^5=5\log_a 2$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}\log_2 a$

$(\sqrt{b})^y=2^5$에서

$b^{\frac{y}{2}}=2^5$

$\dfrac{y}{2}=\log_b 2^5=5\log_b 2$

$\therefore \dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{5}\log_2 b$

$(\sqrt[3]{c})^z=2^5$에서

$c^{\frac{z}{3}} = 2^5$

$\frac{z}{3} = \log_c 2^5 = 5\log_c 2$

$\therefore \frac{3}{z} = \frac{1}{5}\log_2 c$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$

$= \frac{1}{5}\log_2 a + \frac{1}{5}\log_2 b + \frac{1}{5}\log_2 c$

$= \frac{1}{5}(\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c)$

$= \frac{1}{5}\log_2 abc$

$= \frac{1}{5}\log_2 2^{10} \ (\because abc = 2^{10})$

$= \frac{10}{5} = 2$

[다른 풀이]

조건 (가)에서

$\log_2 (abc)^2 = 20,\ \log_2 abc = 10$

$\therefore abc = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$ ······㉠

조건 (나)에서

$a = 32^{\frac{1}{x}},\ b = 32^{\frac{2}{y}},\ c = 32^{\frac{3}{z}}$

위의 세 등식을 변끼리 곱하면

$abc = 32^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}}$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 2$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 6,\ \alpha\beta = 2$

$\therefore\ \log_{\alpha\beta+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha} + 2\beta\right) + \log_{\alpha\beta+1}\left(3 + \frac{2}{\beta} + 2\alpha\right)$

$= \log_3(3 + \beta + 2\beta) + \log_3(3 + \alpha + 2\alpha)$

$= \log_3 3(1+\beta) + \log_3 3(1+\alpha)$

$= \log_3 9(1+\beta)(1+\alpha)$

$= \log_3 9\{1 + (\alpha+\beta) + \alpha\beta\}$

$= \log_3 9(1 + 6 + 2)$

$= \log_3 9^2 = \log_3 3^4$

$= 4$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

2012년 초의 가격을 a원이라고 하면

1년 후의 가격은 $(1+0.08)a$

2년 후의 가격은 $(1+0.08)^2 a$

⋮

n년 후의 가격은 $(1+0.08)^n a$가 되므로

$(1+0.08)^n a \geq 2a$에서

$(1+0.08)^n \geq 2$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log(1+0.08) \geq \log 2$

$n\log\frac{108}{100} \geq \log 2$

$n\log(3^3 \cdot 2^2 \cdot 10^{-2}) \geq \log 2$

$n(3 \times 0.4771 + 2 \times 0.3010 - 2) \geq 0.3010$

$n \geq \frac{0.3010}{0.0333} \fallingdotseq 9.039$

따라서 최소 10년 후, 즉 2022년부터 가격이 2배 이상이 된다.

Ⅰ. 수열의 극한

01. 수열의 극한

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

이차방정식 $x^2-2x+\sqrt{n^2+n}-n=0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=2,\ \alpha_n\beta_n=\sqrt{n^2+n}-n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+n}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{1}=4$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

(ⅰ) $0<r<1$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+1}=\frac{0-0+1}{0+1}=1$$

이므로 실수 r는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $r=1$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+1}=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이므로 $r=1$

(ⅲ) $r>1$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r-1=\frac{1}{2}$$

이므로 $r=\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 실수 r의 값의 합은 $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$n=1, 2, 3, \cdots$ 일 때, 주어진 조건을 만족시키는 점은 아래 그림과 같으므로

$$a_n=1+2+3+\cdots+(n+1)$$

$$=\frac{(n+1)\{1+(n+1)\}}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

따라서

$$a_{2n}=\frac{(2n)^2+3\times2n+2}{2}=2n^2+3n+1$$

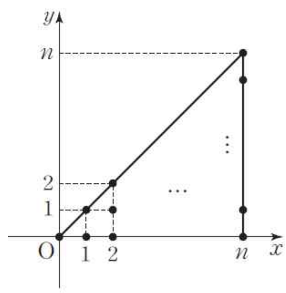
이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{\frac{n^2+3n+2}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+3n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{4+0+0}{1+0+0}=4$$



2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$n(n-1)<(n^2+1)a_nb_n<n(n+1)$ 에서

$$\frac{n(n-1)}{n^2+1}<a_nb_n<\frac{n(n+1)}{n^2+1}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^3+b_n{}^3)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(a_n+b_n)^3-3a_nb_n(a_n+b_n)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^3-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$

$$=2^3-3\times1\times2=2$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로

$D_1=(n+1)^2-4a_n\geq0$이다.

그러므로 $a_n\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$ … ㉠

곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로

$D_2=n^2-4a_n<0$이다.

그러므로 $a_n>\dfrac{n^2}{4}$ … ㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$$\frac{n^2}{4}<a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$$

각 변을 n^2으로 나누면

$$\frac{n^2}{4n^2}<\frac{a_n}{4}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$$

EBS교재

[정답] ①

이차방정식 $nx^2-(n+1)x+a_n=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$D=(n+1)^2-4na_n=0$$

$$\therefore a_n=\frac{(n+1)^2}{4n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times9^n-13}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{13}{9^n}}{1}=3$$

EBS교재

[정답] ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{2n+1}+5^n}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times9^n+5^n}{9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times1+\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1}$$

$$=\frac{6+0}{1}=6$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{7}{2}$$

EBS교재

[정답] ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+12n+9}{n^2+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{4+0+0}{1+0}=4$$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=2a=10$$

따라서 $a=5$

EBS교재

[정답] ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+3}-3^n}{a\times4^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times4^n-3^n}{a\times4^n+2\times2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{a+2\times\left(\frac{2}{4}\right)^n}=\frac{8-9}{a+2\times0}=\frac{8}{a}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+3}-3^n}{a\times4^n+2^{n+1}}=4$ 이므로

$\frac{8}{a}=4$ 에서 $a=2$

EBS교재

[정답] ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n+1}}{2^{-n+1}-3^{-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1+3\times0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

EBS연계 기출문항 5

[정답] ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}=\frac{8}{3}$$

EBS교재

[정답] ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=2$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$x^2+x+\sqrt{4n^2+n}=2x+2n$

$x^2-x+\sqrt{4n^2+n}-2n=0$

$\therefore \alpha_n+\beta_n=1,\ \alpha_n\beta_n=\sqrt{4n^2+n}-2n$

$\alpha_n{}^3+\beta_n{}^3=(\alpha_n+\beta_n)^3-3\alpha_n\beta_n(\alpha_n+\beta_n)$

$=1-3\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)=(6n+1)-3\sqrt{4n^2+n}$

$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n{}^3+\beta_n{}^3)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(6n+1)-3\sqrt{4n^2+n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(6n+1)^2-9(4n^2+n)}{(6n+1)+3\sqrt{4n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{(6n+1)+3\sqrt{4n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n}+3\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{3+0}{6+0+3\sqrt{4+0}}$$
$$=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

$\therefore p=1,\ q=6\quad \therefore p+q=7$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$ 에서

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(a_n)^2}{b_n}-\frac{(b_n)^2}{a_n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^3-(b_n)^3}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-b_n)(a_n{}^2+a_nb_n+b_n{}^2)}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n{}^2+a_nb_n+b_n{}^2}{a_nb_n}\right)$$

$$=3\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1+\frac{b_n}{a_n}\right)=3\times(1+1+1)=9$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

등비수열 $\left\{\frac{f(x)}{3}\right\}^n$ 의 공비가 $\frac{f(x)}{3}$ 이므로

$\frac{f(x)}{3}=0$ 또는 $\frac{f(x)}{3}=1$ 이다.

즉, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$ 이 되어야 한다.

$f(x)=0$을 만족하는 x 의 값은 $x=2$

$f(x)=3$ 을 만족하는 x 의 값을 α,β 라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=2$이므로 $\alpha+\beta=4$이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 x 의 값의 합은 $2+\alpha+\beta=2+4=6$이다.

02. 급수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=5$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=4$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4$

$\cdots\cdots$ ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$를 ㉠에 대입하면

$2\times2-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2+(-1)=1$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

$\log_2 b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n+\log_{\frac{1}{2}}a_{n+1}$에서

$$\log_2 b_n=\log_2\frac{1}{a_n}+\log_2\frac{1}{a_{n+1}}=\log_2\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

이므로

$$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n - 2n - 1}{2n+1} = 1$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n - 2n - 1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 0$$

이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 2}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} - 1\right) = 0$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} = 1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로 삼각형 ABD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2} \times r \times (3+4+5)$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times r \times 12$$

따라서 $r=1$ 이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형의 대각선의 길이는 $2r = 2$이므로 닮음비는 $5:2$이고 넓이의 비는 $25:4$이다.

또한 원의 개수는 2배씩 늘어나고

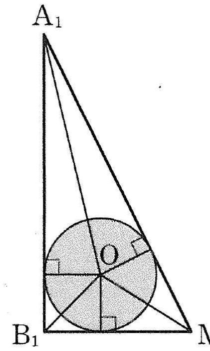
$S_1 = 2\left(\pi - 12 \times \frac{4}{25}\right) = 2\pi - \frac{96}{25}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\pi - \frac{96}{25}}{1 - \frac{4}{25} \times 2} = \frac{50\pi - 96}{17}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 내접원의 중심 O, 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle \mathrm{A_1B_1M_1} = \triangle \mathrm{A_1OB_1} + \triangle \mathrm{B_1OM_1} + \triangle \mathrm{M_1OA_1}$ 에서

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times r + \frac{1}{2} \times 1 \times r + \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + 2^2} \times r$$

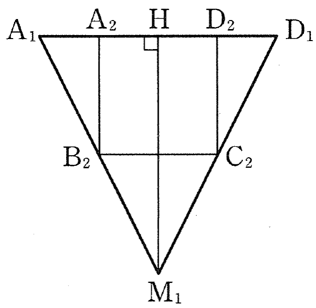
이므로

$$r = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

따라서 $S_1 = 2 - 2 \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \pi$

$$= 2 - (7 - 3\sqrt{5})\pi$$

또, 삼각형 $\mathrm{A_1M_1D_1}$의 꼭짓점 $\mathrm{M_1}$에서 변 $\mathrm{A_1D_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle \mathrm{A_1A_2B_2} \backsim \triangle \mathrm{A_1HM_1}$ 에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_1A_2}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{HM_1}}}{\overline{\mathrm{A_1H}}} = \dfrac{2}{1}$ 이므로 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = 2\overline{\mathrm{A_1A_2}}$

그런데 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = \overline{\mathrm{A_2D_2}} = 2\overline{\mathrm{A_2H}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{A_1A_2}} = \overline{\mathrm{A_2H}}$

따라서 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = \overline{\mathrm{A_1H}} = 1 = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1B_1}}$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$ 이므로 그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 도형의 넓이는 그림 R_n에서 새로 그려진 도형의 넓이의 $\frac{1}{4}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\{2-(7-3\sqrt{5})\pi\}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$$
$$=\frac{2-(7-3\sqrt{5})\pi}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{4}{3}\times\{2-(7-3\sqrt{5})\pi\}$$
$$=\frac{8-(28-12\sqrt{5})\pi}{3}$$

$p=8,\ q=28-12\sqrt{5}$ 이므로

$p+q=36-12\sqrt{5}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

주어진 조건에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$ 이다.

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(4n-2)=4\sum_{k=1}^{n}k-2n$

$=2n(n+1)-2n=2n^2$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2\times 2(n+1)^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^{n-1}$ 가 수렴하기 위해서는

$-1<\frac{r}{5}<1$이므로 $-5<r<5$이다.

따라서 만족하는 자연수 r은 $1,2,3,4$이다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(r-3)^n$ 가 발산하기 위해서는

$r-3\le -1,\ r-3\ge 1$이므로 $r\le 2, r\ge 4$.

따라서 만족하는 자연수 r은 $1,2,4,5,6,\cdots$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^{n-1}$ 가 수렴하고,

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(r-3)^n$ 가 발산하기 위한 자연수 r은 $1,2,3,4$이다. $\quad\therefore 1+2+3+4=10$

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

03. 함수의 극한

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 16

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3}{x^3}=0$이므로 다항식 $f(x)$의 차수는 2 이하이다.

조건 (나)의 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)}=1$에서

$x\to 1$일 때 (분자)$\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉, $f(1)=0$

조건 (다)에서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은 -2인데 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근은 $x=1$이므로 $f(x)$는 이차식이고 방정식 $f(x)=0$의 실근은 1과 -3이다.

따라서 $f(x)=a(x-1)(x+3)\ (a\neq 0)$으로 놓으면

조건 (나)의 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)}=1$에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{a(x-1)(x+3)}=\frac{2}{4a}=1$$

이므로 $a=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$이다.

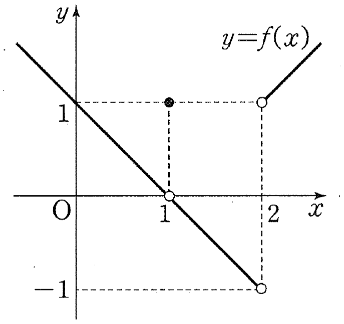
따라서 $f(5)=\frac{1}{2}\times4\times8=16$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓자.



$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x+1)}$의 값이 존재하고

$\lim_{x\to0}f(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$이다.

즉, $g(0)=b=0$

또, $\lim_{x\to2}f(x)g(2x-1)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(2x-1)=\lim_{x\to2+}f(x)g(2x-1)$

이다.

$\lim_{x\to2-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=1$이고

$g(x)=x^2+ax$ 이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(2x-1)=(-1)\times g(3)=-(9+3a)$

$\lim_{x\to2+}f(x)g(2x-1)=1\times g(3)=9+3a$에서

$-(9+3a)=9+3a$ 이므로 $a=-3$

따라서 $g(x)=x^2-3x$ 이므로 $g(10)=70$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to1+}\frac{1}{2}(x+1)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=1$

따라서

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^3-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to1+}\frac{1}{x^2+x+1}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$$S_1(t)=\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})\times\frac{t+\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\times\frac{t^2-t}{t\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

$$S_2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)(\sqrt{t}+t)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{t-\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}\times(t+\sqrt{t})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{t^2-t}{t\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\times\frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_1(t)\times S_2(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\times\frac{(t-1)^2}{t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-1)^2}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-2t+1}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ③

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2+5)$$
$$=(-2)^2+5=9$$

EBS교재

[정답] ①

$$\lim_{x\to3}\frac{(3x+5)(x-3)}{2x-6}=\lim_{x\to3}\frac{(3x+5)(x-3)}{2(x-3)}$$
$$=\lim_{x-3}\frac{3x+5}{2}$$
$$=\frac{14}{2}$$
$$=7$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

$x\to-1-0$일 때, $f(x)\to1$이므로

$\lim_{x\to-1-0}f(x)=1$이다.

또한 $x\to+0$일 때, $f(x)\to1$이므로

$\lim_{x\to+0}f(x)=1$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to-1-0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=1+1=2$

EBS교재

[정답] ②

$\lim_{x\to-2-0}f(x)=-2,\ \lim_{x\to2+0}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-2-0}f(x)+\lim_{x\to2+0}f(x)=-2+2=0$

EBS교재

[정답] ③

ㄱ. $\lim_{x\to1+0}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+0}f(-x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1+0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to1+0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(-x)$

$=2+1=3$ (참)

ㄴ. $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le-1)\\ 2 & (-1<x\le0)\end{cases}$이므로

$g(x)=(-x+a)f(x)$

$g(-1)=(1+a)f(-1)=(1+a)\times1=a+1$

$\lim_{x\to-1-0}g(x)=\lim_{x\to-1-0}(-x+a)f(x)=a+1$

$\lim_{x\to-1+0}g(x)=\lim_{x\to-1+0}(-x+a)f(x)=2(a+1)$

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$g(-1)=\lim_{x\to-1}g(x)$이어야 하므로

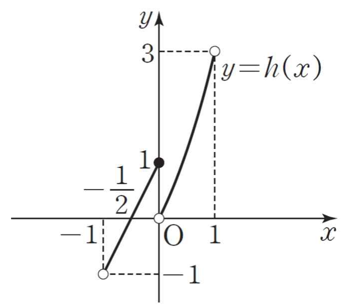
$a+1=2(a+1)$에서 $a=-1$ (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}2 & (-1<x\le0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$이므로

$h(x)=(x+1)f(x)-1$이라 하면

$h(x)=\begin{cases}2(x+1)-1 & (-1<x\le0)\\ (x+1)^2-1 & (0<x<1)\end{cases}$이고

함수 $h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 방정식 $(x+1)f(x)-1=0$ 의 실근은

$x=-\frac{1}{2}$뿐이므로 열린 구간 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 존재

하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] ①

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=-1+2=1$

EBS교재

[정답] ②

$x\to0+$일 때 $x+1\to1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x+1)=2$

$x\to1+$일 때 $x-1\to0+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x-1)=0$

따라서

$\lim_{x\to0+}f(x+1)+\lim_{x\to1+}f(x-1)=2+0=2$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ①

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-2$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=0+(-2)=-2$

EBS교재

[정답] ①

$x\to1+$일 때 $-x\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{t\to-1-}f(t)$$
$$=(-2)\times1=-2$$

$f(0)=-2$이므로

$f(0)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)f(-x)=-4$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

$$f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<1)\\ 2 & (r=1)\\ 4 & (1<r<\sqrt{2})\\ 3 & (r=\sqrt{2})\\ 2 & (\sqrt{2}<r<2)\\ 4 & (r=2)\end{cases}$$

이므로

$\lim\limits_{r\to\sqrt{2}-}f(r)+\lim\limits_{r\to2-}f(r)=4+2=6$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)+f(x)+\lim_{x\to1-0}f(x)$$
$$=1+(-1)+0=0$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3-1}=3$이므로

$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ 이다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x-1)-1}{x-1}=5$에서 $f(0)=1$이므로

$\therefore c=1$

$h=x-1$로 두면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)-1}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=5$$

$f'(x)=9x^2+2ax+b \quad \therefore b=5$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 -3이므로 $\dfrac{-a}{3}=-3$이 되어 $a=9$이다.

즉, $f(x)=3x^3+9x^2+5x+1$

$\therefore f(-1)=3\times(-1)+9\times(-1)^2+5\times(-1)+1$
$=-3+9-5+1=2$

04. 함수의 연속

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\ x^3+1 & (x\geq0)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x^2+2 & (x<0)\\ x+k & (x\geq0)\end{cases}$ 에서

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$, $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=2$, $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=k$, $g(0)=k$

이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=-1+2=1$

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=1+k$

$f(0)+g(0)=1+k$

함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$ 이다.

즉, $1=1+k$ 이므로 $k=0$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

(i) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ii) $x\neq0$일 때, 함수 $f(x)$는 첫째항이 x이고, 공비가 $\dfrac{1}{1+|x|}$인 등비급수의 합이다.

이 때 $0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$ 이므로

$$f(x)=x+\frac{x}{1+|x|}+\frac{x}{(1+|x|)^2}+\frac{x}{(1+|x|)^3}+\cdots$$

$$=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}\ (x\neq 0)$$

$x<0$ 일 때,

$$f(x)=\frac{x(1+|x|)}{|x|}=\frac{x(1-x)}{-x}=x-1$$

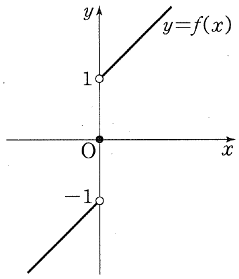
$x>0$ 일 때,

$$f(x)=\frac{x(1+|x|)}{|x|}=\frac{x(1+x)}{x}=x+1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x+1 & (x>0) \end{cases}$$

이고, 글 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=1+1=2$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.(거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)\times\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$

$=(-1)\times(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)\}^2$

$=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\times\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1\times 1=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)\}^2=1$ 이다.

한편 $\{f(0)\}^2=0^2=0$

이때 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)\}^2\neq\{f(0)\}^2$ 이므로

함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

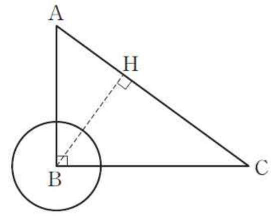
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 112

$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=4$ 이므로 $\overline{AC}=5$

그림과 같이 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

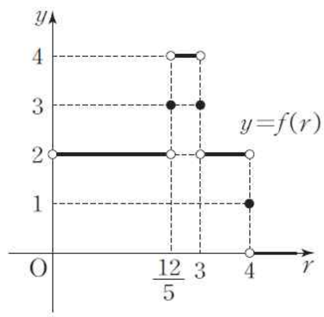


$\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BH}$ 에서

$3\times 4=5\times\overline{BH}$ 이므로 $\overline{BH}=\dfrac{12}{5}$

$$f(r)=\begin{cases} 2 & \left(0<r<\dfrac{12}{5}\right) \\ 3 & \left(r=\dfrac{12}{5}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{12}{5}<r<3\right) \\ 3 & (r=3) \\ 2 & (3<r<4) \\ 1 & (r=4) \\ 0 & (r>4) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(r)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(r)$는 $r=\dfrac{12}{5},\ r=3,\ r=4$ 에서 불연속이고, 삼차함수 $g(r)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(r)g(r)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $r=\dfrac{12}{5},\ r=3,\ r=4$ 에서 연속이어야 한다.

(i) $r=\dfrac{12}{5}$ 에서 연속

$$\lim_{x\to\frac{12}{5}-}f(r)g(r)=\lim_{x\to\frac{12}{5}-}f(r)\times\lim_{x\to\frac{12}{5}-}g(r)$$

$$=2g\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{12}{5}+}f(r)g(r)=\lim_{x\to\frac{12}{5}+}f(r)\times\lim_{x\to\frac{12}{5}+}g(r)$$

$= 4g\left(\frac{12}{5}\right)$

$f\left(\frac{12}{5}\right)g\left(\frac{12}{5}\right) = 3g\left(\frac{12}{5}\right)$

이므로 $2g\left(\frac{12}{5}\right) = 4g\left(\frac{12}{5}\right) = 3g\left(\frac{12}{5}\right)$

따라서 $g\left(\frac{12}{5}\right) = 0$

(ii) $r = 3$에서 연속

$\lim\limits_{x\to3-} f(r)g(r) = \lim\limits_{x\to3-} f(r) \times \lim\limits_{x\to3-} g(r)$

$= 4g(3)$

$\lim\limits_{x\to3+} f(r)g(r) = \lim\limits_{x\to3+} f(r) \times \lim\limits_{x\to3+} g(r)$

$= 2g(3)$

$f(3)g(3) = 3g(3)$

이므로 $4g(3) = 2g(3) = 3g(3)$

따라서 $g(3) = 0$

(iii) $r = 4$에서 연속

$\lim\limits_{x\to4-} f(r)g(r) = \lim\limits_{x\to4-} f(r) \times \lim\limits_{x\to4-} g(r)$

$= 2g(4)$

$\lim\limits_{x\to4+} f(r)g(r) = \lim\limits_{x\to4+} f(r) \times \lim\limits_{x\to4+} g(r)$

$= 0$

$f(4)g(4) = g(4)$

이므로 $2g(4) = 0 = g(4)$

따라서 $g(4) = 0$

(i), (ii), (iii)에서 $g\left(\frac{12}{5}\right) = g(3) = g(4) = 0$이므로 $g(r) = \left(r - \frac{12}{5}\right)(r-3)(r-4)$

따라서 $g(8) = \left(8 - \frac{12}{5}\right)(8-3)(8-4) = 112$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$f(x) = x^3 + 2x + k - 3$이라 하면 함수 $f(x)$가 연속함수이고 방정식 $f(x) = 0$이 열린 구간 $(0, 2)$에서 실근을 가지므로 $f(0)f(2) < 0$이어야 한다.

$f(0) = k - 3$,

$f(2) = 2^3 + 2 \times 2 + k - 3 = k + 9$

이므로 $(k-3)(k+9) < 0$이다.

즉, $-9 < k < 3$이므로 정수 k의 개수는 11이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] 21

함수 $f(x)g(x)$는 $x \neq a$일 때 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하기 위해서 $x = a$에서만 연속이 되면 된다.

$f(a)g(a) = (a+3)(-a-7)$

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)g(x) = (a+3)(-a-7)$

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)g(x) = (a^2 - a)(-a-7)$

함숫값과 극한값이 같아야 하므로

$(a+3)(-a-7) = (a^2-a)(-a-7)$

$(-a-7)(a^2 - 2a - 3) = 0$

그러므로 모든 실수 a의 값이 곱은

$-1 \times 3 \times (-7) = 21$

EBS교재

[정답] ④

$f(2)g(2) = (2^2 - 2)(2^2 + a) = 2(a+4)$

$\lim\limits_{x\to2-0} f(x)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to2-0} (x+a)(2x-1) = 3(a+2)$

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to2+0} (x^2 - x)(x^2 + a) = 2(a+4)$

이때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x = 2$에서 연속이므로

$3(a+2) = 2(a+4)$

$3a + 6 = 2a + 8$

$\therefore\ a = 2$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$에서 연속이다.

$f(1) = a + 1$이고

$\lim\limits_{x\to1-} (4x^2 - a) = \lim\limits_{n\to1+} (x^3 + a)$이므로

$4-a=1+a$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

EBS교재

[정답] ①

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1+2a$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=2-a$

, $f(1)=2-a$ 이므로 $1+2a=2-a$

따라서 $a=\dfrac{1}{3}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$\dfrac{g(1)}{f(1)}=\dfrac{1-3a+8}{-1}=3a-9$

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{1-3a+8}{-1}=3a-9$

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{1-3a+8}{3}=\dfrac{9-3a}{3}$

$3a-9=\dfrac{9-3a}{3}$ 이므로

$9a-27=9-3a\quad \therefore 12a=36\quad \therefore a=3$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+a & (x<2)\\ \dfrac{bx+8}{x-1} & (x\ge 2)\end{cases}$에서

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서도 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)$에서

$\sqrt{3-2}+a=\dfrac{2b+8}{2-1}$, $\quad 1+a=2b+8$

$a=2b+7$

$x\ge 2$일 때,

$f(x)=\dfrac{bx+8}{x-1}=\dfrac{b(x-1)+b+8}{x-1}$

$=b+\dfrac{b+8}{x-1}$

이므로 $x=2$에서 연속인 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y\,|y>-1\}$이려면 $b\ne-8$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선인 직선 $y=b$가 직선 $y=-2$와 일치해야 한다.

따라서 $b=-1$이다.

$\therefore a=2\times(-1)+7=5$

$f\left(\dfrac{a}{b}\right)=f(-5)=\sqrt{3-(-5)}+5=5+2\sqrt{2}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고, $f(x)$가 다항함수 이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x-1)=f(0)=2=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}(x+1)f(x)=f(0)=4$

Ⅴ. 다항함수의 미분법

01. 미분계수와 도함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 9

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-12}{x+2}=3$에서 $x\to-2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=12$

다항함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(-2)=12$

따라서 $f(2)=f(-2)=12$

또,

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-12}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)$

이므로 $f'(-2)=3$

$f'(2)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}$$

(조건 (가)에 의해)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}\times(-1)$$

$$= -f'(-2) = -3$$

따라서 $f(2)+f'(2) = 12+(-3) = 9$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$f(x) = ax^3-4x^2+5 \ (a\neq 0)$ 이므로

$f'(x) = 3ax^2-8x$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{2h} = -4$ 에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}f'(a) = -4$$

이므로 $f'(a) = 8$

$f'(a) = 3a^3-8a = 8$ 에서

$3a^3-8a-8 = 0$,

$(a-2)(3a^2+6a+4) = 0$

이때 a는 실수이므로 $a=2$

따라서 $f'(x) = 6x^2-8x$ 이므로

$f'(2a) = f'(4) = 96-32 = 64$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

(i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x) = \lim_{x\to 1-}\{x^2+(a-2)x\} = a-1$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x) = \lim_{x\to 1+}(-3x+a+b) = a+b-3$$

$f(1) = a+b-3$에서

$\lim_{x\to 1-}f(x) = \lim_{x\to 1+}f(x) = f(1)$이므로

$a-1 = a+b-3$

따라서 $b=2$

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$f(1) = a+b-3 = a-1$에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2+ax-2x-(a-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)^2+a(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}(x-1+a) = a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{-3x+a+2-(a-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+}\frac{-3x+3}{x-1} = -3$$

이므로 $a=-3$

(i), (ii)에서 $a+b = (-3)+2 = -1$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 36

$f(x) = (x^3+2x-3)(x^2-4)$에서

$f'(x) = (3x^2+2)(x^2-4)+(x^3+2x-3)\times 2x$

이므로

$f'(2) = (3\times 2^2+2)(2^2-4)$

$+(2^3+2\times 2-3)\times 2\times 2$

$= 36$

EBS연계 기출문항 1

[정답]④

$f(x) = x^3+7x+3$에서 $f'(x) = 3x^2+7$이므로 $f'(1) = 3+7 = 10$이다.

EBS교재

[정답] 38

$f'(x) = 2x(x^2+2x-3)+(x^2-1)(2x+2)$ 이므로

$f'(2) = 4\times 5+3\times 6 = 38$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 25

$f'(x) = 3x^2-2$

$f'(3) = 27-2 = 25$

EBS교재

[정답] ③

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{4}x^2+x-2$ 에서

$f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1$ 이므로

$f'(1)=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}+1=1$

EBS연계 기출문항 3

[정답] 2

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ 4x^3 & (x>1)\end{cases}$

이고 $x=1$에서 $f(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$$

이다. 따라서 $2a=4$ 이므로 $a=2$이다.

EBS교재

[정답] 4

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}g(x)=g(1)$ 에서

$f(1)=1+a+b=7$, $b=-a+6$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $g'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-7}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+ax-a+6)-7}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}(x+a+1)=2+a$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^4+6)-7}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{x^4-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(x+1)(x^2+1)=4$$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 에서

$2+a=4$, $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 함수 $g(x)=\begin{cases}x^2+2x+4 & (x<1)\\ x^4+6 & (x\geq1)\end{cases}$ 이므로

$g(-2)=4-4+4=4$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 500

$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}$

$=-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{5}x^5+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$

$f'(x)=-1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^n x^{n-1}$

따라서

$f'(1)=-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n$ 이므로

$f'(1)=\begin{cases}-1 & (n\text{이 홀수})\\ 0 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$f'(1)\neq0$ 이려면 n은 홀수이어야 하므로 구하는 1000 이하의 자연수 n의 개수는 500이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=6$ 에서

$x\to2$ 일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}g(x)$

다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=2$에서 각각 연속이므로 $f(2)=g(2)$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)=6$$

조건 (나)에서

$(x^2-x+2)g(x)=f(x)-3$ …… ㉠

㉠에 $x=2$를 대입하면 $4g(2)=f(2)-3$이므로

$f(2)=g(2)=1$이다.

또한, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(2x-1)g(x)+(x^2-x+2)g'(x)=f'(x)$ …… ㉡

㉡에 $x=2$를 대입하면

$3g(2)+4g'(2)=f'(2)$

따라서 $3+4g'(2)=f'(2)$이므로

$f'(2)=7,\ g'(2)=1$이다.

따라서, $f'(2)+g(2)=8$이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 11

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+x)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(a+x)-f(a)}{h}\le 0$$

이 조건을 만족하는 점은 극값이나 좌우에서 미분계수의 부호가 반대인 점이므로

$a=0,1,2,3,5$ 이다.

따라서 $1+2+3+5=11$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ①

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-3$에서 (분모)가 0으로 가까워지므로

$f(2)-2=0$에서 $f(2)=2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-3$

$g(x)=(x-1)^2$에서 $g'(x)=2(x-1)$이므로

$g(2)=1,\ g'(2)=2$

$x=2$일 때 $y=f(x)g(x)$에서의 접선의 기울기는

$y'_{x=2}=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1$

따라서 기울기가 1이다.

02. 도함수의 활용(1)

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$f(x)=x^3-3ax^2+15x$ 에서

$f'(x)=3x^2-6ax+15$

열린 구간 $(0,\ 2)$에서 삼차함수 $f(x)$가 증가하려면 ㅁ

$f'(x)=3x^2-6ax+15=3(x-a)^2+15-3a^2$ 이므로

(i) $a\le0$ 일 때

$f'(x)>f'(0)=15>0$ 이므로 성립한다.

(ii) $0<a<2$ 일 때

$f'(x)\ge f'(a)=15-3a^2$ 에서

$0<a^2<4$ 이므로 $f'(x)>0$ 이 성립한다.

(iii) $a\ge2$ 일 때

$f'(x)>f'(2)=12-12a+15\ge0$이려면

$12a\le27$, $a\le\frac{9}{4}$ 이어야 하므로 $2\le a\le\frac{9}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 $a\le\frac{9}{4}$ 이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 8

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)\ (0<c<1)$

을 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에서 $|f'(c)|\le5$ 이므로

$\left|\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\right|\le5$

$|f(1)-3|\le5$ (조건 (다)에 의해)

$-5\le f(1)-3\le5$, $-2\le f(1)\le8$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 8이다.

참고

$f(x)=5x+3$ 이면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키고 $f(1)=8$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$f(x)=-3x^3+4x+1$이라 하면

$f'(x)=-9x^2+4$이므로

$f'(1)=-9\times1^2+4=-5$

기울기가 -5이고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-5(x-1)+2$, 즉 $y=-5x+7$이다.

따라서 $a=-5$, $b=7$이므로

$ab=(-5)\times7=-35$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2ax+3$에서

$f'(x)=x^2-4x+2a$

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ 3)$에서 감소하므로

$f'(a)\le0$, $f'(3)\le0$이다.

$f'(a)=a^2-4a+2a\le0$

$a^2-2a\le0$, $a(a-2)\le0$

따라서 $0\le a\le2$ ……㉠

$f'(3)=9-12+2a\le0$

$2a\le3$

따라서 $a\le\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0\le a\le\frac{3}{2}$이므로

$f(3)=\frac{1}{3}\times3^3-2\times3^2+2a\times3+3$

$\quad=6a-6$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 $6\times\frac{3}{2}-6=3$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] 97

(나)에 의해 $f(2)-g(2)=0$ 이고

$f(2)=g(2)=8f(2)-7$ 이므로

$f(2)=1=g(2)$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$h(2)=f(2)-g(2)=0$ 이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=2,$$

즉 $h'(2)=2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}f'(2)-g'(2)&=f'(2)-12f(2)-8f'(2)\\&=-7f'(2)-12=2\end{aligned}$$

$f'(2)=-2$

이고 $g'(2)=12f(2)+8f'(2)=-4$ 이다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)$

$y=-4x+9$

이고 $a^2+b^2=16+81=97$ 이다.

EBS교재

[정답] ④

점 $(2,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=1$

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)=4+4f'(2)$

두 접선이 서로 수직이고 $f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이므로

$f'(2)\times g'(2)=-1$ …… ㉠

$f'(2)\times\{4+4f'(2)\}=-1$

$\{2f'(2)+1\}^2=0$

$\therefore\ f'(2)=-\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$g'(2)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+2$ …… ㉡

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-4=2(x-2)$

$\therefore\ y=2x$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$-\frac{1}{2}x+2=2x \quad \therefore\ x=\frac{4}{5}$

$x=\frac{4}{5}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{8}{5}$

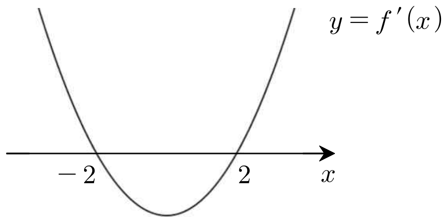
따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$이므로

$a+b=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ⑤

ㄱ. $f'(-3)=f'(3)$이고 $f'(x)$가 이차함수이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이다. 그리고 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-2)=0$이고 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $y=f'(x)$의 그래프는 아래와 같다.

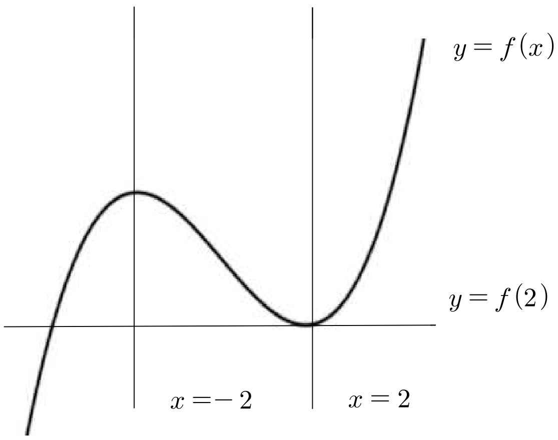


따라서

$$f'(x)=a(x+2)(x-2)$$
$$=a(x^2-4)$$

그러므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 아래와 같고 $y=f(2)$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.(참)



ㄷ. $f'(x)=a(x^2-4)$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-4ax+b$이다.

점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(f(-1))=f'(-1)(x+1)$

$y=-3a(x+1)+\left(\frac{11}{3}a+b\right)$

이때, 점 $(2,\ f(2))=\left(2,\ -\frac{16}{3}a+b\right)$를 위 방정식에 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.(참)

EBS교재

[정답] ⑤

ㄱ. $f(-x)=-f(x)$에서 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0)$

즉, $f(0)=0$(참)

ㄴ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$이다.

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c_1)$, 즉 $f'(c_1)=1$인 실수 c_1이 열린 구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다.

또한 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f'(c_2)$, 즉 $f'(c_2)=1$인 실수 c_2가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다

EBS교재

[정답] ③

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉠

ㄱ. 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서 $f(0)>f(1)$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=4(x+1)x(x-1)$

$=4x^3-4x$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 계수를 비교하면

$a=0$, $b=-2$, $c=0$이므로

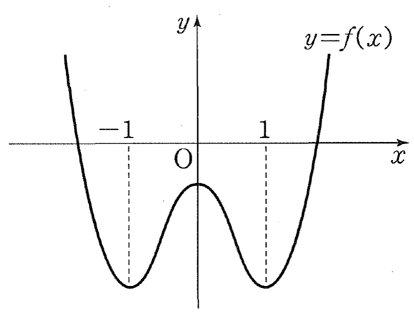
$f(x)=x^4-2x^2+d$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$f(0)=d$, $f(-1)=f(1)=-1+d$

이므로 $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

주어진 삼차함수

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 실수 전체 구간에서 증가하도록 하려면,

도함수인 $f'(x)$가

$f'(x)=3x^2+2ax+2a\geq 0$을 모든 실수에 대해 항상 만족해야 한다.

그러므로 판별식을 이용하면,

$\dfrac{D}{4}=a^2-6a\leq 0$이 된다.

그러므로, $0\leq\ a\ \leq 6$이 된다.

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로, 구하는 $M+m=6$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 3

$f(x)=x^4+ax^3$에서 $f'(x)=4x^3+3ax^2$이므로

$f(-1)=1-a$, $f'(-1)=3a-4$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1,\ 1-a)$에서의 접선의 기울기가 $3a-4$이므로 접선의 방정식은

$y=(3a-4)(x+1)+1-a$,

즉 $y=(3a-4)x+2a-3$ 이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=(3a-4)x+2a-3$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $x^4+ax^3=(3a-4)x+2a-3$, $x^4+ax^3-(3a-4)x-2a+3=0$의 실근과 같다.

$x^4+ax^3-(3a-4)x-2a+3=0$ …… ㉠

이때 $x=-1$은 방정식 ㉠의 중근이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	a	0	$4-3a$	$3-2a$
		-1	$1-a$	$a-1$	$3-2a$
-1	1	$a-1$	$1-a$	$2a-3$	0
		-1	$2-a$	$2a-3$	
	1	$a-2$	$3-2a$	0	

$(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+3-2a\}=0$ 에서

$x=-1$ (중근) 또는

$x^2+(a-2)x+3-2a=0$

따라서 두 점 B, C의 x좌표는 방정식 $x^2+(a-2)x+3-2a=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2-a=-1$이다.

따라서, $a=3$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

$f(x)=-x^3+3x+1$ 에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1, $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다. 따라서 구하는 직선의 기울기는 2이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 160

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $y=f(x)$의 그래프가

$x=k$인 점에서 x축에 접하므로

$f(x)=(x-k)^2(x+a)$(a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-k)(x+a)+(x-k)^2$

$=(x-k)(3x+2a-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=\dfrac{k-2a}{3}$

조건 (나)에서 $f(k)=0$이고, 조건 (다)에서 함수 $f(x)$는 $x=3k$에서

극댓값 32를 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이고, $x=\dfrac{k-2a}{3}$

에서 극대이다.

따라서 $\dfrac{k-2a}{3}=3k$에서 $a=-4k$

$\therefore\ f(x)=(x-k)^2(x-4k)$

$f(3k)=32$이므로

$(3k-k)^2(3k-4k)=32$, $-4k^3=32$,

$k^3=-8$

$\therefore\ k=-2$

따라서 $f(x)=(x+2)^2(x+8)$이므로

$f(2)=(2+2)^2(2+8)=160$

03. 도함수의 활용(2)

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

두 함수 $y=x^4+x+3$, $y=4x^3+x$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 방정식 $x^4+x+3=4x^3+x$,

즉 $x^4-4x^3+3=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-4x^3+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

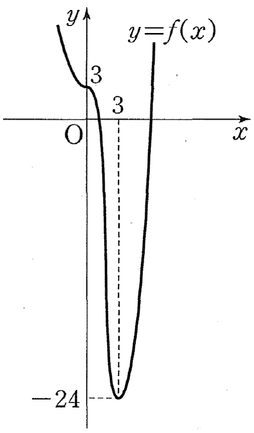
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -24를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나므로 두 함수 $y=x^4+x+3$, $y=4x^3+x$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$f(x)=x^3-ax^2+2$에서

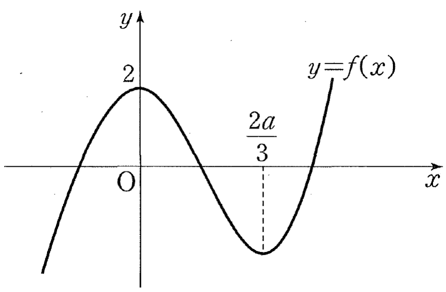
$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2a}{3}$

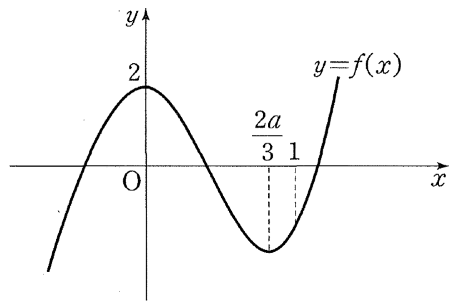
$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=\frac{2a}{3}$에서 극솟값 $f\left(\frac{2a}{3}\right)$를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $0<\frac{2a}{3}<1$, 즉 $0<a<\frac{3}{2}$일 때



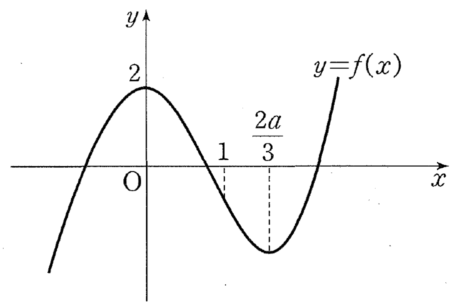
구간 $[1, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이므로

$f(1)=1-a+2=3-a=-2$

$a=5$

그런데 $a=5$는 $0<a<\frac{3}{2}$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\frac{2a}{3}\geq 1$, 즉 $a\geq\frac{3}{2}$일 때



구간 $[1, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(\frac{2a}{3}\right)$이므로

$f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{8a^3}{27}-\frac{4a^2}{9}+2=-\frac{4a^3}{27}+2=-2$

$\frac{4a^3}{27}=4$, $a^3=27$

이때 $a\geq\frac{3}{2}$이므로 $a=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=3$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$f(x)=x^3-6x^2+32$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(4)=4^3-6\times4^2+32=0$이므로 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $x>4$이어야 한다.
따라서 $a\geq4$이므로 정수 a의 최솟값은 4이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+12t^2+2$$

점P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+24t=-12(t-1)^2+12$$ 이므로

점 P의 가속도는 $t=1$일 때 최대이고, 이 순간 점 P의 속도는 ㉠에서 $-1+12+2=10$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

ㄱ. 미적분의 기본정리에 의해

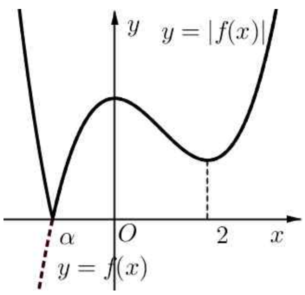
$$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx<0$$ 이므로

$f(2)<f(0)<0$

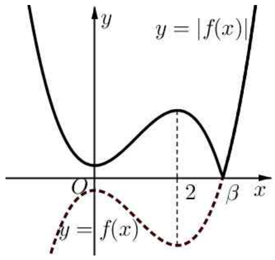
$\therefore\ |f(0)|<|f(2)|$ (참)

ㄴ. $f(0)f(2)\geq0$이므로 $f(0), f(2)$는 둘 다 양수이거나 음수이다.

둘 다 양수인 경우 $f(\alpha)=0$이라 하면 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha, 2$에서 극소를 가진다.



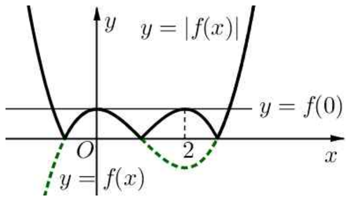
둘 다 음수인 경우 $f(\beta)=0$이라 하면 함수 $|f(x)|$는 $x=0, \beta$에서 극소를 가진다.



(참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로

$f(0)>0, f(2)<0$이고, $|f(0)|=|f(2)|$



따라서 $|f(x)|=f(0)$의 교점은 4개

EBS교재

[정답] ③

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉠

ㄱ. 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
따라서 $f(0)>f(1)$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=4(x+1)x(x-1)$

$\quad=4x^3-4x$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 계수를 비교하면

$a=0$, $b=-2$, $c=0$이므로

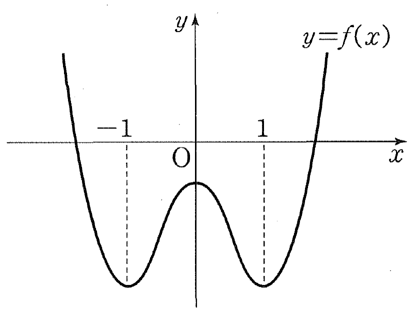
$f(x)=x^4-2x^2+d$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$f(0)=d$, $f(-1)=f(1)=-1+d$

이므로 $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 27

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3+3x^2-9x-a$

$h'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	극대	↘	극소	↗	$2-a$

함수 $h(x)$는 $x=-3$일 때 극대, $x=1$일 때 극소이고 $h(-3)=27-a$, $h(1)=-5-a$, $h(2)=2-a$이므로 닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $27-a$이다.

즉, 닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 부등식 $h(x)\le 0$가 성립하려면 $27-a\le 0$이어야 하므로

$a\le 27$

따라서 닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 부등식 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 27이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 12

P, Q의 속도를 구하면

$\mathrm{P}'(t)=t^2+4,\quad \mathrm{Q}'(t)=4t$

두 점의 속도가 같아지는 시각은

$t^2+4=4t,\ (t-2)^2=0$

$\therefore\ t=2$

시각 t일 때 두 점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t+\frac{28}{3}\right|$ 에서

$t=2$일 때에는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{8}{3}-8+8+\frac{28}{3}\right|=\frac{36}{3}=12$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 두 점 사이의 거리는 12이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

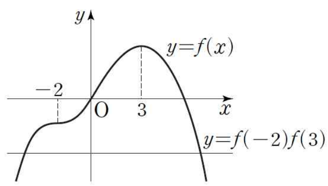
[정답] ③

ㄱ. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

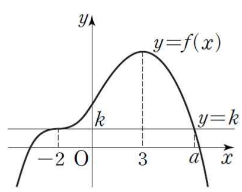
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. [반례] $f(-2)<0$, $f(3)>0$일 때, $f(-2)f(3)<0$이므로 $f(3)>f(-2)f(3)$이다. (거짓)



ㄷ. 다음은 $f(-2)=f(a)=k$일 때, 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 그래프이다.



$a>3$이므로 $-a<-3$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-a,\ \infty)$에서 최댓값 $f(3)$을 가진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 36

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$

함수 $y=f'(x)$가 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{3}=1$

$\therefore\ a=-3$

함수 $y=f'(x)$가 대칭축이 $x=1$인 이차함수이므로

$x=1-k$ $(k>0)$에서 극대이면 $x=1+k$에서 극소이다.

$f(x)=x^3-3x^2+bx+c$

$f(1-k)-f(1)$

$=\{(1-k)^3-3(1-k)^2+b(1-k)+c\}$

$\quad-(1-3+b+c)$

$=-k^3+(3-b)k$,

$f(1)-f(1+k)$

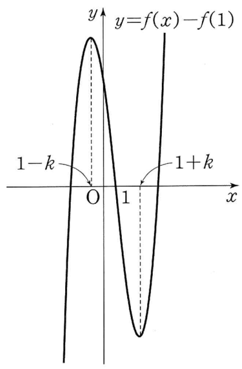
$=(1-3+b+c)$

$-\{(1+k)^3-3(1+k)^2+b(1+k)+c\}$

$=-k^3+(3-b)k$

이므로 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프는

[그림 1]과 같다.



[그림 1]

방정식 $|f(x)-f(1)|=f(5)$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

두 함수 $y=|f(x)-f(1)|$, $y=f(5)$의 그래프는 [그림 2]와

같다.

[그림 3]에서

$f(x)-f(1)-f(5)=(x-1+k)^2(x-5)$이므로

$f'(x)=2(x-1+k)(x-5)+(x-1+k)^2$에서

$f'(1+k)=2\times 2k\times(k-4)+(2k)^2=0$

$8k^2-16k=0$

$8k(k-2)=0$

$\therefore\ k=2$ $(\because\ k>0)$

따라서

$f'(x)=2(x+1)(x-5)+(x+1)^2$

$=3x^2-6x-9$이므로

$f'(5)=3\times 5^2-6\times 5-9=36$

Ⅵ. 다항함수의 적분법

01. 부정적분과 정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$S(x)=\int_1^x f(t)dt$ 라 하면

$S(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$ 이므로

$\Delta S=S(1+\Delta t)-S(1)$

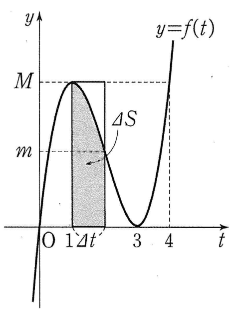
한편 $S'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=f(x)$ 이므로

$\lim\limits_{\Delta t\to 0+}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0+}\dfrac{S(1+\Delta t)-S(1)}{\Delta t}$

$=S'(1)=f(1)=4$

[다른 풀이]

$\Delta t>0$ 일 때, 함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[1,\ 1+\Delta t]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면



$m\times\Delta t\le\Delta S\le M\times\Delta t$

이므로 $m\le\dfrac{\Delta S}{\Delta t}\le M$

$\Delta t\to 0+$ 이면

$\lim\limits_{\Delta t\to 0+}m\le\lim\limits_{\Delta t\to 0+}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}\le\lim\limits_{\Delta t\to 0+}M$

이때 함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[t,\ 1+\Delta t]$에서 연속이므로

$\lim\limits_{\Delta t\to 0+}m=\lim\limits_{\Delta t\to 0+}M=f(1)$

따라서 $\lim\limits_{\Delta t\to 0+}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=f(1)=4$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

조건에서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=0$

이므로

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0,\ g(1)=\int_0^1 f(t)dt=0$

$g(3)=\int_0^3 f(t)dt$

$=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^3 f(t)dt=0+0=0$

$g(6)=\int_0^6 f(t)dt$

$=\int_0^3 f(t)dt+\int_3^6 f(t)dt=0+0=0$

이때 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(x)$는 사차함수이고, 방정식 $g(x)=0$의 근이 $x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=6$ 이므로 사차방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$\int_{-2}^2(4x^3+3x^2-2x-1)dx=\int_{-2}^2(3x^2-1)dx$

$=2\int_0^2(3x^2-1)dx=2\Big[\,x^3-x\Big]_0^2$

$=2(2^3-2)=12$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$g(x)=\int_0^x(t^2-4t+4)f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x^2-4x+4)f(x)$

$=(x-2)^2f(x)$

그런데 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수이고, 함수

$|g'(x)| = |(x-2)^2 f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

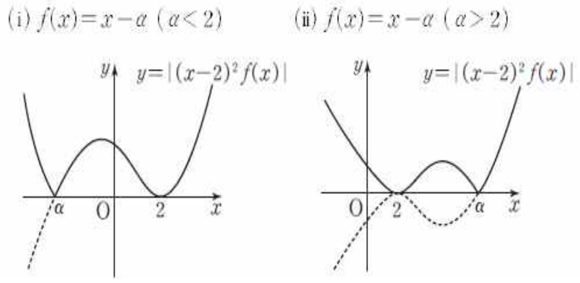
$f(x) = x - 2$

따라서

$g'(x) = (x-2)^2(x-2) = (x-2)^3$

이므로

$g'(4) = (4-2)^3 = 8$



EBS연계 기출문항 1

[정답] ③

$n=1$일 때,

$f(x)=x^2$이고 $\mathrm{P}(0,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$이므로

구하고자 하는 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}\times 2\times 1 + \int_0^1 (1-x^2)dx$$

$$= 1 + \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

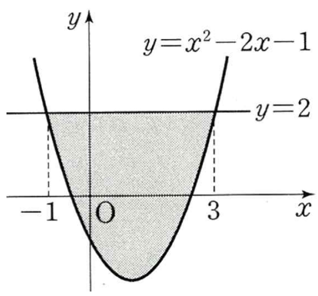
EBS교재

[정답] ①

$x^2-2x-1=2$ 에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{-1}^{3} \{2-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= (-9+9+9) - \left(\frac{1}{3}+1-3\right)$$

$$= \frac{32}{3}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 19

정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 x f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^3+6x^2+32x)\,dx$$

$$= \left[x^4+2x^3+16x^2\right]_0^1 = 19$$

EBS교재

[정답] ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 xf(x)dx$$

$$= \int_0^1 x(2x^2+4x-2)dx$$

$$= \int_0^1 (2x^3+4x^2-2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{6}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

$f'(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax$ $(a<0)$라 하면

$f(x)=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$ (C는 적분상수)

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극소	↘	극대	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0, $x=2$에서 극댓값 04을 가지므로

$f(0)=C=0$

$f(2)=\frac{8}{3}a-4a+C=4,\ a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2$이므로

$f(1)=-1+3=2$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\{(n+1)^4+(n+2)^4+\cdots+(n+n)^4\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2=\frac{31}{5}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 27

(가)에서 $f(x)g(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$

(다)에서 $g'(x)=2f(x),\ g(1)=0$이므로

$f(x)=x+1,\ g(x)=(x-1)(x+3)$

$(\because f'(x)=1\ )$

$$\therefore\ \int_0^3 3g(x)dx=\int_0^3 3(x^2+2x-3)dx=27$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3+4x^2-2x-1)dx$$

$$=\int_0^1(4x^2-1)dx=\frac{1}{3}$$

02. 정적분의 활용

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 50

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$의 x절편을 $x=0$, $x=k(k>0)$라 하고 이 곡선과 x축 및 $x=10$으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$\int_0^{10}f(x)dx=0$에서

$$\int_0^k f(x)dx+\int_k^{10}f(x)dx=0$$

$$\int_0^k\{-f(x)\}dx=\int_k^{10}f(x)dx$$

따라서 $S_1=S_2$이다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(10,\ 10)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $S_1=S_2$이므로 S는 직각삼각형 POH의 넓이와 같다. 따라서

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times10\times10=50$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각 $f(t)$, $g(t)$일 때, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$F(t)$, $G(t)$라 하면

$$F(t)=F(0)+\int_0^t f(t)dt=\int_0^t f(t)dt$$

$$G(t)=G(0)+\int_0^t g(t)dt=\int_0^t g(t)dt$$

두 점 P, Q가 시각 $t=x(x>0)$에서 만나면 $F(x)=G(x)$

즉,

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x g(t)dt$$

$$\int_0^x \{12t(t-1)(t-3)\}dt=\int_0^x at\,dt$$

$$\left[3t^4-16t^3+18t^2\right]_0^x=\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^x$$

$$3x^4-16x^3+18x^2=\frac{1}{2}ax^2$$

$$3x^2\left(x^2-\frac{16}{3}x+6-\frac{1}{6}a\right)=0$$

이때 $x>0$이므로

$$x^2-\frac{16}{3}x+6-\frac{1}{6}a=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠이 양수인 중근을 갖거나 양의 실근을 한 개만 가지면 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 한 번만 만나게 된다.

이 때

$h(x)=x^2-\dfrac{16}{3}x+6$이라 하면

함수 $y=h(x)\,(x>0)$의 그래프는 그림과 같고 ㉠의 실근은 곡선 $y=h(x)\,(x>0)$과 직선 $y=\dfrac{a}{6}(a>0)$의 교점의 x좌표이다.

그림에서 곡선 $y=h(x)\,(x>0)$과 직선 $y=\dfrac{a}{6}(a>0)$이 접할 수 없으므로 ㉠이 양수인 중근을 갖는 경우는 존재하지 않는다. 따라서 ㉠이 양의 실근을 한 개만 가져야 하므로 곡선 $y=h(x)\,(x>0)$과 직선 $y=\dfrac{a}{6}(a>0)$이 한 점에서 만나야 한다. 즉,

$\dfrac{a}{6}\geq 6$에서 $a\geq 36$

따라서 양수 a의 최솟값은 36이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부부은 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}\times 2^3-2\times 2^2+4\times 2=\frac{8}{3}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

곡선 $y=x^2+a^2$ 위의 점 $B(1,\ a^2+1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^2+1)=2(x-1)$, 즉 $y=2x+a^2-1$

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+a^2-1$의 교점의 x좌표는

$y=2x+a^2-1$에서 $x^2-2x-(a-1)(a+1)=0$

$[x-(a+1)][x+(a-1)]=0$

$x>1$에서 $x=a+1$이므로

$$\frac{S}{9}=\int_1^{a+1}(2x+a^2-1-x^{2)}dx$$

$$=\left[x^2+(a^2-1)x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^{a+1}$$

$$=(a+1)^2+(a^2-1)(a+1)-\frac{1}{3}(a+1)^3-a^2+\frac{1}{3}$$

$$=a^2+2a+1+(a^3+a^2-a-1)$$

$$-\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)-a^2+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$

또한 $a=3$일 때 $S=\frac{2}{3}\times 3^3=18$이므로

$\frac{2}{3}a^3=2$에서 $a^3=3$

따라서 $a=\sqrt[3]{3}$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$ 이므로 함수 $h(x)$는 기함수이다.

그러므로 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$는 우함수이고 함수 x가 기함수이므로 함수 $xh'(x)$는 기함수이다.

따라서

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=5\times 2\int_{0}^{3}h'(x)dx=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$h(3)-h(0)=1$이고 함수 $h(x)$는 기함수이므로 $h(0)=0$이다.

따라서 $h(3)=h(0)+1=0+1=1$

EBS교재

[정답] ③

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x)=3ax^2+b$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=3xf'(x)$, 즉 $y=9ax^3+3bx$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $y=2f'(x)$, 즉 $y=6ax^2+2b$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1}3xf'(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}2f'(x)dx=2\int_{0}^{1}2f'(x)dx=4\int_{0}^{1}f'(x)dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x+2)f'(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}3xf'(x)dx+\int_{-1}^{1}2f'(x)dx$$

$$=4\int_{0}^{1}f'(x)dx$$

$$=4\times 2\left(\because \int_{0}^{1}f'(x)dx=2\right)$$

$$=8$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$f(x)=x^3+2x^2+2$, $g(x)=-x^2+6$이라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2+2=-x^2+6$에서

$x^3+3x^2-4=0$, $(x+2)^2(x-1)=0$

따라서, $x=-2$ 또는 $x=1$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+6)-(x^3+2x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{27}{4}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $\frac{4}{9}$

$f(x)=ax^2+b$와 $y=x$의 교점의 x좌표는 $ax^2+b=x$, 즉 $ax^2-x+b=0$의 두 실근의 같다. 따라서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$1+2=\dfrac{1}{a}$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$ 이고

$1\times2=-\dfrac{b}{a}$ 이므로 $b=-\dfrac{2}{3}$ 이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}$ 이므로

$$A-B=2\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}-x\right)dx=\frac{4}{9}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

곡선 $y=|x(x-2)|$ 와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S=\int_0^3|x(x-2)|dx$$

$$=-\int_0^2 x(x-2)dx+\int_2^3 x(x-2)dx$$

$$=-\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=-\left\{\left(\frac{8}{3}-4\right)-0\right\}+\left\{(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}$$

$$=-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

$y=v(t)$ 가 이차함수이므로 $v(t)=at^2+bt+c$ $(a\neq0)$ 로 놓으면 $y=v(t)$ 의 그래프가 점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로 $c=2$

$\therefore\ v(t)=at^2+bt+2$

또, $y=v(t)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 0)$ 을 지나므로

$4a+2b+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$t=2$ 일 때까지 점 P 가 움직인 거리가 6 이므로

$$\int_0^2(at^2+bt+2)dt=6$$

$$\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+2t\right]_0^2=6$$

$$\frac{8}{3}a+2b+4=6$$

$\dfrac{8}{3}a+2b=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡을 하면

$$\frac{4}{3}a=-4$$

따라서 $a=-3,\ b=5$ 이므로

$v(t)=-3t^2+5t+2$

따라서 출발한 지 3초 후의 점 P 의 속도는

$v(3)=-3\times3^2+5\times3+2=-10$

Ⅰ. 순열과 조합

01. 순열

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

A의 위치에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) A가 첫 번째에 서는 경우

B는 두 번째에 서야 하므로 나머지 3명을 아래 그림의 □ 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$_3\mathrm{P}_3 = 3! = 6$

(ⅱ) A가 두 번째에 서는 경우

B는 첫 번째 또는 세 번째에 서야 하고, 이 각각에 대하여 나머지 3명을 아래 그림의 □ 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2 \times {_3\mathrm{P}_3} = 2 \times 3! = 12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$6 + 12 = 18$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 432

먼저 어린이 3명은 한 사람으로 생각하고, 남자 어른 3명과 함께 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)! = 3! = 6$

이 각각에 대하여 어린이 3명이 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$3! = 6$

이 각각에 대하여 3명의 남자 어른과 서로 이웃한 어린이 3명이 둘러앉은 자리의 사이에 있는 서로 다른 4개의 자리 중 2개를 선택하여 여자 어른이 앉으면 여자 어른 2명은 이웃하지 않으므로 이 경우의 수는

$_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 6 \times 12 = 432$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

서로 다른 5개의 과일 중에 2개를 택하여 두 접시 A, B에 담는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$_5\mathrm{P}_2 = 5 \times 4 = 20$

이 각각에 대하여 나머지 과일 3개를 두 접시 C, D에 담는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$20 \times 8 = 160$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

맨 앞과 맨 뒤에 같은 문자가 나열되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) a가 맨 앞과 맨 뒤에 나열되는 경우

나머지 6개의 문자 a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$\frac{6!}{2!3!} = 60$

(ⅱ) b가 맨 앞과 맨 뒤에 나열되는 경우

나머지 6개의 문자 a, a, a, c, c, c를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$\frac{6!}{3!3!} = 20$

(ⅲ) c가 맨 앞과 맨 뒤에 나열되는 경우

나머지 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 열렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!}=60$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 문자열의 개수는

$60+20+60=140$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

1부터 5까지 자연수가 하나씩 쓰여진 카드 5장에서 서로 다른 3장의 카드를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_3=5\times4\times3=60$$

3장의 카드에 쓰여진 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 3장의 카드에 쓰여진 수가 모두 홀수인 경우의 수와 같으므로

$${}_3P_3=3\times2\times1=6$$

따라서 1부터 5까지 자연수가 하나씩 쓰여진 카드 5장에서 서로 다른 3장의 카드를 택하여 일렬로 나열할 때, 3장의 카드에 쓰여진 수의 곱이 짝수인 경우의 수는

$60-6=54$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합이 모두 9가 되도록 앉기 위해서는 1번과 8번, 2번과 7번, 3번과 6번, 4번과 5번이 서로 마주 보고 앉아야 한다. 1번 앞에는 8이 항상 앉아야 하므로 이 두 사람을 먼저 고정시키고 난 후, 나머지 6자리에 2, 3, 4번을 배치하는 경우의 수를 구하면

$${}_6P_3=6\times5\times4=120$$

5, 6, 7번 학생은 각각 2, 3, 4 앞에 앉아야 하므로 자리는 고정이 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 120

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

모든 이웃한 숫자의 합이 4이하가 되도록 하기 위해서는 숫자 3 옆에는 2가 오면 안 된다.

가능한 경우를 분류하면 다음과 같다.

(ⅰ) 3이 맨 앞에 오는 경우

두 번째에는 1이 와야 하고 나머지 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

(ⅱ) 3이 맨 뒤에 오는 경우

뒤에서 두 번째에는 1이 와야 하고 나머지 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

(ⅲ) 3이 맨 앞 또는 맨 뒤에 오지 않는 경우

3 좌우에는 1이 각각 와야 하고 이것을 하나의 숫자로 보고 나머지 숫자 1, 2, 2와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$6+6+12=24$

02. 조합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

세 원소의 합이 홀수인 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) 홀수가 3개인 경우

부분집합의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ⅱ) 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우

2, 4, 6, 8, 10중 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

이 각각에 대하여 홀수 1, 3, 5, 7, 9중 1개를 택하는 경우의 수는

5

따라서 부분집합의 개수는 곱의 법칙에 의해

$10\times5=50$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 부분집합의 개수는 합의 법칙에 의해

$10+50=60$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

서로 다른 7개의 공을 세 상자에 빈 상자가 없고 서로 다른 개수로 남김없이 나누어 넣으려면 각각 4개, 2개, 1개씩 넣어야 한다.

4개의 공을 넣을 상자를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1$

이 각각에 대하여 이 상자에 넣을 4개의 공을 선택하는 경우의 수는

${}_7C_4$

이 각각에 대하여 2개의 공을 넣을 상자를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1$

이 각각에 대하여 이 상자에 넣을 2개의 공을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2$

이 각각에 대하여 남은 공 1개를 마지막 상자에 넣는 경우의 수는

1

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_7C_4\times{}_2C_1\times{}_3C_2\times1$

$=3\times35\times2\times3\times1=630$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

${}_5C_3={}_5C_2$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복 조합의 수이므로

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의해

$10\times15=150$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$x+y+z=12$ (x,y,z는 2이상의 자연수) …… ㉠

$x=x'+2, y=y'+2,\ z=z'+2$ (x',y',z'은 음이 아닌 정수)

라 하고 방정식 ㉠에 대입하면

$(x'+2)+(y'+2)+(z'+2)=12$

$x'+y'+z'=6$ …… ㉡

방정식 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 x',y',z'의 순서쌍 (x',y',z')의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

따라서 방정식 ㉠을 만족시키는 2이상의 자연수 x,y,z의 모든 순서쌍 (x,y,z)의 개수는 28이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

a, b, c, d, e 중에서 0인 것 2개를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2$이고 그 경우 중 하나의 경우로서 $a=0$, $b=0$일 때 $c+d+e=10$을 만족시키는 자연수인 해의 개수는

${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2$

이다. 따라서 구하는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_9C_2=10\times36=360$

EBS교재

[정답] 120

$x'=x-2$, $y'=y-2$, $z'=z-2$, $w'=w-2$로 놓으면 x, y, z, w가 2이상의 자연수이므로 x', y', z', w'은 음이 아닌 정수이다.

주어진 방정식에서

$(x'+2)+(y'+2)+(z'+2)+(w'+2)=15$

$\therefore x'+y'+z'+w'=7$ ⋯⋯ ㉠

구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z',\ w'$의 순서쌍 $(x',\ y',\ z',\ w')$의 개수와 같다.

즉, 구하는 개수는 서로 다른 4개의 문자 $x',\ y',\ z',\ w'$에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3$

$=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③

$x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 w는 $1, 2$이다.

i) $w=1$일 때, $x+y+z=9$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6=28$

ii) $w=2$일 때, $x+y+z=4$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

따라서 $28+3=31$이다.

EBS교재

[정답] ②

w의 값에 따라 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $w=0$일 때,

주어진 방정식은 $x+y+z=7$이고 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2$$
$$=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

(ii) $w=1$일 때,

주어진 방정식은 $x+y+z=2$이고 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2$$
$$=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의해

$36+6=42$

EBS연계 기출문항 3

[정답] 21

$${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

네 수의 곱이 짝수이므로 네 수 중 적어도 하나는 짝수이다. 또 네 수의 합이 짝수이므로 홀수가 짝수 개 포함되어 있어야 한다. 이를 만족하는 경우를 분류하면 다음과 같다.

(i) 짝수가 4개인 경우

5개의 짝수 중에서 서로 다른 4개를 선택하는 경우의 수이므로

${}_5C_4=5$

(ii) 짝수가 2개인 경우

5개의 짝수 중에서 서로 다른 2개를 선택하고 5개의 홀수 중에서 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수이므로

${}_5C_2\times{}_5C_2=100$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$5+100=105$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

방정식 $|a|+|b|+|c|=5$에서

$|a|=A,\ |b|=B,\ |c|=C$라 하자.

(i) $A,\ B,\ C$가 모두 0이 아닌 경우

방정식 $A+B+C=5$를 만족시키는 양의 정수 $A,\ B,\ C$의 모든 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

각각의 경우에 대하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수가 $2^3=8$이므로 방정식 $|a|+|b|+|c|=5$를

만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$6\times8=48$

(ii) A, B, C 중 0인 것이 1개인 경우

0인 것을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

만약 A가 0일 때,

방정식 $B+C=5$를 만족시키는 양의 정수 $(B,\ C)$의 모든 순서쌍 $(B,\ C)$의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_2H_3={}_4C_3=4$

각각의 경우에 대하여 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수가 $2^2=4$이므로 방정식 $|b|+|c|=5$를 만족시키는 정수 b, c의 모든 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는

$4\times4=16$

B가 0일 때의 경우의 수와 C가 0일 때의 경우의 수도 이와 같으므로 A, B, C 중 0인 것이 1개인 경우에 방정식 $|a|+|b|+|c|=5$를 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$3\times16=48$

(iii) A, B, C 중 0인 것이 2개인 경우

0인 것을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

만약 A, B가 0일 때, $C=5$이므로 방정식 $|c|=5$를 만족시키는 정수 c의 개수는 2이다.

나머지 경우도 이와 같으므로 방정식 $|a|+|b|+|c|=5$를 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$3\times2=6$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의해

$48+48+6=102$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

A, B, C, D, E가 받는 빵의 개수는 1이상 4이하이고 $a\le b<c\le d\le e$를 만족시키므로

$1\le a\le b<c\le d\le e\le 4$

이 경우의 수는 $1\le a\le b\le c\le d\le e\le 4$를 만족시키는 경우의 수에서

$1\le a\le b=c\le d\le e\le 4$를 만족시키는 경우의 수를 빼면 된다.

우선 $1\le a\le b\le c\le d\le e\le 4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 1이상 4이하의 자연수에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

그리고 $1\le a\le b=c\le d\le e\le 4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 1이상 4이하의 자연수에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-35=21$

03. 이항정리와 분할

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$

$={}_6C_r\times2^{6-r}\times(-1)^r\times x^{12-2r}\times x^{-r}$

$={}_6C_r\times2^{6-r}\times(-1)^r\times x^{12-3r}$

따라서 상수항은 $12-3r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로 구하는 상수항은

${}_6C_4\times2^{6-4}\times(-1)^4={}_6C_2\times2^2\times1$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times4\times1$

$=60$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6$

이므로

$\log_8({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6)$

$= \log_8 2^6 = \log_{2^3} 2^6 = \frac{6}{3} = 2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

서로 다른 연필 5개를 같은 종류의 필통 3개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 3개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $S(5,\ 3)$이다.

따라서 서로 다른 연필 5개를 (3개, 1개, 1개), (2개, 2개, 1개)로 분할하는 두 가지 경우가 있다.

(i) (3개, 1개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

(ii) (2개, 2개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$10 + 15 = 25$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

자연수 12의 분할 중에서 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 분할은 자연수 6의 분할 중에서 2개 이상의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할에 2를 곱하여 표현할 수 있다.

$6 = 5+1 = 4+2 = 3+3$
$= 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2$
$= 3+1+1+1 = 2+2+1+1$
$= 2+1+1+1+1$
$= 1+1+1+1+1+1$

이므로 자연수 12의 분할 중에서 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 분할은

$12 = 10+2 = 8+4 = 6+6$
$= 8+2+2 = 6+4+2 = 4+4+4$
$= 6+2+2+2 = 4+4+2+2$
$= 4+2+2+2+2$
$= 2+2+2+2+2+2$

이고, 그 개수는 10이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$$\left(x + \frac{1}{3x}\right)^6 = \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r\, x^{6-r} \left(\frac{1}{3x}\right)^r$$

이 때, 전개식에서 x^2의 계수는 $r=2$일 때

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 15 \times \frac{1}{9} = \frac{5}{3}$$

EBS교재

[정답] ①

$\left(x - \frac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$$\begin{aligned} {}_6C_r x^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r &= {}_6C_r(-3)^r x^{6-r} x^{-r} \\ &= {}_6C_r(-3)^r x^{6-2r} \end{aligned}$$

$x^{6-2r} = x^4$에서 $6-2r=4$, 즉 $r=1$

따라서 x^4의 계수는

${}_6C_1 \times (-3)^1 = -18$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 6을 2, 4, 6개의 자연수로 분할하는 방법의 수이므로

$6 = 5+1 = 4+2 = 3+3$

$= 3+1+1+1 = 2+2+1+1$

$= 1+1+1+1+1+1$

∴ 6개

[다른 풀이]

$P(6,\ 2) = 3$

$P(6,\ 4) = P(2,\ 1) + P(2,\ 2) = 2$

$P(6,\ 6) = 1$

따라서 6개다.

EBS교재

[정답] ④

$10 = 4+6$이므로 숫자 4를 포함하는 자연수

10의 분할은

자연수 6의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같다.

$6=6$
$=5+1=4+2=3+3$
$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
$=3+1+1+1=2+2+1+1$
$=2+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1$

이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할의 수는

$1+3+3+2+1+1=11$

EBS연계 기출문항 3

[정답] 20

주어진 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는 $a+b+c+d=7$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수와 같다. 이때, $a'=a-1\ge 0$, $b'=b-1\ge 0$, $c'=c-1\ge 0$, $d'=d-1\ge 0$이라 하면

$a'+b'+c'+d'=7-4=3$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a',b',c',d') 개수와도 같다.

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$ {}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3 =\frac{6!}{3!\,3!}=20$$

[다른 풀이]

자연수 7을 네 개의 자연수로 분할하는 경우로 나누고 각각의 경우에 대하여 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수를 생각하면 다음과 같다.

i) $7=4+1+1+1$인 경우

즉, 1이 3개, 4가 1개로 이루어진 네 자리 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

ii) $7=3+2+1+1$인 경우

즉, 1이 2개, 2가 1개, 3이 1개로 이루어진 네 자리 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

iii) $7=2+2+2+1$인 경우

즉, 1이 1개, 2가 3개로 이루어진 네 자리 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

i), ii), iii)에서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$4+12+4=20$

EBS교재

[정답] ③

같은 종류의 공 8개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $P(8,\ 3)$이다.

자연수 8을 3개의 자연수로 분할하면

$8=6+1+1$
$=5+2+1$
$=4+3+1$
$=4+2+2$
$=3+3+2$

따라서 구하는 경우의 수는

$P(8,\ 3)=5$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_6C_r\times a^r\times x^{12-3r}$$

이때 x^3의 계수는 $12-3r=3$에서 $r=3$일 때이므로

${}_6C_3\times a^3==20\times a^3=160$

$a^3=8$

따라서 실수 a의 값은 2이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

서로 다른 종류의 볼펜 7자루를 같은 종류의 필통 5개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 경우는

(3개, 1개, 1개, 1개, 1개) 또는 (2개, 2개, 1개, 1개, 1개)로 나눌 수 있다.

(ⅰ) (3개, 1개, 1개, 1개, 1개)로 분할하는 경우

$$ {}_7C_3 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{4!} = 35 $$

(ⅱ) (2개, 2개, 1개, 1개, 1개)로 분할하는 경우

$$ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!3!} = 105 $$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$35 + 105 = 140$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

자연수 6의 분할 중에서 숫자 5가 포함되지 않는 서로 다른 분할을 나열하면

$$
\begin{aligned}
6 &= 6 \\
&= 4+2 = 3+3 \\
&= 4+1+1 = 3+2+1 \\
&= 3+1+1+1 = 2+2+1+1 \\
&= 2+1+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

이므로 자연수 6의 분할 중에서 숫자 5가 포함되지 않는 서로 다른 분할의 수는 9이다.

Ⅱ. 확률

01. 확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

$a+b$가 짝수가 되려면 a, b가 모두 홀수이거나 a, b가 모두 짝수이어야 한다.

또한, ab가 짝수이려면 a, b 중 적어도 하나가 짝수이어야 한다.

따라서 $a+b$와 ab가 모두 짝수가 되려면 a, b가 모두 짝수이어야 하므로 이 경우의 수는

$3 \times 3 = 9$

따라서 구하는 확률은

$$ \frac{9}{36} = \frac{1}{4} $$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

서로 다른 6개의 사탕과 서로 다른 3개의 초콜릿을 임의로 3개씩 묶어 3개의 묶음을 만드는 모든 경우의 수는

$$ {}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} $$

$$ = 84 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{6} = 280 $$

3개의 묶음에 포함된 사탕의 개수가 서로 다를 경우는 사탕이 각각 3개, 2개, 1개가 포함될 때이다. 즉, 사탕만 3개인 묶음, 사탕과 초콜릿이 각각 2개, 1개인 묶음, 사탕과 초콜릿이 각각 1개, 2개인 묶음이어야 한다. 사탕만 3개인 묶음을 만드는 경우의 수는

${}_6C_3 = 20$

이 각각에 대하여 사탕과 초콜릿이 각각 2개, 1개인 묶음을 만드는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$

이 각각에 대하여 남은 사탕과 초콜릿을 한 묶음으로 만들면 되므로 3개의 묶음에 포함된 사탕의 개수가 서로 다른 묶음을 만드는 경우의 수는

$20 \times 9 = 180$

따라서 구하는 확률은 $\frac{180}{280} = \frac{9}{14}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = 0$

이때

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) \\
&= \{2\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\} - \mathrm{P}(A)
\end{aligned}
$$

이므로

$$ \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \mathrm{P}(A) $$

$$P(A)=\frac{1}{12}$$

$$P(B)=\frac{1}{3}-2P(A)$$

$$=\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{12}$$

$$=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 값은

$$P(A)P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$$

[다른 풀이]

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cap B)=0$$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$P(A)+P(B)=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$2P(A)+P(B)=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$$P(A)=\frac{1}{12},\ P(B)=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 값은

$$P(A)P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

볼펜이 8개 들어 있는 필통에서 3개의 볼펜을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

같은 색의 볼펜을 2개 이상 꺼내는 사건을 A 라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 서로 다른 색의 볼펜 3개를 꺼내는 사건이다. 이 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_1C_1=4\times3\times1=12$

따라서 $P(A^C)=\frac{12}{56}=\frac{3}{14}$이므로 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 16

6개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$ 이다. 그리고 흰 공 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_2=1$이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{15}$이므로 $p+q=16$ 이다.

EBS교재

[정답] ⑤

5개의 공 중에서 동시에 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

주머니에서 임의로 동시에 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c은 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.

이때 두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 하므로 이 경우의 수는

$${}_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$$

따라서 $P(A^c)=\frac{3}{10}$이므로 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^c)$$

$$=1-\frac{3}{10}$$

$$=\frac{7}{10}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

원형의 탁자에 남자 3명과 여자 3명이 앉는 경우의 수는

$$(6-1)!=5!=120$$

한편, 원형의 탁자에 먼저 남자 3명을 같은 간격으로 배치하는 경우의 수는

$$(3-1)!=2!=2$$

이 각각에 대하여 여자 3명을 남자가 앉은 자리의 사이에 배치하는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 남자 3명과 여자 3명이 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2 \times 6 = 12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_3 = 5^3$

$f(x)$가 일대일함수인 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3 = 60$

$f(1)f(2)f(3) = 4$인 경우는 $f(1), f(2), f(3)$의 값이 $(2,\ 2,\ 1)$ 또는 $(2,\ -2,\ -1)$ 또는 $(-2,\ -2,\ 1)$일 때이다.

(ⅰ) $(2,\ 2,\ 1)$인 경우

$f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} = 3$

(ⅱ) $(2,\ -2,\ -1)$인 경우

$f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3! = 6$

(ⅲ) $(-2,\ -2,\ 1)$인 경우

$f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} = 3$

따라서 $f(1)f(2)f(3) = 4$인 경우는

$3 + 6 + 3 = 12$

그리고 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(1)f(2)f(3) = 4$인 경우는 $f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값이 $(2,\ -2,\ -1)$일 때이고 $f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3! = 6$

그러므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{60 + 12 - 6}{5^3} = \frac{66}{125}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

$f(a)f(b) \geq 0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $f(a)f(b) < 0$을 만족시키는 사건이다.

$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) < 0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 3이므로

$f(a)f(b) < 0$이기 위해서는 $a,\ b$의 값 중 하나는 3이고 다른 하나는 1, 5, 6이어야 한다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C)$

$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ⅱ. 확률

05. 조건부확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤번

조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 버스를 이용하여 등교한 학생인 사건을 A, 지하철을 이용하여 등교한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

지하철을 이용하여 등교한 학생의 수는 버스를

이용하여 등교한 학생의 수의 $\frac{7}{8}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{7}{8}\mathrm{P}(A)$

조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 지하철을 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 버스도 이용하여 등교한 학생일 확률이 $\frac{5}{7}$ 이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{5}{7}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{7}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}P(A)$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{8}\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{8}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤번

$\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{13}{16}$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}$ ……㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16}$, $(\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③번

주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 주머니에서 서로 다른 색의 공이 나오는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오면 주머니에 흰 공을 1개 넣는다.

따라서 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}$

(ⅱ) 주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A^c)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나오면 주머니에 검은 공을 1개 넣는다.

따라서 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{8}{45}+\frac{2}{5}=\frac{26}{45}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②번

1개의 주사위를 3번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 $a(0\le a\le 3)$이라 하면 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $3-a$이므로 $a>3-a$일 경우는 a가 2 또는 3일 때이다.

6의 약수는 1,2,3,6이므로 1개의 주사위를 던

질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고,

6의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(i) $a=2$일 확률은

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9} $$

(ii) $a=3$일 확률은

$$ {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=1\times\frac{8}{27}\times1=\frac{8}{27} $$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$ \frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27} $$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 30

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 흰색으로 같을 확률을 $\mathrm{P}(W)$이라 하면

$$ \mathrm{P}(W)=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100} $$

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 검은색으로 같을 확률을 $\mathrm{P}(B)$이라 하면

$$ \mathrm{P}(B)=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100} $$

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 확률을 $P(S)$이라 하면

$$ \begin{aligned} \mathrm{P}(W|S)&=\frac{\mathrm{P}(W\cap S)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\mathrm{P}(W\cap S)}{\mathrm{P}(W\cap S)+\mathrm{P}(B\cap S)} \\ &=\frac{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}}{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}+\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}} \\ &=\frac{-2a^2+100a}{-4a^2+300a}=\frac{-2a+100}{-4a+300} \\ &=\frac{2}{9} \end{aligned} $$

식을 정리하면 $10a=300$이다.

따라서 $a=30$이다.

EBS교재

[정답] 25

상자 A에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 X, 상자 B에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 Y라 하자.

이때 두 상자 A, B에서 각각 1개씩 택한 구슬이 같은 색인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 상자 A, B에서 모두 흰 구슬이 나오는 경우

두 사건 X, Y는 서로 독립이므로

$$ \begin{aligned} \mathrm{P}(X\cap Y)&=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y) \\ &=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100} \\ &=\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right) \end{aligned} $$

(ii) 상자 A, B에서 모두 검은 구슬이 나오는 경우

두 사건 X^c, Y^c은 서로 독립이므로

$$ \begin{aligned} \mathrm{P}(X^c\cap Y^c)&=\mathrm{P}(X^c)\mathrm{P}(Y^c) \\ &=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100} \\ &=\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right) \end{aligned} $$

(i), (ii)에 의하여 같은 색의 구슬이 나올 확률이

$$ \frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)+\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right) $$

이므로 $\frac{a}{100}=p$로 놓으면

$$ p(1-2p)+2p(1-p)=\frac{1}{2} $$

$$ 8p^2-6p+1=0,\ (2p-1)(4p-1)=0 $$

$$ p=\frac{1}{4} \text{ 또는 } p=\frac{1}{2} $$

따라서 $p=\frac{1}{4}$일 때, $\frac{a}{100}=\frac{1}{4}$에서 $a=25$이고

$p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{a}{100}=\frac{1}{2}$에서 $a=50$이다.

이때 $a=50$이면 상자 B에는 흰 구슬이 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $a=25$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①번

$$ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3} $$

EBS교재

[정답] ①번

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^c, B도 서로 독립이고, 두 사건 A, B^c도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^c \mid B) = \mathrm{P}(A^c) = \frac{1}{2}$ 이므로

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

또, $\mathrm{P}(B^c \mid A) = \mathrm{P}(B^c) = \frac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

EBS연계 기출문항 3

[정답] 30

직원 60명을 두 부서 A, B와 남성, 여성으로 나누어 표로 나타내고 B부서에 속한 여성의 수를 x라 하면

	A부서	B부서	계
남성	10		
여성	10	x	$x+10$
계	20	40	60

여성 직원의 60%가 B부서에 속해 있으므로

$\frac{6}{10}(x+10) = x$ 이다.

$x + 10 = \frac{5}{3}x$

$\frac{2}{3}x = 10$

$\therefore\ x = 15$

따라서 $p = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

$\therefore\ 80p = 80 \times \frac{3}{8} = 30$

EBS교재

[정답] ①번

이 고등학교의 3학년 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 수학 A형을 응시한 학생인 사건을 E, 남학생인 사건을 F라 하자.

수학 A형을 응시한 학생이 60%이므로

$\mathrm{P}(E) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

수학 A형을 응시한 남학생의 수를 n이라 하면

$\mathrm{P}(E \cap F) = \frac{n}{200}$

$\mathrm{P}(F|E) = \frac{\mathrm{P}(E \cap F)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{1}{3}$ 이므로

$\frac{\frac{n}{200}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$ 에서 $n = 40$

따라서 이 고등학교의 3학년 남학생 100명 중에서 수학 B형을 응시한 남학생의 수는 60이고, 이 고등학교의 3학년 학생 중에서 수학 B형을 응시한 학생의 수가

$200 \times \frac{40}{100} = 80$

이므로 구하는 수학 B형을 응시한 여학생의 수는

$80 - 60 = 20$

[다른풀이]

이 고등학교의 3학년 학생 중 수학 A형을 응시한 학생의 수는

$200 \times \frac{60}{100} = 120$

수학 A형을 응시한 학생 중 $\frac{1}{3}$이 남학생이므로 수학 A형을 응시한 남학생 수는

$120 \times \frac{1}{3} = 40$

수학 A형을 응시한 여학생의 수가

$120 - 40 = 80$

이므로 수학 B형을 응시한 여학생의 수는

$100 - 80 = 20$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ②

학급의 20명의 학생 중 임의로 선택한 학생이 남학생인 사건을 A, 과목 B를 선택한 학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$

$$= \frac{\frac{7}{20}}{\frac{10}{20}} = \frac{7}{10}$$

EBS교재

[정답] 4

이 학교 70명의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 민속마을을 다녀온 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 $p = P(B \mid A)$이다. 민속마을을 다녀온 학생은 35명이고, 민속마을을 다녀온 남학생은 20명이므로

$$P(A) = \frac{35}{70},\ P(A \cap B) = \frac{20}{70}$$

따라서$p = P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{20}{70}}{\frac{35}{70}} = \dfrac{4}{7}$

이므로 $7p = 7 \times \frac{4}{7} = 4$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 10

이 학교 70명의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 남학생인 사건을 A, 민속마을을 다녀온 학생인 사건을 B라 하면 $p = \mathrm{P}(B|A)$이다. 남학생은 34명이고 남학생 중 민속마을을 다녀온 학생은 20명이므로

$$\mathrm{P}(A) = \frac{34}{70},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{20}{70}$$

따라서

$$p = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{20}{70}}{\frac{34}{70}} = \frac{10}{17}$$

이므로 $17p = 17 \times \frac{10}{17} = 10$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④번

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\mathrm{P}(B^c \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B^c \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{3}$$

이므로 $\mathrm{P}(B^c) = \frac{1}{3}$, 즉 $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(B)$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{8}$

따라서, $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤번

주어진 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수가 2인 사건을 X라 하자.

(ⅰ) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률

주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 사건을 A라 하면 $A = \{1,\ 4\}$이므로

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{P}(X|A)$는 동전을 3번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$$\mathrm{P}(X|A) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(A \cap X) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X|A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

(ⅱ) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률

주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수인 사건을 B라 하면 $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\mathrm{P}(X|B)$는 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$$\mathrm{P}(X|B) = {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(B \cap X) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(X|B)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 조건부확률은 $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$

III. 통계

06. 이산확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④번

확률의 총합은 1이므로

$$a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=1, \qquad 2a^2+a-1=0,$$

$(a+1)(2a-1)=0$

$a>0$이므로

$$a=\frac{1}{2}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

이므로

$$\mathrm{E}(4X+2)=4\mathrm{E}(X)+2$$
$$=4\times\frac{9}{4}+2=11$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②번

확률변수 X 의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{25-x}$ 이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(25,\ p)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=5$이므로 $25\times p=5$에서

$$p=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=4+25=29$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②번

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,1,2$이고 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=1-\mathrm{P}(X\le 1)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}$ 이므로 $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

$$\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{7}$$

$7n^2-7n=n^2+7n+12$

$6n^2-14n-12=0$

$3n^2-7n-6=0$

$(n-3)(3n+2)=0$

$n=3$ 또는 $n=-\dfrac{2}{3}$

n은 2 이상의 자연수이므로 $n=3$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤번

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 경우는 검은 공 3개 또는 검은 공 2개, 흰 공 1개 또는 검은 공 1개, 흰공 2개 또는 흰 공 3개 이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $-3,\ -1,1,3$이다.

$$\mathrm{P}(X=-3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$$

$$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과

같다.

X	-3	-1	1	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{E}(X)=0$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{9}{5}$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 11

$\mathrm{E}(X)=-5\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{5}=-1+3=2$

$\therefore\ \mathrm{E}(4X+3)=4\mathrm{E}(X)+3=4\times2+3=11$

EBS교재

[정답] ③번

$\mathrm{E}(X)$

$=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{E}(30X+5)=30\mathrm{E}(X)+5=30\times\frac{1}{3}+5=15$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①번

자연수 $k(4\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

이다. 자연수 $r(1\le r\le k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

이므로

$$k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}=4\times\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

이다. 그러므로

$$E(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}\right)$$

$$=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

이다.

$$\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

이므로

$$E(X)=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\times{}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

$$=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}$$

따라서 $f(k)={}_{k-1}\mathrm{C}_3$, $g(k)={}_k\mathrm{C}_4$, $a=\frac{4}{5}$ 이므로

$$a\times f(6)\times g(5)=\frac{4}{5}\times{}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_4$$

$$=\frac{4}{5}\times20\times5=40$$

EBS교재

[정답] ②

확률변수 X가 취하는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{4}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{30}{10}=3$$

$$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{96}{10}=\frac{48}{5}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{48}{5}-9=\frac{3}{5}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①번

두 상수 a, b에 대하여

$P(X=1)=a$, $P(X=2)=b$라 하면

$P(X=-1)=P(X=1)=a$

$P(X=-2)=P(X=2)=b$이므로

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	1	2	계
$P(X=x)$	b	a	a	b	1

확률의 총합은 1이므로 $b+a+a+b=1$에서

$a+b=\frac{1}{2}$ ……㉠

$E(X)=-2b-a+a+2b=0$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$V(X)=E(X^2)=2$

즉, $4b+a+a+4b=2$

$a+4b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}$

따라서

$$P(|X|>1)=P(X=2)+P(X=-2)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 15

확률변수 X가 취하는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때

$$E(X)=2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}$$
$$=\frac{30}{10}=3$$
$$E(X^2)=2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{3}{10}$$
$$=\frac{96}{10}=\frac{48}{5}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{48}{5}-9=\frac{3}{5}$$

따라서 $V(5X)=25V(X)=25\times\frac{3}{5}=15$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③번

이 지역에 있는 단풍나무 중에서 단풍 색이 적색인 단풍나무의 비율이 0.3이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(100, 0.3)$를 따른다.

$$E(X)=100\times\frac{3}{10}=30$$

$$V(X)=100\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=21$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=21+30^2$$
$$=921$$

07. 정규분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②번

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

조건 (가)에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$$P(0 \le X \le 3) = P(3 \le X \le 6) = \frac{1}{2}$$

조건 (나)에서

$P(x \le X \le 3) = a - \frac{x^2}{18}$에 $x = 0$을 대입하면

$P(0 \le X \le 3) = a$에서

$$a = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} &P(2 \le X \le 5) \\ &= P(2 \le X \le 3) + P(3 \le X \le 5) \\ &= P(2 \le X \le 3) + P(1 \le X \le 3) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{18}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right) \\ &= \frac{5}{18} + \frac{8}{18} \\ &= \frac{13}{18} \end{aligned}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 49

$Z = \frac{X-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(ⅰ) $P(X \ge a) = P\left(\frac{X-24}{2} \ge \frac{a-24}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z \ge \frac{a-24}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{a-24}{2} \le Z \le 0\right) + 0.5 \\ &= P\left(0 \le Z \le \frac{24-a}{2}\right) + 0.5 \end{aligned}$$

$P(X \ge a) = 0.8413$이므로

$$P\left(0 \le Z \le \frac{24-a}{2}\right) = 0.3413$$

$\frac{24-a}{2} = 1$에서 $a = 22$

(ⅱ) $P(X \le b) = P\left(\frac{X-24}{2} \le \frac{b-24}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z \le \frac{b-24}{2}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \le Z \le \frac{b-24}{2}\right) \end{aligned}$$

$P(X \le b) = 0.9332$이므로

$$P\left(0 \le Z \le \frac{b-24}{2}\right) = 0.4332$$

$\frac{b-24}{2} = 1.5$에서 $b = 27$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a = 22,\ b = 27$이므로

$$a + b = 22 + 27 = 49$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③번

드론이 한 번 충전으로 비행할 수 있는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(220, 30^2)$을 따른다.

확률변수 $Z = \frac{X-20}{2}$은 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르므로

$P(X \ge t) = 0.9332$에서

$$P\left(Z \ge \frac{t-20}{2}\right) = 0.5 + 0.4332$$

$$P\left(\frac{t-20}{2} \le Z \le 0\right) + 0.5 = 0.5 + 0.4332$$

$P\left(0 \le Z \le -\frac{t-20}{2}\right) = 0.4332$이므로

$$-\frac{t-20}{2} = 1.5$$

따라서 $t = 17$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②번

이 지역 학생이 지난 한 달 동안 수영장에 가보았을 확률이 $0.2 = \frac{1}{5}$이므로 임의추출한 학생 225명 중에서 지난 한 달 동안 수영장에 가본 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(225, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때 225는 충분히 큰 수이고

$E(X) = 225 \times \frac{1}{5} = 45$,

$V(X) = 225 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 36$이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(45, 6^2)$을 따르며 확률변수

$Z=\dfrac{X-45}{6}$ 는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le 36) &= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{36-45}{6}\right)\\ &=\mathrm{P}(Z \le -1.5)\\ &=\mathrm{P}(Z \ge 1.5)\\ &=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)\\ &=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ③번

쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1.5,\ 0.2^2)$을 따르고

$Z=\dfrac{X-1.5}{0.2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(1.3 \le X \le 1.8)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{1.3-1.5}{0.2} \le Z \le \frac{1.8-1.5}{0.2}\right)\\ &=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1.5)\\ &=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+P(0 \le Z \le 1.5)\\ &=0.3413+0.4332 = 0.7745\end{aligned}$$

EBS교재

[정답] ③번

직원의 직무능력평가 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(800,\ 25^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-800}{25}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

선택된 직원의 직무능력평가 시험 점수가 850점 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X \ge 850)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{850-800}{25}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z \ge 2)=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

$$=0.5-0.4772=0.0228$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③번

연속확률변수 X가 갖는 범위 $0 \le X \le 1$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축사이의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times a = \frac{3}{4}a = 1$$

이다. 따라서 $a=\dfrac{4}{3}$ 이다.

EBS교재

[정답] ④번

$a>0,\ b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times\{b+(a+b)\}\times 1=1$에서

$a+2b=2$ ……㉠

또 $\mathrm{P}\left(0 \le X \le \dfrac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{b+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right\}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b$$

$\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{2}b=\dfrac{3}{8}$에서

$a+4b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

이므로

$$a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤번

확률밀도함수의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로

둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3k\times k=1$에서 $k^2=\frac{2}{3}$

$k>0$이므로 $k=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고, $2k=\frac{2\sqrt{6}}{3}$이므로 $k^2<2k$

주어진 그래프로부터 $f(x)=\frac{1}{2}x\,(0\le x\le 2k)$이므로 $f(k^2)=\frac{1}{2}k^2$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k^2)&=1-\mathrm{P}(0\le X\le k^2)\\&=1-\left(\frac{1}{2}\times k^2\times\frac{1}{2}k^2\right)\\&=1-\left(\frac{1}{4}k^4\right)=1-\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}\\&=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 96

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 정규분포를 따르는 확률

밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서

$$m=\frac{77+103}{2}=90$$

조건 (가) $\mathrm{P}(X\le 99)=0.9332$에서

$\mathrm{P}(X\le 99)=0.5+\mathrm{P}(90\le X\le 99)$

따라서 $\mathrm{P}(90\le X\le 99)=0.4332$

확률변수 $Z=\frac{X-90}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\mathrm{P}(90\le X\le 99)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)=0.4332$에서

$$\frac{9}{\sigma}=1.5$$

따라서 $\sigma=6$

$\therefore\ m+\sigma=96$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①번

이 자격시험의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(76,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-76}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

갑이 1급 자격을 얻는 사건을 A, 갑의 시험 점수가 92점 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X\ge 90)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-76}{10}\ge\frac{90-76}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.4)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.4)\\&=0.5-0.4192\\&=0.0808\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(X\ge 92)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-76}{10}\ge\frac{92-76}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.6)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)\\&=0.5-0.4452\\&=0.0548\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.0548}{0.0808}=\frac{137}{202}$$

08. 통계적 추정

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③번

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+6\times\frac{3}{8}+8\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{40}{8}=5$$

$\mathrm{V}(X)$

$$=(2-5)^2\times\frac{1}{8}+(4-5)^2\times\frac{3}{8}+(6-5)^2\times\frac{3}{8}+(8-5)^2\times\frac{1}{8}$$

$= \frac{24}{8} = 3$

표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X}) = E(X) = 5,\ V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{2} = \frac{3}{2}$

$V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - \{E(\overline{X})\}^2$이므로

$\frac{3}{2} = E(\overline{X}^2) - 5^2$

$E(\overline{X}^2) = \frac{3}{2} + 25 = \frac{53}{2}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④번

이 공항을 이용하는 각 손님들의 여행용 가방의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(18, 2^2)$을 따르므로 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(18, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $Z = \frac{\overline{X} - 18}{\frac{1}{2}}$은 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르므로

$P(17.5 \le \overline{X} \le 19)$

$= P\left(\frac{17.5 - 18}{\frac{1}{2}} \le Z \le \frac{19 - 18}{\frac{1}{2}}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③번

$P(|Z| \le 2.58) = 0.99$, 표본의 크기 $n = 81$, 표본평균 $\overline{x} = 140$, 모표준편차 $\sigma = 10$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$60 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 60 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}}$

즉, $58.04 \le m \le 61.96$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③번

임의추출한 100명 중에서 아침식사를 거르고 등교하는 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면 구하는 확률은 $P(0.07 \le \hat{p} \le 0.16)$이다.

$E(\hat{p}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$,

$V(\hat{p}) = \frac{\frac{10}{100} \times \frac{90}{100}}{100} = \frac{9}{10000} = \left(\frac{3}{100}\right)^2$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포

$N\left(\frac{1}{10}, \left(\frac{3}{100}\right)^2\right)$을 따르고, $Z = \frac{\hat{p} - \frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$P(0.07 \le \hat{p} \le 0.16)$

$= P\left(\frac{0.07 - \frac{1}{10}}{\frac{3}{100}} \le \frac{\hat{p} - \frac{1}{10}}{\frac{3}{100}} \le \frac{0.16 - \frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 2)$

$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤번

$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 만족하고

$\sigma(\overline{X}) = 2$이고 $\sigma = 14$이므로

$2 = \frac{14}{\sqrt{n}}$이다.

따라서 $\sqrt{n} = 7$이다.

$\therefore n = 49$

EBS교재

[정답] ③번

크기 $n = 25$인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X}) = m = 48,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{\sigma}{5}$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(48, \frac{\sigma^2}{25}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(\overline{X} \leq 43) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{43-48}{\frac{\sigma}{5}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{-25}{\sigma}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 2)$$

에서 $-\dfrac{25}{\sigma} = -2$ $\quad\therefore \sigma = 12.5$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③번

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$, $\mathrm{E}(\overline{Y}) = m$ 이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(\overline{Y})$ (참)

ㄴ. $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(\overline{Y}) = m$ 이고,

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ 이므로

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ 이므로

$n_1 < n_2$이면 $\sigma(\overline{X}) > \sigma(\overline{Y})$이다.

$\sigma(\overline{X}) > \sigma(\overline{Y})$이므로 곡선 $y = f(x)$는 곡선 $y = g(x)$보다 중앙부분이 낮아지면서 옆으로 퍼진 모양이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 작다. (거짓)

ㄷ. Z를 표준정규분포를 따르는 확률변수라 하면

$\mathrm{P}(m \leq \overline{X} \leq a)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}} \leq \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}} \leq \frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma}\right)$$

$\mathrm{P}(m \leq \overline{Y} \leq b)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}} \leq \frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}} \leq \frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}\right)$$

$\mathrm{P}(m \leq \overline{X} \leq a) > \mathrm{P}(m \leq \overline{Y} \leq b)$이므로

$$\frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma} = \frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}$$

$\sqrt{n_1}(a-m) > \sqrt{n_2}(b-m)$에서

$0 < a-m < b-m$ 이므로

$\sqrt{n_1} > \sqrt{n_2}$

즉, $n_1 > n_2$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④번

주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{16}{4} = 4$$

$\mathrm{V}(X)$

$$= (1-4)^2 \times \frac{1}{4} + (3-4)^2 \times \frac{1}{4} + (5-4)^2 \times \frac{1}{4} + (7-4)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{20}{4} = 5$$

이므로 $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{5}$

표본의 크기가 25이므로

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 이고

$\sigma(5\overline{X}+1) = 5\sigma(\overline{X}) = 5 \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②번

표본의 크기 $n=300$,

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{225}{300}=0.75$, $\hat{q}=1-\hat{p}=0.25$

표본의 크기가 충분히 크므로 찬성률 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.75-1.96\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}\le p\le 0.75+1.96\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}$$

에서

$0.7010\le p\le 0.7990$